



Jean-Louis  
**MIGEOT**

Membre de l'Académie  
Classe Technologie et Société

•

**DES CHIFFRES  
ET DES NOTES**

QUAND LA SCIENCE  
PARLE À LA MUSIQUE

TRANS>ERSALES

ACADÉMIE ROYALE  
des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts  
DE BELGIQUE



DES CHIFFRES ET DES NOTES

## COLLECTION TRANSVERSALES

1. Jean-Louis MIGEOT, *Des chiffres et des notes. Quand la science parle à la musique*, 2015.
2. Hugues BERSINI, *Quand l'informatique réinvente la sociologie !* (à paraître)



**JEAN-LOUIS MIGEOT**

Membre de l'Académie,  
Classe Technologie et Société



**DES CHIFFRES ET DES NOTES**

QUAND LA SCIENCE PARLE À LA MUSIQUE

**Académie royale de Belgique**

Rue Ducale, 1  
1000 Bruxelles, Belgique  
editions@academieroyale.be  
www.academie-editions.be

**Transversales**

Classe Technologie et Société  
Volume 1  
n° 2108

© 2015, Académie royale de Belgique

**Crédits**

© Jean-Louis Migeot, pour le texte et les figures  
(sauf mentions contraires)

Suivi et couverture :

Loredana Buscemi et Grégory Van Aelbrouck,  
Académie royale de Belgique

Impression :

IMP Printing s.a., 1083 Ganshoren

**ISBN 978-2-8031-0508-3**

Dépôt légal : 2015/0092/25

*Ce livre est dédié...*

*À ceux qui savent tout ce que je leur dois.*

*À ceux qui ont tort de douter de ce qu'ils m'ont apporté.*

*À ceux qui ne savent pas encore que je ne suis rien sans eux.*

*À ceux à qui il est trop tard pour exprimer ma reconnaissance.*



## Préface

« Sans la musique, la vie serait une erreur », dit Nietzsche... et qui lui donnerait tort ? Des berceuses psalmodiées par nos parents dès notre naissance aux orgues majestueuses qui scelleront peut-être notre passage sur terre, des musiques endiablées sur lesquelles nous dansons aux accords subtils des plus belles sonates écoutées dans le recueillement d'une salle de concert, des bribes de mélodie entendues à la radio au chant de notre voisine sous la douche, de l'intensité d'un récital à l'inattentive perception du décor sonore d'un restaurant, chaque instant de notre vie, du plus solennel au plus anodin, est baigné de musique. Nous sommes nombreux, comme Nietzsche, à ne pas pouvoir vivre sans musique et, à l'expression *long comme un jour sans pain*, je substituerai volontiers *interminable comme une journée sans musique*.

La musique est un art ancien, universel dans son essence, profondément divers dans sa substance. Comme tous les arts, il s'appuie sur des règles qu'il se plaît souvent à transgresser mais qui n'en sont pas moins présentes et structurantes : si l'exception confirme la règle, la transgression révèle le cadre. La musique mobilise aussi des outils (la voix, les instruments de musique) dont la variété est immense mais l'unité profonde. On peut dire que la musique a essentiellement trois dimensions.

- ▷ Créer des sons harmonieux, divers, multiples : c'est le travail du facteur et de l'instrumentiste qui agissent, l'un lors de la conception et la fabrication de l'instrument, l'autre au cours

de l'interprétation, sur la hauteur et le timbre des notes jouées.

- ▷ Assembler ces sons en accords riches, émouvants, variés: c'est le travail du compositeur qui s'appuie pour ce faire sur les lois de l'harmonie.
- ▷ Enchaîner les accords dans le temps et en dégager des lignes mélodiques porteuses d'émotions: le compositeur fait ici appel aux règles du contrepoint.

Ce livre tente de faire découvrir la structure mathématique du solfège et de l'harmonie ainsi que les mécanismes physiques mis en œuvre dans les instruments de musique. Il vise deux publics :

- ▷ les musiciens qui connaissent le solfège et leur instrument mais qui ignorent l'origine des règles et principes du premier et les mécanismes physiques qui rendent compte du fonctionnement du second ;
- ▷ les mathématiciens, physiciens et ingénieurs qui aiment la musique mais la connaissent peu ou mal et qui pourraient être surpris et intéressés de découvrir que les outils et techniques qu'ils manipulent au quotidien trouvent, dans la musique, un champ d'application passionnant.

Pour atteindre, puis toucher, ce large public, j'ai tenté d'éviter le Charybde de la simplification abusive et le Scylla de la technicité hermétique. Certains me reprocheront d'avoir fait l'impasse sur d'importantes subtilités ou d'avoir renoncé à utiliser certains outils mathématiques essentiels ; tel est le risque constant encouru par le pédagogue, et la vulgarisation est à ce prix.

D'autres trouveront que l'arbre mathématique cache la forêt musicale et qu'il y a décidemment trop de chiffres et pas assez de notes ; je leur répondrai, le cas échéant, que les traités musicologiques sont légion et que ce mémoire n'a de mérite, s'il en a, que

par le renversement de perspective qu'il propose : mathématique d'abord, musique ensuite.

J'espère que malgré ses évidentes limites ce livre éveillera l'intérêt et la curiosité de ceux qui voudront bien marcher avec moi sur la ligne de crête qui sépare ces deux domaines que l'on sait liés mais qui s'ignorent trop souvent.



Un son est un objet physique complexe ; il sera défini au **chapitre premier** qui introduira la notion de signal et de spectre.

En introduction aux chapitres suivants, le **chapitre 2** proposera un rappel des notions élémentaires de solfège.

Notre musique occidentale n'utilise pas un ensemble continu de hauteurs tonales mais s'appuie au contraire sur des degrés bien définis et régulièrement, mais non uniformément, espacés : ce sont les notes de la gamme (Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do). Entre ces échelons se trouvent des marches intermédiaires, les notes altérées (Do#, Ré#, Fa#, Sol#, La#, Réb, Mib, Solb, Lab, Sib) sur lesquelles on peut également s'appuyer. Le **chapitre 3** cherchera à expliquer comment ce choix de degrés particuliers s'est opéré ; il suivra pour ce faire le chemin emprunté dans l'antiquité par Pythagore. Les grands éléments de la structure de la gamme (octave, quinte, ton, demi-ton chromatique, demi-ton diatonique, coma) apparaîtront comme la conséquence naturelle du choix, somme toute arbitraire, de construire notre gamme sur des rapports de fréquences construits exclusivement avec les nombres 2 et 3.

Les lois de la transposition (ordre des dièses et des bémols, relation entre gammes mineures et majeures, tonalité liée à une armure particulière) seront présentées, au **chapitre 4**, comme des conséquences logiques et inéluctables de la structure de la gamme.

La gamme de Pythagore est fondée sur deux intervalles générateurs : la quinte et l'octave et ils sont incommensurables. Le **chapitre 5** tirera les conséquences de cette impossibilité de faire rentrer un nombre entier de quintes dans un nombre entier d'octaves.

Au fil des siècles, de nombreux théoriciens ont proposé des aménagements à la gamme de Pythagore ; nous présenterons au **chapitre 6** la tentative de Zarlino de créer une gamme harmonique, nous introduirons les tempéraments mésotoniques chers aux facteurs d'orgues et nous présenterons la solution radicale que constitue le tempérament égal.

Le **chapitre 7** expliquera que l'harmonie d'un accord résulte directement des fréquences des notes constituantes et proposera un critère d'harmonicité basé sur la période du son complexe engendré par la combinaison des notes de l'accord.

Le **chapitre 8** présentera les principes de base du fonctionnement des instruments de musique. On y montrera par quels mécanismes ces instruments produisent des sons harmoniques.

Le **chapitre 9** prolongera l'étude du signal sonore commencée au chapitre 1 et définira les notions de timbre, de fenêtre et d'enveloppe.

Pour être complet, mais sans avoir la prétention de donner plus qu'un rapide coup de projecteur sur ces différents sujets, le **chapitre 10** abordera les rapports de la musique avec la physiologie (audition) et l'architecture (acoustique des salles).



L'idée de ce livre est née d'un cycle de conférences données en septembre 2011 au Collège Belgique en collaboration avec Jacques Leduc et Steve Houben que je remercie pour leur confiance, leur grande ouverture d'esprit, leur amitié et leur talent.



La lecture des mémoires de l'Académie consacrés aux tempéraments musicaux et rédigés, *in illo tempore*, par mes confrères Jean Bosquet et René Thomas m'a beaucoup enrichi et je voudrais ici leur rendre hommage.

J'ai une dette particulière à l'égard des étudiants du Conservatoire royal de Musique de Liège à qui j'ai présenté le contenu de ce livre au cours des deux dernières années; leur l'intérêt constant a été une importante source de motivation et leurs questions, pertinentes ou impertinentes, ont fait évoluer ce mémoire tant dans sa forme que dans son fond.

Différentes versions du texte ont bénéficié de la relecture attentive et des conseils avisés d'André Lecloux, Philippe Gilson, Françoise Thomas, Alice Springuel, Charles Joachain, Léo Houziaux, Florence Meyer et Aline Huvelle; ce livre ne serait pas ce qu'il est sans leur sens critique dont l'acuité n'a eu d'égal que leur amicale bienveillance.

La mise en page doit tout aux talents combinés de Grégory Van Aelbrouck et Loredana Buscemi et j'éprouve à leur égard une profonde gratitude.



## Qu'est-ce qu'un son ?

D'un point de vue physique, un son est une fluctuation **petite** et **rapide** de la pression atmosphérique<sup>1</sup> autour de sa valeur moyenne.

### Petite ?

Notre oreille est un instrument extrêmement sensible<sup>2</sup> et nous sommes capables de percevoir des fluctuations de pression de très petite amplitude. Le seuil d'audibilité<sup>3</sup> correspond à des amplitudes

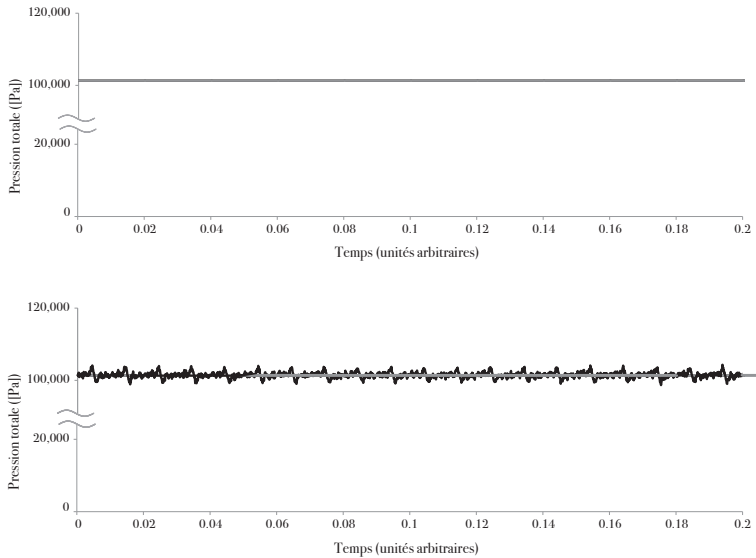
---

<sup>1</sup> L'atmosphère terrestre, par l'effet de sa masse soumise à la gravité, engendre, sur toute surface, une pression atmosphérique dont la valeur standard est de 101.325 Pa (Pascals). Les physiciens mesurent les pressions dans cette unité, nommée en l'honneur du grand mathématicien, physicien et philosophe français **Blaise Pascal** (1623-1662); un Pascal représente une pression de un Newton (unité de force) par mètre carré (unité de surface). Dans le langage courant on désigne encore souvent la pression atmosphérique dans d'autres unités ainsi 101.325 Pa = une atmosphère = 1,013 bar = 1.013 millibar = 1.013 hectopascals = 760 torr = 760 mm de mercure. Le torr dérive son nom de l'inventeur du baromètre, le physicien italien **Evangelista Torricelli** (1608-1647).

<sup>2</sup> Cette acuité auditive exceptionnelle, néanmoins largement dépassée par celle d'autres animaux, s'est développée au cours de l'évolution; elle constitue en effet une protection efficace contre les prédateurs dont elle permet de détecter l'approche furtive.

<sup>3</sup> Le seuil d'audibilité dépend de la fréquence du signal et varie nettement d'un sujet à l'autre. Nous associons ici le seuil d'audibilité à la pression acoustique de référence ( $2 \cdot 10^{-5}$  Pa) correspondant, par définition, à un niveau sonore nul (0 dB). La notion de décibel sera introduite à l'appendice 3.

de fluctuation de l'ordre du cent-millième de Pa, soit un dix-milliardième d'atmosphère ! À l'autre extrême, la fluctuation de pression dépasse rarement 100 Pa<sup>4</sup> ce qui n'est encore qu'un millième de la pression atmosphérique [Figure 1].



**Figure 1** — La fluctuation sonore est si faible qu’au niveau déjà élevé de 100 décibels (figure du haut) la fluctuation acoustique n’apparaît pas sur le graphique : elle disparaît dans l’épaisseur du trait. Il faut monter à des niveaux extravagants (160 décibels, graphe du dessous) pour que la fluctuation devienne visible à l’échelle de la pression atmosphérique.

<sup>4</sup> Le niveau sonore associé à une fluctuation de pression de 100Pa est de 130dB. Des niveaux plus élevés peuvent être relevés, au voisinage d’un moteur d’avion ou d’une fusée par exemple, mais rarement dans la vie courante.

## Rapide ?

Pour qu'une fluctuation de pression crée une impression sonore, elle doit alterner suffisamment rapidement les phases de surpression et de dépression. La limite inférieure de sensibilité auditive humaine se situe approximativement à la fréquence de 20 Hz<sup>5</sup> ; en dessous de ce seuil nous sommes dans le domaine des infrasons que nous percevons, avec le corps entier, comme une vibration de l'air autour de nous et non, comme le son, avec nos oreilles.

Plus le rythme de ces fluctuations est élevé, plus le son est aigu. À haute fréquence notre oreille ne perçoit plus les fluctuations de la pression et nous entrons dans le domaine des ultrasons. La limite de perception des hautes fréquences se situe aux alentours de 16.000 Hz ; elle dépend toutefois beaucoup du sujet, notamment de son âge.

## 1. SIGNAL SONORE

Un son est déterminé physiquement par la variation dans le temps de la fluctuation de pression qui lui est associée. On appelle cette variation le signal sonore. Nous allons voir dans ce chapitre qu'on peut décrire le signal associé à une note unique par trois attributs principaux :

---

<sup>5</sup> Le Hertz (Hz ou s<sup>-1</sup>, nombre de cycles par seconde) est l'unité internationale de fréquence. Elle a été choisie en l'honneur du physicien allemand **Heinrich Rudolf Hertz**, né le 22 février 1857 à Berlin et décédé le 1<sup>er</sup> janvier 1894 à Bonn. Élève de Kirchhoff et d'Helmholtz, il fut le premier à confirmer expérimentalement, en 1887, l'existence des ondes électro-magnétiques prédites par la théorie proposée par **James Clerk Maxwell** (1831-1879) et appelées depuis ondes hertziennes.

- ▷ une fréquence fondamentale ( $f_0$ ) qui définit la hauteur tonale<sup>6</sup> du son ;
- ▷ l'amplitude des harmoniques (composantes du son caractérisées par des fréquences double, triple, quadruple... du fondamental :  $2 f_0, 3 f_0, 4 f_0, \dots$ ) qui viennent enrichir le fondamental<sup>7</sup> ;
- ▷ l'enveloppe sonore, ou *formant*, qui fixe la durée du son mais module aussi son amplitude.

Si nous associons la même hauteur au La d'un piano et à celui d'un violon, c'est parce les sons associés ont la même fréquence fondamentale. Si nous percevons toutes les notes jouées par un instrument donné comme appartenant, malgré leurs différences de hauteurs, à une même famille de sons et si nous pouvons les distinguer de celles jouées par un autre instrument, c'est grâce à leur contenu harmonique et à leur *formant*.

---

<sup>6</sup> L'assimilation de la hauteur tonale d'un son à la fréquence de son fondamental est une approximation radicale qui ignore délibérément toute la subtilité de notre réponse psycho-acoustique à un son complexe. La norme américaine de 1994 définit la hauteur tonale (*pitch*) de manière très lâche comme « cet attribut de la sensation auditive suivant lequel il est possible de classer les sons sur une échelle allant du grave à l'aigu ». **William Hartmann**, dans son excellent livre *Signals, sound and sensation* (Springer, 1998), donne de la hauteur tonale une définition opérationnelle : « on dit d'un son qu'il a une hauteur déterminée si on peut lui associer de manière fiable [et univoque] un son monochromatique de fréquence donnée. » La hauteur, comme la fréquence, se mesure dès lors en Hz. D'un point de vue musical, la hauteur d'un son est la caractéristique qui détermine la mélodie et l'harmonie. Par souci de clarté et de simplification nous associerons dans ce livre les deux concepts : hauteur et fréquence fondamentale.

<sup>7</sup> Avec beaucoup d'autres auteurs, j'appellerai harmonique  $n$  la composante de fréquence  $nf_0$  ; suivant cette convention le fondamental est aussi le premier harmonique ( $f_0$ ). Le langage physique et musical entretient trop souvent une difficulté inutile en appelant premier harmonique la composante de fréquence  $2f_0$  et harmonique ( $n-1$ ) celle de fréquence  $nf_0$ .

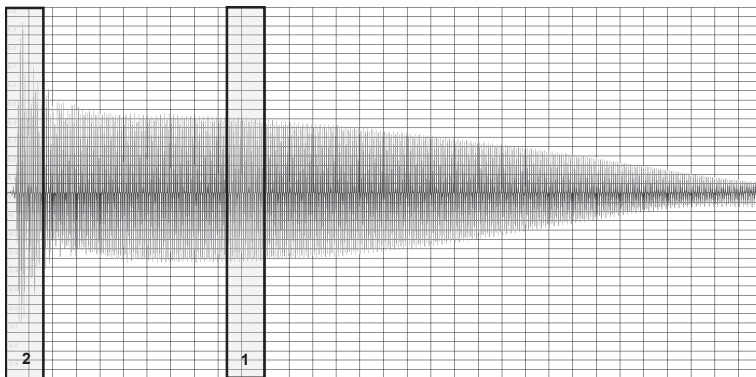


Les **Figures 2 à 4** montrent le signal associé à un La joué à la guitare (cinquième corde à vide).

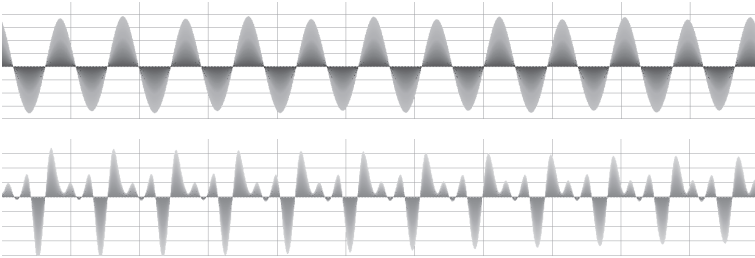
La **Figure 2** montre le signal complet, de l'instant où la corde est pincée à celui où le son est devenu imperceptible. Les fluctuations de pression qu'on observe sont si nombreuses et si rapides qu'on ne peut les distinguer individuellement. Pour ce faire, on doit observer une zone beaucoup plus petite; choisissons par exemple les zones marquées 1 et 2.

La **Figure 3** montre le signal dans la zone 1 définie ci-dessus; la fluctuation de pression y est très stable: elle enchaîne avec régularité les surpressions et les dépressions et le signal observé sur une période est indiscernable de celui des périodes voisines. Nous nous intéresserons dans ce chapitre à cette zone de stabilité (*sustain* en anglais).

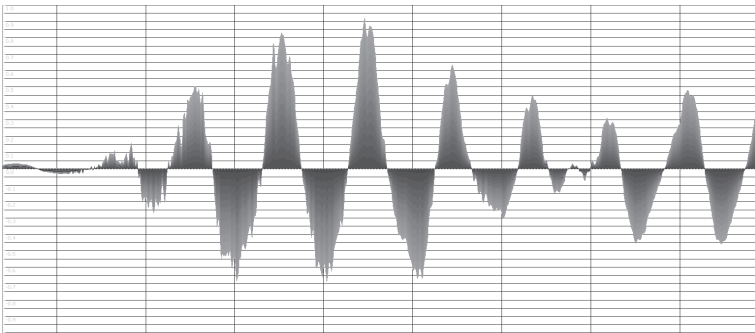
Dans la zone 2 [**Figure 4**] qui correspond aux premières millisecondes suivant le pincement de la corde, le signal est irrégulier et



**Figure 2**— Signal sonore correspondant au son émis par une guitare jouant un La.



**Figure 3** — Zoom sur la zone 1 de la Figure 2 (graphe du haut). Par comparaison on représente le signal de la même note jouée au piano (graphe du bas). Les deux signaux ont la même période mais se différencient nettement en termes de complexité.



**Figure 4** — Zoom sur la zone 2 de la Figure 2.

apériodique, même si une forme de rythme apparaît déjà dans la fluctuation. Cette zone d'attaque (*attack*), de même que l'enveloppe globale du signal, qu'on appelle le formant du son [Figure 2], sont des éléments essentiels du timbre ; nous les étudierons au chapitre 9.

•



Le signal est une représentation fidèle du phénomène sonore ; elle est pertinente dans un contexte d'enregistrement du son ou de reproduction de celui-ci. Le signal sonore est cependant si riche en information, si dense, qu'il se prête mal à une analyse qualitative par le mathématicien, le musicien ou l'ingénieur. Comment par exemple imaginer, par simple inspection visuelle de la **Figure 2**, la hauteur tonale ou la richesse harmonique du son considéré ? Nous sentons bien que nous devons trouver une manière d'extraire des informations pertinentes du signal afin de le réduire à quelques indicateurs qui font sens dans notre contexte musical.

Ce chapitre vise précisément à définir une représentation alternative du signal, plus opératoire, qu'on appelle son spectre. Cette terminologie évoque sans doute le fait que le spectre du son est *là*, qu'il nous révèle des informations importantes mais qu'il nous est invisible, caché derrière le signal comme le fantôme sous son suaire.

Nous allons, pour ce faire, commencer par introduire le signal le plus simple et, musicalement, le plus pauvre qui soit, la sinusoïde ou signal *monochromatique*, et présenter ses descripteurs principaux : fréquence, période, amplitude, phase.

Nous verrons ensuite que des signaux beaucoup plus intéressants peuvent être engendrés par la combinaison de plusieurs sinusoïdes (signaux *polychromatiques*). Nous introduirons à cette occasion la notion d'harmonique.

## 2. SINUSOÏDE ET SIGNAL MONOCHROMATIQUE

Le signal le plus simple qu'on puisse imaginer est celui représenté à la **Figure 5**. Il n'a ni début ni fin et alterne, avec une régularité métro-nomique, des phases de montée et de descente de la pression acoustique. Un tel signal est dit sinusoïdal et la courbe associée est une

sinusoïde<sup>8</sup>; il est décrit par deux attributs fondamentaux : son amplitude  $A$  et sa période  $T$ . L'amplitude est la valeur maximale atteinte par la sinusoïde. La période est le temps qui s'écoule avant que la sinusoïde ne repasse par les mêmes valeurs. La période est, par exemple, le temps qui sépare deux maxima ou deux minima successifs de la courbe<sup>9</sup>. À la période  $T$ , mesurée en secondes, est associée une autre grandeur, la fréquence  $f$ , définie comme l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T}$$

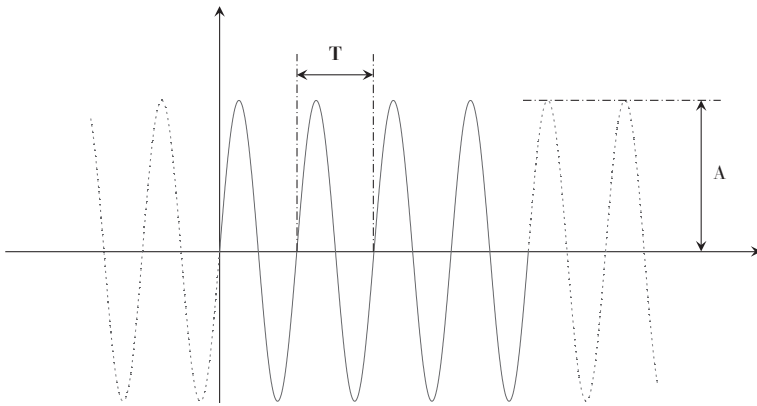
La fréquence indique le nombre de périodes que le signal parcourt en une seconde. Notons qu'un signal sinusoïdal est une idéalisation mathématique. Un signal qui résonnerait de toute éternité ne peut évidemment pas avoir d'existence physique : il a nécessairement commencé à un instant donné et se terminera probablement avant la fin des temps. En première approximation toutefois, *infini* signifie *longtemps* et, dans le domaine du son, où la période typique est de quelques millisecondes (ms), voire quelques dixièmes de millisecondes, *longtemps* signifie *un grand nombre de périodes* de telle sorte que l'infini, en cette matière, est de l'ordre de la seconde. Un signal sinusoïdal de fréquence 1.000 Hz a une période de 1 ms ; s'il dure 10 secondes il couvrira 10.000 périodes ce qui, d'un point de vue pratique, s'apparente à l'infini.

---

<sup>8</sup> Il n'est pas nécessaire, pour la lecture de ce qui suit, de connaître avec précision la définition d'une sinusoïde ; il suffit de savoir quelle est l'allure de cette courbe et d'admettre qu'elle décrit le signal le plus simple qui se puisse construire. S'il veut savoir un peu mieux ce que recouvre le terme de sinusoïde, le lecteur pourra se référer à l'appendice 1 en fin de volume.

<sup>9</sup> Mais la distance entre deux passages par zéro est égale à  $T/2$  car le signal croise l'axe deux fois par cycle : une première fois à la montée et une seconde fois à la descente.

Le signal sinusoïdal est la brique élémentaire qui permet, par assemblage, de créer tous les autres sons. Comme il est caractérisé, par définition, par une seule fréquence, il est appelé, par analogie avec l'optique, où les concepts de fréquence et de couleur sont liés, signal *monochromatique*<sup>10</sup> ; on parle aussi de son pur.



**Figure 5** — Sinusoïde : définition de l'amplitude  $A$  et de la période  $T$ . Les parties gauche et droite du signal sont en traits pointillés pour indiquer que le signal se prolonge, des deux côtés, jusqu'à l'infini.

### 3. SYNTHÈSE SONORE ADDITIVE

Le La(3) joué à la guitare [Figure 3] est caractérisé par un signal qui semble sinusoïdal<sup>11</sup> ; son homologue joué au piano est caractérisé par la même périodicité mais le motif élémentaire, c'est-à-dire la forme du

<sup>10</sup> Du grec *μονο*, un, unique et *χρώματος*, couleur : qui n'a qu'une seule couleur, une seule composante spectrale, qui est composé d'un son pur à une seule fréquence.

<sup>11</sup> Il comporte en fait plusieurs harmoniques mais le fondamental est largement dominant.

signal sur une période donnée, est beaucoup plus complexe. Comment rendre compte de tels signaux périodiques non sinusoïdaux ?

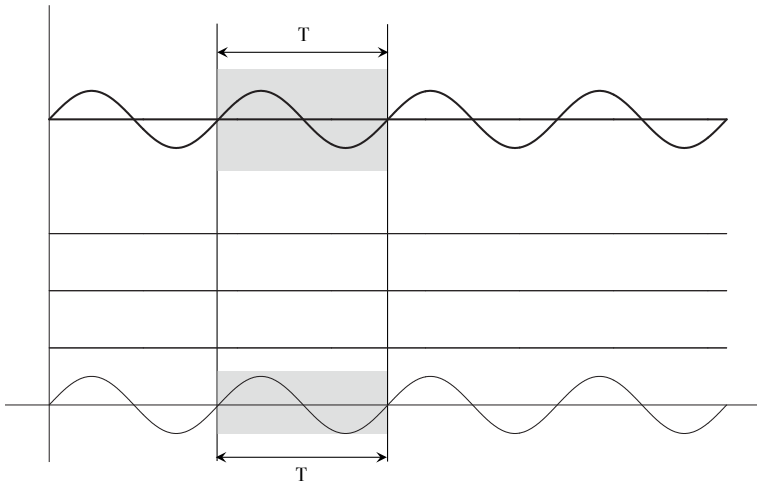
Nous allons montrer que la combinaison de sons purs peut engendrer des signaux *complexes* dits *polychromatiques*. De manière réciproque, nous montrerons que tout signal périodique peut être décomposé en une somme de signaux monochromatiques dont les fréquences forment une suite arithmétique<sup>12</sup>.

Les **Figure 6 à 9** montrent comment s'opère cette *synthèse sonore additive*: on y voit de un à quatre signaux monochromatiques se combiner pour engendrer le signal complexe représenté en traits gras au sommet de la figure. Les signaux constitutifs ont pour période, respectivement,  $T$ ,  $T/2$ ,  $T/3$  et  $T/4$  et leurs fréquences sont  $1/T = f_0$ ,  $2/T = 2f_0$ ,  $3/T = 3f_0$ ,  $4/T = 4f_0$ .

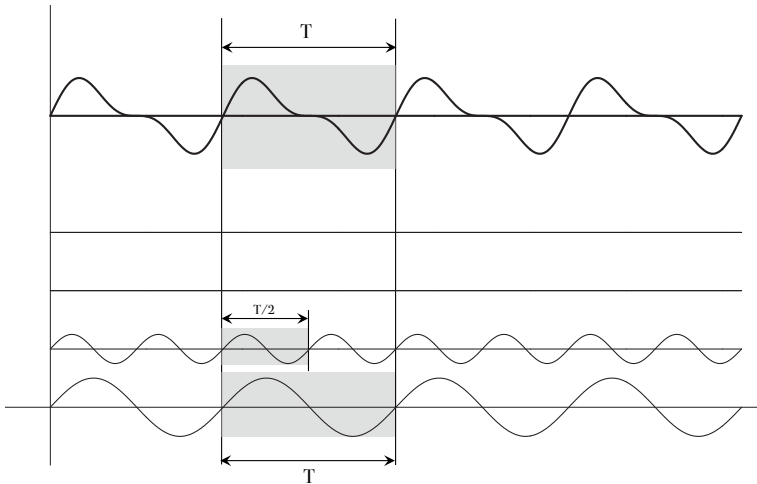
Chaque fois qu'on ajoute une composante, le signal se complexifie mais **sa période ne change pas**: le signal polychromatique a la même période  $T$  que le fondamental. Plus généralement: si on ajoute à un signal de période  $T$  un signal dont la période est une fraction entière  $T/n$  de  $T$ , alors le signal résultant est aussi de période  $T$ . On en déduit immédiatement que la combinaison d'un nombre arbitraire de signaux dont les périodes sont des fractions entières de  $T$  engendre un signal de période  $T$ . Et une sinusoïde étant un cas particulier de signal périodique on peut conclure que la somme de sinusoïdes de périodes  $T$ ,  $T/2$ ,  $T/3$ ,... est un signal de période  $T$ .

On démontre réciproquement que **tout signal de période  $T$  peut être analysé comme la superposition d'un nombre fini ou infini de signaux monochromatiques dont les fréquences sont les multi-**

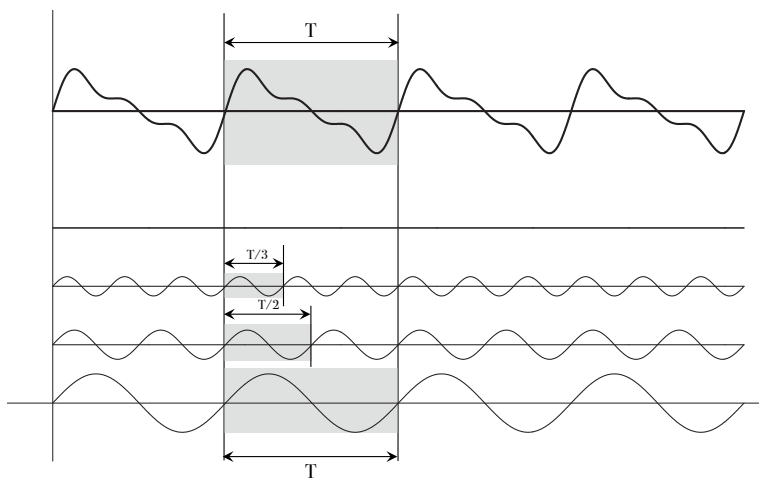
<sup>12</sup> Une suite *arithmétique* est une suite de nombres où chaque terme est égal au précédent *plus* une constante appelée la *raison* de la suite; par exemple: 3, 3 + 2 = 5, 5 + 2 = 7, 7 + 2 = 9... Une suite *géométrique* est une suite de nombres où chaque terme est égal au précédent *multiplié* par une constante appelée la *raison* de la suite; par exemple: 3, 3 × 2 = 6, 6 × 2 = 12, 12 × 2 = 24...



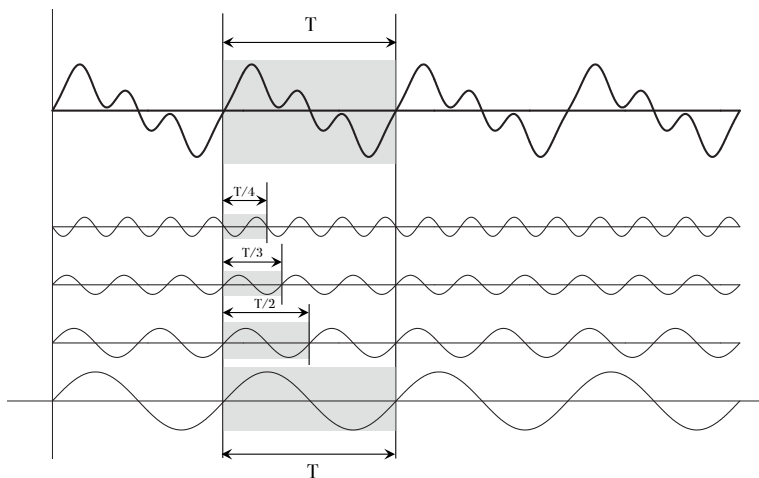
**Figure 6** — Synthèse sonore – Fondamental seul.



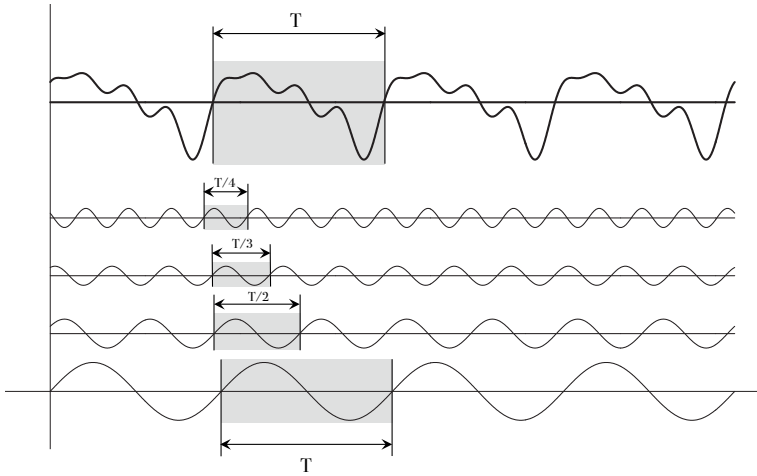
**Figure 7** — Synthèse sonore – Somme du fondamental et de l'harmonique 2.



**Figure 8** — Synthèse sonore – Somme du fondamental et des harmoniques deux et trois.



**Figure 9** — Synthèse sonore – Somme du fondamental et des harmoniques deux à quatre.



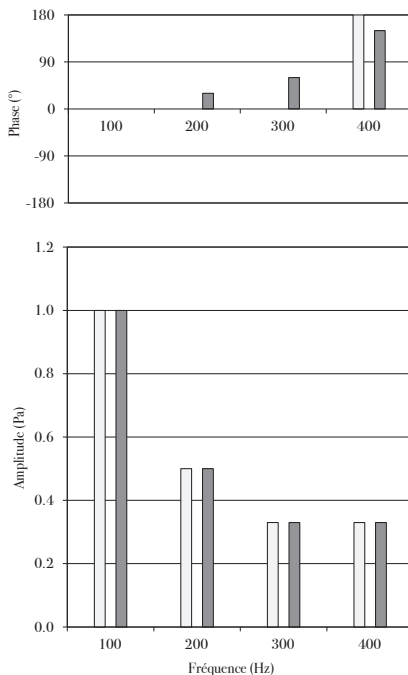
**Figure 10** — Synthèse sonore – Le déphasage entre les composantes du signal change la forme du signal mais n'en change pas la période.

**ples entiers de la fréquence fondamentale  $f_0=1/T$ .**

À la **Figure 9**, toutes les composantes du signal étaient en phase, c'est-à-dire qu'à un instant  $t$  au moins, marqué par le début des zones grisées, ils avaient tous une valeur nulle au même instant. La **Figure 10** montre que cette condition n'est en rien nécessaire; on y voit le résultat de l'addition des mêmes signaux, mais cette fois déphasés l'un par rapport aux autres: le signal total est différent de celui de la **Figure 9** mais il reste de période  $T$ . Nous ne nous préoccupons pas ici de telles différences de phase entre harmoniques.

#### 4. SPECTRE

Voici le moment d'introduire la notion de *spectre*: il s'agit simplement d'un diagramme qui indique la fréquence du fondamental et des harmoniques présents, leurs amplitudes et leurs déphasages. Le spectre est en fait un double graphe [Figure 11]: celui du dessous représente l'amplitude des différentes composantes du signal en fonction de leur fréquence, alors que celui du dessus représente



**Figure 11** — Spectres des signaux des Figures 9 (gris clair) et 10 (gris foncé): les amplitudes sont identiques mais les phases diffèrent.

le déphasage de chaque composante par rapport à une référence arbitraire. Le déphasage se mesure par un angle, une période du signal étant associée à un tour complet soit à  $360^\circ$ .

Les deux signaux étudiés sont constitués des mêmes fréquences et leurs composantes ont la même amplitude mais les phases diffèrent: pour le premier signal toutes les composantes sont en phase sauf la dernière qui commence par descendre alors que les autres montent (déphasage d'un demi-tour soit  $180^\circ$ ), dans le second signal toutes les composantes sont



déphasées par rapport au fondamental, respectivement de 30, 60 et 150°.

## JEAN-BAPTISTE FOURIER

Né à Auxerre le 21 mars 1768, Jean-Baptiste Joseph Fourier [Figure 12] est un enfant de la révolution. Il a 21 ans quand elle éclate en 1789 et il échappe de peu à la Terreur de 1792. Jeune professeur à l'École Polytechnique, il accompagne Bonaparte en Égypte en 1798 et y reste jusqu'en 1802 ; il préfacera d'ailleurs la monumentale *Description de l'Égypte* qui tente la somme des « observations et des recherches qui ont été faites en Égypte pendant l'expédition de l'Armée française ». À son retour, devenu préfet de l'Isère sur décision de l'Empereur, il consacre son temps libre à l'analyse des phénomènes thermiques et est le premier à élucider l'effet de serre par lequel l'atmosphère ►

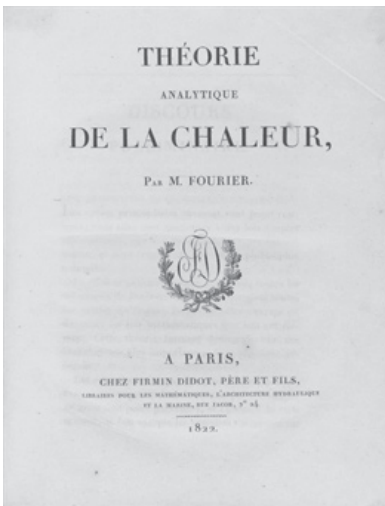


**Figure 12** — Portrait de Joseph Fourier en habit d'académicien. Dessin de Julien Léopold Boilly gravé par Amédée Félix Barthélemy Geille in *Portraits et Histoire des Hommes Utiles*, Collection de Cinquante Portraits, Société Montyon et Franklin, 1839-1840.

►► terrestre conserve une part du rayonnement solaire qui la frappe.

Il est élu membre de l'Académie des Sciences en 1817 et en devient le secrétaire perpétuel en 1822. C'est cette même année qu'il publie un important mémoire : la *Théorie analytique de la chaleur*. Fourier devient membre de l'Académie Française en 1826 et meurt à Paris le 16 mai 1830.

La décomposition spectrale du son en composantes harmoniques que nous venons d'évoquer, doit beaucoup à la théorie des séries trigonométriques qu'il introduit dans son mémoire de 1822. C'est un paradoxe remarquable que cet outil mathématique, si utile à tous les scientifiques manipulant des ondes, soit né dans le cadre d'une théorie de la conduction thermique... qui n'est pas ondulatoire !



**Figure 13** — Page de garde du célèbre mémoire de Fourier : *Théorie analytique de la chaleur* (1822).

## 5. SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Un son est susceptible d'une double représentation: en signal et en spectre. Le signal enregistre la valeur de la pression à chaque instant.

En observant le signal correspondant à une note unique jouée par un instrument de musique nous observons que, pendant la partie du signal où ce son est stable, il varie de manière périodique. La période ( $T$ ) caractérise la hauteur tonale du son ( $f_0 = 1/T$ ).

La forme du signal au cours d'une période peut-être simple ou complexe mais, dans tous les cas, elle peut se décomposer en une somme de signaux simples (sinusoïdaux) dont les fréquences sont les multiples de la fréquence  $f_0$ .

La composante de fréquence  $f_0$  est appelée le fondamental du signal. La composante de fréquences  $n f_0$  est appelée l'harmonique  $n$ . Suivant cette terminologie le fondamental est aussi l'harmonique 1 du signal.

Un La(3) est caractérisé par une fréquence fondamentale standardisée de 440 Hz. On trouvera donc dans le signal associé à un La(3) joué par différents instruments des parts variables de composantes à 440 Hz, 880 Hz, 1.320 Hz, 1.760 Hz, etc. Certaines de ces composantes peuvent éventuellement être nulles.

•

Ce livre tente d'élucider les mystères du solfège. Il est dès lors sans doute utile d'en rappeler les grands principes. C'est l'objet du chapitre suivant.



## Le B-A-BA du solfège

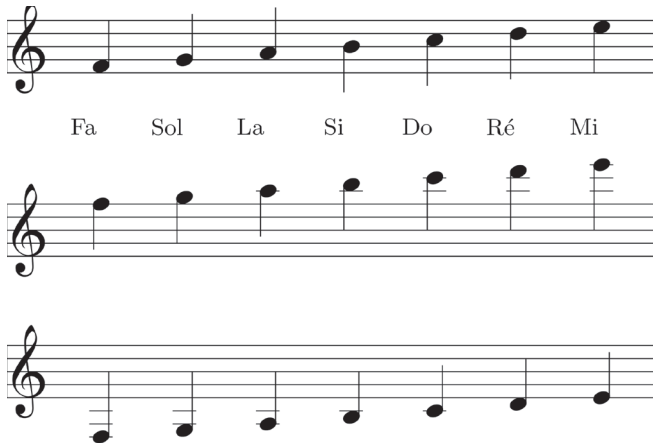
De la même manière que nos mots sont construits à partir d'un nombre limité de lettres, notre musique occidentale est basée sur l'utilisation d'un petit nombre de notes : Fa, Sol, La, Si, Do, Ré, Mi<sup>1</sup>. Ainsi rangées, elles vont du grave (Fa) à l'aigu (Mi). Au delà du Mi on trouve des notes plus aiguës auxquelles on donne le même nom qu'aux notes précédentes. En dessous du Fa, on trouve des notes plus graves mais toujours nommées de la même manière. L'intervalle qui sépare deux notes de même nom (Fa-Fa, Sol-Sol) est appelé une octave. On représente ces notes sur une portée de cinq lignes et quatre interlignes [Figure 14].

Deux notes consécutives sont séparées par un intervalle qui peut prendre deux valeurs [Figures 15 et 16] :

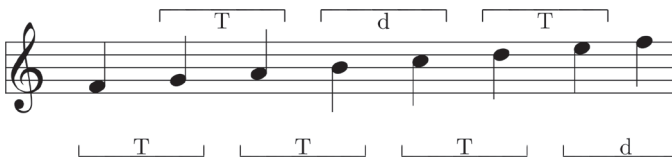
- ▷ un *ton* (T) sépare Fa et Sol, Sol et La, La et Si, Do et Ré et, enfin, Ré et Mi ;
- ▷ on passe de Si à Do et de Mi à Fa par un *demi-ton diatonique* (d).

---

<sup>1</sup> Le démarrage sur Fa est inhabituel mais pas arbitraire ; c'est dans cet ordre que les notes apparaîtront naturellement dans la construction arithmétique ascendante de Pythagore [Chapitre 3]. Notons, avec un peu d'avance sur le chapitre 4, qu'il ne s'agit pas pour autant de la gamme de Fa majeur qui impliquerait un Si $\flat$ . La gamme qui débute sur Fa et ne comporte aucune altération est appelée *gamme de Fa en mode lydien*.



**Figure 14** — La première portée contient les notes de Fa à Mi. La seconde contient les mêmes notes une octave plus haut. La troisième contient toujours les mêmes notes mais une octave plus bas.



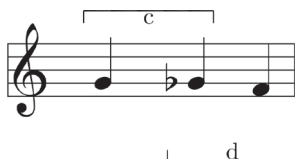
**Figure 15** — L'intervalle qui sépare deux notes successives de la gamme est soit d'un ton, soit d'un demi-ton diatonique.

Chaque note peut en outre être altérée : soit par un dièse (#), qui fait monter la note d'un demi-ton *chromatique*<sup>2</sup> (qu'on note c), soit par un bémol (b) qui la fait descendre de ce même demi-ton chromatique.

<sup>2</sup> Du grec *χρώματος*, couleur. Ces demi-tons chromatiques *colorent* le son sans le faire changer de nature et donc de dénomination.



**Figure 17** — Entre Fa et Sol vient s'intercaler Fa#. L'intervalle entre Fa et Fa# est un demi-ton chromatique (c) alors que l'intervalle entre Fa# et Sol est un demi-ton diatonique (d).



**Figure 18** — Entre les notes naturelles Sol et Fa on trouve la note altérée Solb. L'intervalle entre Sol et Solb est un demi-ton chromatique (c) alors que l'intervalle entre Solb et Fa est un demi-ton diatonique (d).

À la gamme diatonique de la **Figure 14** on peut associer les gammes chromatiques montante et descendante de la **Figure 19**.



**Figure 19** — La première portée donne la gamme chromatique montante de Fa à Fa. La seconde donne la même gamme dans sa version descendante.



Cette courte présentation des éléments de base du solfège fait apparaître quelques-unes des questions auxquelles ce livre tentera de répondre :

- ▷ Pourquoi avoir donné des noms identiques à des notes différentes (Mi et son homologue à l'octave) ?
- ▷ Pourquoi certains degrés de la gamme sont-ils distants d'un ton (Do-Ré) et d'autres d'un demi-ton (Mi-Fa) ?
- ▷ Les deux types de demi-tons, diatoniques et chromatiques, ne diffèrent-ils que par leurs noms ? Mais alors, pourquoi en introduire deux ?
- ▷ Pourquoi la gamme a-t-elle 7 degrés diatoniques et 12 degrés chromatiques ?

## DU NOM DES NOTES ET DES ALTÉRATIONS

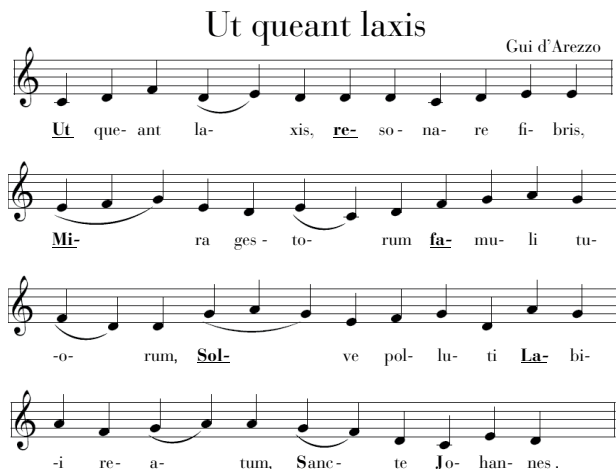
Le monde anglo-saxon désigne les notes par des lettres capitales allant de A pour La à G pour Sol. Le monde latin utilise les premières syllabes de l'ode à Saint Jean Baptiste *Ut queant laxis* composée au VIII<sup>e</sup> siècle par le moine bénédictin Paul Diacre et mise en musique au XI<sup>e</sup> siècle par Gui d'Arezzo, bénédictin lui aussi [Figure 20].

La première syllabe du premier vers, *Ut*, reste utilisée en théorie musicale (clés d'ut par exemple) mais, étant la seule note commençant pas une voyelle, elle a été remplacée au XVII<sup>e</sup> siècle par la syllabe Do. Deux théoriciens italiens, Giovanni Bononcini et Giovanni Battista Doni se disputent la paternité de ce changement.

L'introduction de la note Si est postérieure à Gui d'Arezzo et date du XVI<sup>e</sup> siècle ; les deux lettres S et I sont les initiales de Saint Jean Baptiste à qui l'ode originale est consacrée (*Sancte*



*Iohannes*) et dont le nom apparaît à la dernière mesure.



**Figure 20** — L'hymne à Saint-Jean-Baptiste sert de base à la solmisation du solfège.

Dans la musique médiévale, la seule note altérée était le  $\text{Si}\flat$ . Le Si étant désigné par la lettre B, un *B molle* (du latin *mollis*, mou) représentait un B *adouci*. Par extension, le bémol (B-moll) est devenu la marque qui, placée devant une note, la descend d'un demi-ton chromatique.

Une notation médiévale alternative séparait le *B rotundus* (rond) du *B quadratus* (carré) opposant ainsi le  $\text{Si}\flat$  au  $\text{Si}\natural$ . C'est de ce *B-carré* que dérive le mot bécarré qui désigne le signe marquant une note naturelle, non altérée.

Le mot dièse vient lui du grec  $\delta\iota\epsilon\sigma\iota\varsigma$  (*diesis*) qui désigne l'action de séparer et donc, en musique, d'intercaler un son à mi-chemin entre deux autres.



## La gamme de Pythagore

Pythagore, né à Samos vers 580 et mort à Métaponte vers 497 av. J.-C., à l'âge, vénérable pour l'époque, de quatre-vingt-trois ans, est un personnage clé de l'histoire des sciences et de la philosophie. Ses enseignements nous sont malheureusement tous connus de manière indirecte et ce que nous savons de sa vie est largement apocryphe. Si quelques contemporains<sup>1</sup> y font en effet allusion, d'ailleurs plutôt de manière critique voire moqueuse, sa réputation croît dès après sa mort<sup>2</sup>. Le lent travail hagiographique dont il est l'objet culmine aux premiers siècles de notre ère avec les Vies de Pythagore qu'écrivent Diogène Laërce, Porphyre et Jamblique<sup>3</sup>. Ils présentent Pythagore comme le réformateur religieux, chef de secte, philosophe premier du nom, mathématicien, physicien et thaumaturge dont la légende nous est familière aujourd'hui.

Mais le personnage historique importe finalement peu et s'efface derrière le symbole de l'homme qui « il y a vingt-cinq siècles, fit basculer la Grèce d'un mode de pensée religieux à un mode de pensée

---

<sup>1</sup> Notamment **Xénophane** (~570 à ~475 av. J.-C.), **Héraclite** (~544 à ~480 av. J.-C.) et **Empédocle** (~495 à ~430 av. J.-C.).

<sup>2</sup> Au travers notamment des commentaires d'**Hérodote** (~484 à ~425 av. J.-C.) et du livre que lui consacre **Démocrite** (~460 à ~370 av. J.-C.).

<sup>3</sup> **Diogène Laërce** : doxographe et biographe du début du III<sup>e</sup> siècle de notre ère. **Porphyre** (234 à ~305 ap. J.-C.) et **Jamblique** (242-325 ap. J.-C.) : philosophes néoplatoniciens.

rationnel [qui] reste vivace chez les hommes de science<sup>4</sup>».

L'arithmétique est au cœur de la pensée pythagoricienne ; Aristote rapporte ainsi<sup>5</sup> que, pour les pythagoriciens, « les choses sont nombre<sup>6</sup> », « les nombres se trouvent dans les choses », « les nombres sont les causes et les principes des choses » ou encore « les choses sont constituées par les nombres ». Il dira plus loin, dans sa *Métaphysique* : « Comme [les pythagoriciens] avaient été élevés dans cette science [mathématique], ils crurent que ses principes étaient les principes de toutes choses ; et puisque, par nature, les nombres sont les premiers des principes mathématiques, c'est dans les nombres qu'ils pensaient voir de nombreuses similitudes avec les êtres [...] ».

Cette arithmosophie pythagoricienne va trouver un cadre d'expression idéal en musique : la réalité sensible des phénomènes harmoniques dont ils font la découverte empirique va, en effet, entrer en résonance avec leur désir profond de mathématiser le réel. La structure mathématique de la gamme qui en découle marquera le champ musical pour toujours.

## 1. INTERVALLES NATURELS

Les sons musicaux font naturellement apparaître les harmoniques de la note jouée [**chapitre 1**] ; la distance entre deux harmoniques voisins définit des intervalles naturels dont la signification musicale est importante et que nous présentons ici.

---

<sup>4</sup> Jean-François MATTÉI, *Pythagore et les pythagoriciens*, Paris, Presses Universitaires de France, 1983.

<sup>5</sup> Cité par Jean-François MATTÉI, *op. cit.*

<sup>6</sup> *Nombre* devant être entendu ici dans le sens restrictif de *nombre entier positif*.

### 1.1 Octave (2 : 1)

Les fréquences de l'harmonique 2 et du fondamental sont dans un rapport 2 : 1. Deux sons dont les hauteurs sont dans ce rapport sont dits *équisonants* : ils ont la même identité musicale et leur harmonie est parfaite... mais sans grand intérêt musical.

**L'intervalle séparant les deux sons est ce que nous appelons aujourd'hui une octave.**

Un son pur de fréquence  $f_0$  et un autre de fréquence  $2f_0$  sont séparés par une octave. Mais deux sons complexes dont les fondamentaux sont respectivement  $f_0$  et  $2f_0$  sont séparés par le même intervalle. On notera que tous les harmoniques du second ( $2f_0, 4f_0, 6f_0$ ) sont aussi des harmoniques du premier et que la période du premier ( $T$ ) est double de la période du second ( $1/(2f_0) = T/2$ ). Lorsqu'on les joue conjointement ces deux sons s'interpénètrent donc avec facilité ce qui explique leur harmonie parfaite (voir plus loin, le chapitre 7).

L'équivalence de deux sons séparés par une ou plusieurs octaves est une propriété fondamentale de notre système auditif et semble être un fait physique et physiologique et non culturel : deux voix, l'une féminine et l'autre masculine, chantent souvent naturellement à l'octave<sup>7</sup> et une voix enfantine est fréquemment placée une à deux octaves plus haut que celle d'un adulte.

Le caractère équisonnant de deux notes séparées par une octave justifie le fait qu'on désigne ces deux notes par le même nom ; elles ont la même valeur harmonique et jouent des rôles (en un sens) interchangeables.

---

<sup>7</sup> Cette différence est liée à la taille des cordes vocales, plus courtes chez la femme que chez l'homme. Les cavités résonantes du système laryngo-buccal, plus grandes également chez l'homme que chez la femme, renforcent la part des fréquences basses dans la voix masculine.

Insistons encore sur le fait que la mesure pertinente de la distance entre deux notes n'est pas la différence de leurs fréquences fondamentales mais leur rapport. L'octave de  $f_0$  est  $2f_0$ ; l'octave de  $2f_0$  est  $4f_0$ , l'octave de  $4f_0$  est  $8f_0$ . **Notre oreille n'est pas sensible à un accroissement absolu de la fréquence mais à un accroissement relatif de celle-ci.**

### 1.2 Quinte (3 :2)

Les fréquences des harmoniques 2 et 3 sont dans un rapport 3 :2. **L'intervalle qui les sépare est ce que nous appelons aujourd'hui une quinte juste.**

Bien que légèrement moins harmonieuse que l'octave, la quinte est l'élément fondateur de la musique. Deux notes séparées par une quinte sont clairement distinctes mais se complètent admirablement. Les deux notes possèdent des harmoniques communs (6, 12, 18) alors que d'autres restent propres à l'une (2, 4, 8, 10, 14, 16) ou à l'autre (3, 9, 15) note. Les harmoniques communes unissent les deux notes, les harmoniques propres leurs permettent de garder leur identité.

Les périodes des deux sons sont également dans un rapport 2 :3 et deux périodes de l'harmonique 2 couvrent exactement trois périodes de l'harmonique 3 soit la période du fondamental :

$$2 \times \frac{1}{2f_0} = 3 \times \frac{1}{3f_0} = \frac{1}{f_0} = T_0$$

### 1.3 Quarte (4 :3) et tierce juste (5 :4)

Les fréquences des harmoniques 4 et 3 sont dans un rapport 4 :3. **L'intervalle qui les sépare est ce que nous appelons aujourd'hui une quarte juste.** Les harmoniques communes sont plus rares (12  $f_0$ ,

$24f_0$ ) et il faut trois périodes de l'un pour couvrir quatre périodes de l'autre. On perçoit intuitivement que, l'ordre des rapports de fréquence augmentant, on s'éloigne progressivement d'une consonance idéale ; la quinte offrait le départ minimal de l'équisonance, la quarte s'en éloigne un peu plus.

Les fréquences des harmoniques 5 et 4 sont dans un rapport 5 : 4. **L'intervalle qui les sépare est ce que nous appelons aujourd'hui une tierce juste.** Ce dernier intervalle ne fait pas partie du vocabulaire musical courant, et pour cause : il sera ignoré dans la construction de la gamme de Pythagore. Nous le retrouverons toutefois dans l'étude de la gamme de Zarlino et des tempéraments mésotoniques au **chapitre 6**.

On pourrait bien entendu continuer indéfiniment la présentation de ces intervalles naturels (6 : 5, 7 : 6, 8 : 7, 9 : 8...). On pourrait également s'intéresser au rapport de fréquence de deux harmoniques non consécutifs. À cet égard on peut noter que ces rapports s'obtiennent par simple multiplication des rapports associés à toutes les étapes intermédiaires. Ainsi par exemple :

$$\frac{9}{4} = \frac{9}{8} \times \frac{8}{7} \times \frac{7}{6} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{4}$$

Certains intervalles naturels de ce type apparaîtront dans la suite du livre, que ce soit dans l'étude de la gamme de Pythagore ou dans celle de Zarlino.

## 2. LES EXPÉRIENCES DE PYTHAGORE ET PHILOLAOS

La gravure représentée à la **Figure 21** montre Pythagore et Philolaos étudiant l'harmonie de sons produits par différentes cloches, verres remplis d'eau, cordes tendues et roseaux évidés. La taille des

cloches, le taux de remplissage des verres, la tension des cordes et la longueur des tubes sont choisis de manière à produire des sons dont les fréquences<sup>8</sup> sont 4f, 6f, 8f, 9f, 12f et 16f (f étant une référence arbitraire). Ces expériences font ressortir les intervalles naturels vus précédemment :

- ▷ l'octave (2/1) :  $8/4 = 12/6 = 16/8$  ;
- ▷ la quinte (3/2) :  $6/4 = 9/6 = 12/8$  ;
- ▷ la quarte (4/3) :  $8/6 = 12/9 = 16/12$  ;

et des combinaisons de ceux-ci :

- ▷ une double quinte<sup>9</sup> :  $9/4 = 3/2 \times 3/2$  ;
- ▷ une double quinte baissée d'une octave :  $9/8 = 9/4 \times 1/2$  ;
- ▷ une quinte augmentée d'une octave :  $12/4 = 3/2 \times 2$  ;
- ▷ une double octave :  $16/4 = 2 \times 2$  ;
- ▷ une quarte augmentée d'une octave :  $16/6 = 4/3 \times 2$  ;
- ▷ une double quarte :  $16/9 = 4/3 \times 4/3$ .

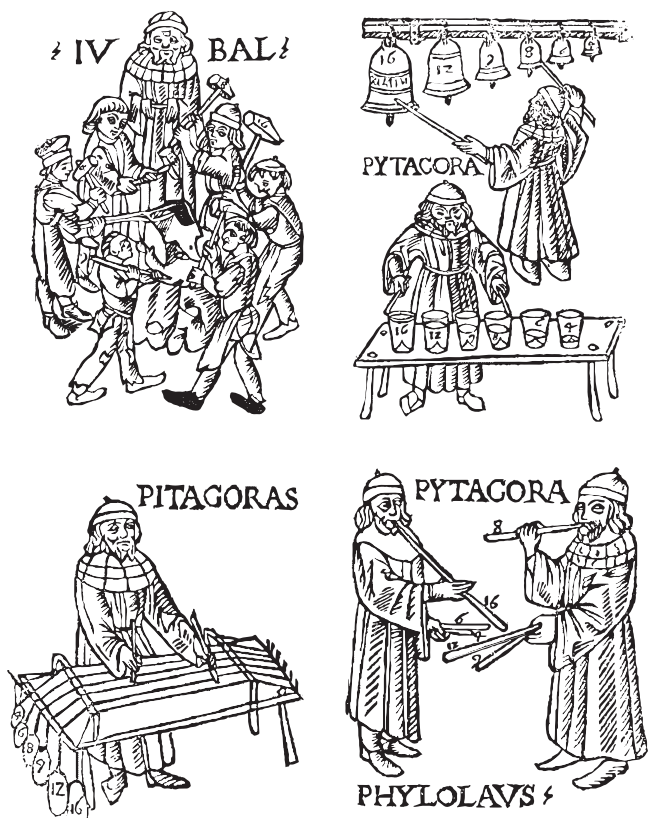
Les nombres choisis par Pythagore et Philolaos ont une particularité importante ; ils sont tous engendrés par les nombres 2 et 3 :

- ▷  $4 = 2 \times 2$  ;

<sup>8</sup> La **Figure 21** peut donner l'impression que les nombres 4, 6, 8, 9 et 12 représentent le poids tendant les cordes, le volume d'eau dans les verres ou la taille des cloches ; il n'en est rien. La fréquence de vibration d'une corde est proportionnelle, toutes choses étant égales par ailleurs, à la racine carrée de la tension à laquelle elle est soumise. La fréquence de vibration d'un verre varie de manière non-proportionnelle avec le volume d'eau qu'il contient et décroît d'ailleurs quand ce volume augmente, contrairement à l'indication du dessin. Le fondamental d'une cloche est, enfin, une fonction complexe de ses dimensions. Les nombres 4, 6, 8, 9 et 12 doivent donc bien être interprétés comme des indicateurs de la fréquence produite. Sous certaines hypothèses on peut toutefois considérer qu'ils sont également représentatifs de la longueur des roseaux dans la quatrième vignette.

<sup>9</sup> Le rapport de fréquence correspondant à la combinaison de deux intervalles est le produit des rapports de fréquences des deux intervalles qu'on combine.





**Figure 21** — Gravures tirées du traité *Theorica Musicale* (Milan, 1492) de **Franchini Gafurio** (Lodi, 1451 – Milan, 1522). Elles représentent Pythagore en train de démontrer sa théorie de l'essence mathématique de la musique à l'aide de cloches, de verres d'eau, de cordes et de tubes. La première vignette évoque la figure biblique de Iubal (Jubal), fils d'Ada et frère de Jabal (Jubal fut le père de tous ceux qui jouent de la cithare et de la flûte, Genèse 4:21) et montre le chaos auquel Pythagore a mis bon ordre. La dernière vignette fait apparaître Philolaos de Crotone, élève de Pythagore et futur maître de Démocrite.

- ▷  $6 = 2 \times 3$ ;
- ▷  $8 = 2 \times 2 \times 2$ ;
- ▷  $9 = 3 \times 3$ ;
- ▷  $12 = 2 \times 2 \times 3$ ;
- ▷  $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ .

La combinaison du premier nombre pair, que les pythagoriciens voient « femelle », et du premier nombre impair<sup>10</sup>, qu'ils voient « mâle », sera féconde : elle va engendrer notre gamme musicale occidentale.

### LE TÉTRACORDE DE MERCURE

Hermès conçut la première lyre en utilisant la carapace d'une tortue comme caisse de résonance. Il usa de son chant pour apaiser son frère Apollon, dont il avait distrait le troupeau. Hermès fera d'ailleurs don de sa lyre à Apollon, dont elle deviendra un des attributs. C'est Amphion, autre fils de Zeus, qui aurait ajouté à la lyre des cordes supplémentaires.

Boèce\* nous enseigne que la lyre archaïque était accordée de manière à produire les intervalles d'octave (cordes 1 et 4), de quarte (cordes 1 et 2 ou 3 et 4) et de quinte (cordes 1 et 3 ou 2 et 4). Il n'évoque pas la seconde majeure (cordes 2 et 3) qui est en fait une double quinte ramenée dans l'octave.

\* **Anicius Manlius Severinus Boethius** dit Boèce, est un philosophe et homme politique romain du cinquième siècle. Le traité en cinq livres qu'il publie sous le titre *De institutione musica* (*l'institution musicale*) en 510 ap. J.-C. contient de nombreuses intuitions et nous transmet l'essentiel de la théorie musicale de l'antiquité grecque. La source principale de ce livre serait l'*Introduction à la musique* de **Nicomaque de Gêrase** (II<sup>e</sup> siècle de notre ère).

<sup>10</sup> Pour les pythagoriciens l'unité n'est ni paire, ni impaire ; elle est l'élément fondateur qui engendre, par accumulation, tous les autres nombres.

En termes de fréquence, la lyre archaïque aurait donc été accordée de manière à produire les fréquences 6f, 8f, 9f et 12f (fétant une référence arbitraire) soit 4 des 6 nombres étudiés par Pythagore [Figure 21].

En termes de notes on pourrait par exemple accorder la lyre en La-Ré-Mi-La.



**Figure 22** — Lyre tétracorde archaïque.  
Taylor Coxon, *Pluck, Pluck, Pluck the Past: the Lyre Then and Now*, World Music, University of Mary Washington, 2013.

### 3. SÉQUENCES ET GAMMES

Appelons *séquence* une suite de sons dont les fréquences sont dans des rapports déterminés. La première note de la séquence sera appelée tonique ; sa fréquence servira de référence.

À partir des intervalles naturels découverts par Pythagore on peut créer plusieurs séquences :

- ▷ une suite d'octaves : 1, 2, 4, 8, 16 fois la fréquence de référence ;
- ▷ une suite de quinte : 1,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ ,  $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} =$

27/8... fois la fréquence de référence ;

- ▷ une suite de quarte : 1,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$ ,  $\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$ ... fois la fréquence de référence.

Ces séquences sont autant d'escaliers, plus ou moins escarpés, permettant de parcourir de manière ordonnée l'échelle des sons.

Nous appellerons par la suite *fréquence réduite* le coefficient par lequel il faut multiplier la fréquence de la tonique pour trouver la fréquence de la note considérée. Ainsi, pour une tonique donnée de fréquence  $f$ , l'octave a une fréquence  $2f$  et la quinte une fréquence  $3f/2$ . La fréquence réduite de la tonique sera 1, celle de l'octave sera 2 et enfin celle de la quinte  $3/2$ . Notons que le rapport des fréquences de deux notes est aussi égal au rapport de leurs fréquences réduites.

Une *gamme* est une séquence dont les fréquences réduites sont comprises entre 1 et 2 c'est-à-dire dont la fréquence est comprise entre la fréquence de référence de la tonique et le double de cette fréquence, soit l'octave de la tonique. C'est donc un escalier qui permet de monter une octave. La gamme doit, *a priori*, obéir à des contraintes contradictoires :

- ▷ les degrés doivent être suffisamment espacés pour qu'on les distingue nettement mais doivent aussi être suffisamment nombreux pour offrir un découpage fin de l'octave ;
- ▷ les degrés devraient être régulièrement espacés mais, si l'on veut monter l'escalier trois marches à la fois ou quatre à quatre, il faudrait que les intervalles correspondants coïncident avec des intervalles justes (quinte, quarte, tierce).

#### 4. FA, SOL, LA, SI, DO, RÉ, MI, FA

Pythagore construit sa gamme de la manière suivante<sup>11</sup>. Il considère six notes dont les fréquences réduites sont les puissances<sup>12</sup> successives de 3 et les place aux côtés de la tonique (1) et de l'octave (2) :

$$1 \qquad 3 \qquad 3^2 \qquad 3^3 \qquad 3^4 \qquad 3^5 \qquad 3^6 \qquad 2$$

Il divise les fréquences réduites par la puissance de 2 qui convient de manière à les ramener toutes dans l'intervalle  $[1,2]$ <sup>13</sup> :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3^2}{2^3} & \frac{3^3}{2^4} & \frac{3^4}{2^6} & \frac{3^5}{2^7} & \frac{3^6}{2^9} & 2 \\ (1,000) & (1,500) & (1,125) & (1,688) & (1,266) & (1,898) & (1,424) & (2,000) \end{array}$$

Il classe les fréquences réduites dans l'ordre croissant :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \frac{3^2}{2^3} & \frac{3^4}{2^6} & \frac{3^6}{2^9} & \frac{3}{2} & \frac{3^3}{2^4} & \frac{3^5}{2^7} & 2 \\ (1,000) & (1,125) & (1,266) & (1,424) & (1,500) & (1,688) & (1,898) & (2,000) \end{array}$$

et calcule le rapport entre les fréquences des degrés successifs :

$$1 \quad \curvearrowright \frac{3^2}{2^3} \quad \curvearrowright \frac{3^2}{2^3} \quad \curvearrowright \frac{3^4}{2^6} \quad \curvearrowright \frac{3^6}{2^9} \quad \curvearrowright \frac{3}{2} \quad \curvearrowright \frac{3^3}{2^4} \quad \curvearrowright \frac{3^2}{2^3} \quad \curvearrowright \frac{3^5}{2^7} \quad \curvearrowright \frac{2^8}{3^5} \quad 2$$

<sup>11</sup> Il s'agit de suivre *conceptuellement* sa démarche et non de procéder à une reconstitution historique du processus empirique ou intellectuel suivi.

<sup>12</sup> La notation  $3^n$  indique la multiplication du nombre 3 n fois par lui-même :  $3^2 = 3 \times 3 = 9$ ,  $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ . Voir, pour plus de détails, la note mathématique sur les puissances et la notation exponentielle en fin de chapitre (12.1).

<sup>13</sup> On peut aisément trouver la puissance qui convient par simple tâtonnement : il suffit de diviser par deux autant de fois qu'il le faut pour tomber dans l'intervalle choisi. On peut toutefois trouver immédiatement le bon exposant en recourant aux logarithmes ; ce concept est rappelé dans une note mathématique en fin de chapitre (12.2).

On observe que ces rapports ne prennent que **deux valeurs distinctes**. Le premier intervalle, caractérisé par un rapport de fréquence de  $3^2/2^3=9/8$  est appelé un ton. C'est aussi une double quinte ramenée dans l'octave :  $3/2 \times 3/2 \times 1/2$ . C'est enfin un intervalle juste, baptisé seconde, qui est le rapport des harmoniques 9 et 8 d'un fondamental. Le second intervalle, caractérisé par un rapport de fréquence de  $2^8/3^5=256/243$  est appelé un *demi-ton diatonique*.

La séquence rencontrée en montant la gamme (ton, ton, ton, demi-ton, ton, ton, demi-ton) évoque la séquence des notes Fa, Sol, La, Si, Do, Ré, Mi, Fa et, effectivement, si la fréquence de la tonique est celle d'un Fa, les sons suivants donneront bien Sol, La, Si, Do, Ré, Mi, Fa. **Notre gamme occidentale est née !**



À ce stade nous pouvons déjà tirer les conclusions suivantes :

- ▷ Les intervalles qui apparaissent dans notre gamme occidentale classique (Fa-Sol-La-Si-Do-Ré-Mi-Fa) ne sont pas le résultat d'un choix arbitraire ; ils apparaissent naturellement lorsqu'on étudie des sons dont les fréquences sont des puissances de 3 ramenées dans l'octave.
- ▷ Les degrés de la gamme sont séparés par un ton ou par un demi-ton diatonique, ces derniers étant situés entre Mi et Fa et entre Si et Do. L'intervalle correspondant à un ton est une seconde majeure ; il est caractérisé par un rapport de fréquence de  $9/8$ . L'intervalle d'un demi-ton diatonique est une

seconde mineure ; le rapport de fréquence correspondant est  $256/243$ .

Rappelons une dernière fois que l'intervalle qui sépare deux notes de fréquences différentes est défini par le rapport de ces fréquences et non par leur *différence*. Il y a ainsi le même intervalle entre 1 et 3 qu'entre 3 et 9 ou entre 9 et 27. Si on considère en revanche les fréquences 1, 2 et 3 on trouve une octave entre 1 et 2 et un intervalle plus petit, une quinte juste, entre 2 et 3.

## 5. DIÈSES ET GAMME CHROMATIQUE ASCENDANTE

Nous avons obtenu la gamme diatonique en analysant les puissances successives de 3 et en les ramenant dans l'octave. Si nous reprenons le même processus mais le poussons simplement plus loin en considérant 13 notes nous allons voir apparaître la gamme chromatique.

On prend une série de 12 sons dont les fréquences réduites sont les puissances successives de 3 et on y ajoute un treizième son de fréquence réduite 2 :

$$1 \quad 3 \quad 3^2 \quad 3^3 \quad 3^4 \quad 3^5 \quad 3^6 \quad 3^7 \quad 3^8 \quad 3^9 \quad 3^{10} \quad 3^{11} \quad 2$$

On ramène toutes les fréquences dans l'intervalle  $[1,2]$  en les divisant par la puissance de deux qui convient :

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3^2}{2^3} \quad \frac{3^3}{2^4} \quad \frac{3^4}{2^6} \quad \frac{3^5}{2^7} \quad \frac{3^6}{2^9} \quad \frac{3^7}{2^{11}} \quad \frac{3^8}{2^{12}} \quad \frac{3^9}{2^{14}} \quad \frac{3^{10}}{2^{15}} \quad \frac{3^{11}}{2^{17}} \quad 2$$

On classe les fréquences dans l'ordre croissant :

$$1 \quad \frac{3^7}{2^{11}} \quad \frac{3^2}{2^3} \quad \frac{3^9}{2^{14}} \quad \frac{3^4}{2^6} \quad \frac{3^{11}}{2^{17}} \quad \frac{3^6}{2^9} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3^8}{2^{12}} \quad \frac{3^3}{2^4} \quad \frac{3^{10}}{2^{15}} \quad \frac{3^5}{2^7} \quad 2$$

On calcule l'intervalle entre deux degrés successifs :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & \curvearrowright & \frac{3^7}{2^{11}} & \curvearrowright & \frac{3^2}{2^3} & \curvearrowright & \frac{3^9}{2^{14}} & \curvearrowright & \frac{3^4}{2^6} & \curvearrowright & \frac{3^{11}}{2^{17}} & \curvearrowright & \frac{3^6}{2^9} & \dots \\
 & & \frac{3^7}{2^{11}} & & \frac{2^8}{3^5} & & \frac{3^7}{2^{11}} & & \frac{2^8}{3^5} & & \frac{3^7}{2^{11}} & & \frac{2^8}{3^5} & \\
 \dots & & \frac{3^6}{2^9} & \curvearrowright & \frac{3}{2} & \curvearrowright & \frac{3^8}{2^{12}} & \curvearrowright & \frac{3^3}{2^4} & \curvearrowright & \frac{3^{10}}{2^{15}} & \curvearrowright & \frac{3^5}{2^7} & \curvearrowright & 2
 \end{array}$$

On observe que les rapports entre les fréquences réduites successives ne prennent que deux valeurs différentes. Le premier intervalle ( $3^7/2^{11}$ ) est appelé *demi-ton chromatique*; il complète le *demi-ton diatonique* déjà rencontré ( $2^8/3^5$ ).

Les notes engendrées par le schéma ci-dessus forment maintenant la gamme chromatique complète : Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La#, Si, Do, Do#, Ré, Ré#, Mi, Fa.



## 6. BÉMOLS ET GAMME CHROMATIQUE DESCENDANTE

Pour construire la gamme chromatique ascendante et introduire les dièses nous avons pris les onze premières puissances positives de 3 ( $3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^{11}$ ) et complété par l'octave (2). Considérons maintenant les puissances négatives<sup>14</sup> de 3.

On prend une série de 12 sons dont les fréquences réduites sont

<sup>14</sup> Comme expliqué à la note mathématique 12.1.3, un nombre élevé à une puissance négative est égal à l'inverse de ce nombre élevé à la puissance positive correspondante. Par exemple :  $3^{-n} = 1/(3^n)$ .



les puissances successives (négatives) de 3 et on y ajoute un treizième son de fréquence réduite 2 :

$$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3^2} \quad \frac{1}{3^3} \quad \frac{1}{3^4} \quad \frac{1}{3^5} \quad \frac{1}{3^6} \quad \frac{1}{3^7} \quad \frac{1}{3^8} \quad \frac{1}{3^9} \quad \frac{1}{3^{10}} \quad \frac{1}{3^{11}} \quad 2$$

On ramène toutes les fréquences dans l'intervalle [1,2] en les **multipliant**<sup>15</sup> par la puissance de deux qui convient :

$$1 \quad \frac{2^{12}}{3} \quad \frac{2^4}{3^2} \quad \frac{2^5}{3^3} \quad \frac{2^7}{3^4} \quad \frac{2^8}{3^5} \quad \frac{2^{10}}{3^6} \quad \frac{2^{12}}{3^7} \quad \frac{2^{13}}{3^8} \quad \frac{2^{15}}{3^9} \quad \frac{2^{16}}{3^{10}} \quad \frac{2^{18}}{3^{11}} \quad 2$$

On classe les fréquences dans l'ordre **décroissant** :

$$2 \quad \frac{2^{12}}{3^7} \quad \frac{2^4}{3^2} \quad \frac{2^{15}}{3^9} \quad \frac{2^7}{3^4} \quad \frac{2^{18}}{3^{11}} \quad \frac{2^{10}}{3^6} \quad \frac{2^2}{3} \quad \frac{2^{13}}{3^8} \quad \frac{2^5}{3^3} \quad \frac{2^{16}}{3^{10}} \quad \frac{2^8}{3^5} \quad 1$$

On calcule l'intervalle entre deux degrés successifs :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 2 & \curvearrowright & \frac{2^{12}}{3^7} & \curvearrowright & \frac{2^4}{3^2} & \curvearrowright & \frac{2^{15}}{3^9} & \curvearrowright & \frac{2^7}{3^4} & \curvearrowright & \frac{2^{18}}{3^{11}} & \curvearrowright & \frac{2^{10}}{3^6} & \dots \\ & & \frac{3^7}{2^{11}} & & \frac{2^8}{3^5} & & \frac{3^7}{2^{11}} & & \frac{2^8}{3^5} & & \frac{3^7}{2^{11}} & & \frac{2^8}{3^5} & \\ \dots & & \frac{2^{10}}{3^6} & \curvearrowright & \frac{2^2}{3} & \curvearrowright & \frac{2^{13}}{3^8} & \curvearrowright & \frac{2^5}{3^3} & \curvearrowright & \frac{2^{16}}{3^{10}} & \curvearrowright & \frac{2^8}{3^5} & \curvearrowright & 1 \\ & & & & \frac{2^8}{3^5} & & \frac{3^7}{2^{11}} & & \frac{2^8}{3^5} & & \frac{3^7}{2^{11}} & & \frac{2^8}{3^5} & & \frac{2^8}{3^5} \end{array}$$

On trouve (évidemment) les mêmes rapports entre fréquences réduites successives que dans la gamme chromatique ascendante. Les notes engendrées par le schéma ci-dessus forment la gamme chromatique descendante: Si, Sib, La, Lab, Sol, Solb, Fa, Mi, Mib, Ré, Réb, Do, Si.



<sup>15</sup> Les puissances de 1/3 donnent des fréquences réduites plus petites que celle de la tonique et doivent donc être remontées d'une ou plusieurs octaves pour se situer entre tonique et octave.

## CE REMARQUABLE NOMBRE 12

La découpe en douze intervalles présente de nombreux avantages. Elle crée d'abord une gamme comptant un nombre gérable de degrés et ceux-ci ne sont séparés que par deux types d'intervalles dont les amplitudes sont par ailleurs très proches (demi-tons chromatiques et diatoniques). Nous verrons que peu de nombre ont cette dernière propriété.

La gamme chromatique à 12 degrés présente une autre propriété remarquable qui, à elle seule, pourrait presque en justifier l'usage. Le nombre 12 possède en effet de nombreux diviseurs entiers : 1, 2, 3, 4, 6 et 12. On dit que 12 est *hautement composé* : il a plus de diviseurs que tous les nombres qui le précèdent. On peut aisément montrer qu'aucun nombre supérieur à 12 ne possède, relativement à ce nombre lui-même, plus de diviseurs entiers. Cette propriété de divisibilité d'une suite de 12 notes en groupes de 1, 2, 3, 4 et 6 notes a été largement exploitée dans la musique dodécaphonique ou sérielle.

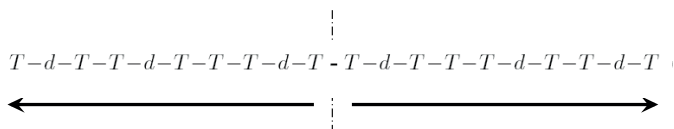
Douze est un nombre aux propriétés multiples ; il est ainsi panarithmique (tout nombre compris entre 1 et 12 est la somme de diviseurs de 12 ; par exemple :  $5 = 4 + 1$  ou  $7 = 4 + 3$ ), hétéromérique (produit de deux entiers consécutifs :  $3 \times 4$ ) et la superfactorielle de 3 ( $12 = 1! \times 2! \times 3!$ ).

C'est aussi un nombre aux usages multiples : on vend les huîtres par douzaine, il y a douze heures dans la journée, douze mois dans l'année et douze signes du zodiaque, Hercule accomplit douze travaux, Jésus eut douze apôtres et Jacob douze fils qui fondèrent les douze tribus d'Israël. La poésie, qui est la musique des mots, fait également bon usage du nombre douze :

*Le nombre douze m'êmeut par son ubiquité,  
Tout bel alexandrin contient deux fois six pieds !*

## 7. SYMÉTRIES DE LA GAMME

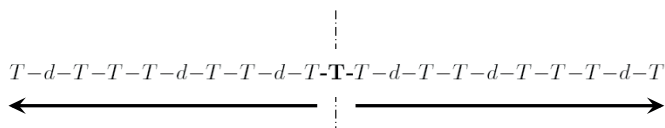
La gamme ainsi créée présente une double symétrie. La première se situe sur Ré entre les deux tons de la tierce Do-Mi :



On en déduit que les gammes montantes et descendantes débutant sur Ré<sup>16</sup> rencontrent les mêmes intervalles :

Ré	$\xrightarrow{T}$	Mi	$\xrightarrow{d}$	Fa	$\xrightarrow{T}$	Sol	$\xrightarrow{T}$	La	$\xrightarrow{T}$	Si	$\xrightarrow{d}$	Do	$\xrightarrow{T}$	Ré
Ré	$\xrightarrow{T}$	Do	$\xrightarrow{d}$	Si	$\xrightarrow{T}$	La	$\xrightarrow{T}$	Sol	$\xrightarrow{T}$	Fa	$\xrightarrow{d}$	Mi	$\xrightarrow{T}$	Ré

La seconde symétrie est sur le ton central de la quarte triton Fa-Si :



Deux gammes, l'une montante et l'autre descendante, dont les toniques sont situées symétriquement par rapport à cet intervalle seront donc caractérisées par la même suite d'intervalles ; c'est par exemple le cas pour les gammes ascendante de Fa et descendante de Si :

Fa	$\xrightarrow{T}$	Sol	$\xrightarrow{T}$	La	$\xrightarrow{T}$	Si	$\xrightarrow{d}$	Do	$\xrightarrow{T}$	Ré	$\xrightarrow{T}$	Mi	$\xrightarrow{d}$	Fa
Si	$\xrightarrow{T}$	La	$\xrightarrow{T}$	Sol	$\xrightarrow{T}$	Fa	$\xrightarrow{d}$	Mi	$\xrightarrow{T}$	Ré	$\xrightarrow{T}$	Do	$\xrightarrow{d}$	Si

<sup>16</sup> Même remarque que précédemment : il ne s'agit pas de la gamme de Ré majeur ou mineur mais de la gamme commençant sur Ré et suivant les intervalles tels qu'ils apparaissent dans la construction de Pythagore. Techniquement on parle d'une gamme de Ré en mode de Ré ou d'une gamme de Ré en mode dorien. Les notions de modes et les règles de transposition seront présentées au chapitre suivant.

## 8. INTERVALLES ET FRÉQUENCES

À partir de la fréquence réduite des degrés de la gamme chromatique, on peut facilement calculer le rapport de fréquence correspondant à tous les intervalles [Figure 23].

Nom de l'intervalle	Exemple	Contenu (c, d, T)	Rapport de fréquence	
Seconde mineure	Mi-Fa	d	$2^8/3^5$	1.053
Demi-ton chromatique	Do-Do <sup>#</sup>	c	$3^7/2^{11}$	1.068
Seconde majeure	Do-Ré	T	$3^2/2^3$	1.125
Tierce mineure	Ré-Fa	T+d	$2^5/3^3$	1.185
Tierce majeure	Do-Mi	2T	$3^4/2^6$	1.266
Quarte juste	Do-Fa	2T+d	$2^2/3$	1.333
Quinte diminuée	Si-Fa	2T+2d	$2^{10}/3^6$	1.405
Quarte triton (augmentée)	Fa-Si	3T	$3^6/2^9$	1.424
Quinte juste	Do-Sol	3T+d	$3/2$	1.500
Sixte mineure	Mi-Do	3T+2d	$2^7/3^4$	1.580
Sixte majeure	Fa-Ré	4T+d	$3^3/2^4$	1.688
Septième mineure	Si-La	4T+2d	$2^4/3^2$	1.778
Septième majeure	Do-Si	5T+d	$3^5/2^7$	1.898
Octave	Do-Do	5T+2d	2	2.000

**Figure 23** — Rapports de fréquences définissant les différents intervalles ascendants. Les intervalles descendants sont caractérisés par le rapport inverse (la quarte juste descendante Do-Sol est par exemple caractérisée par le rapport de fréquence  $3/4$ ). Seuls quelques intervalles diminués sont indiqués à titre d'exemple.

## 9. FRÉQUENCES RÉELLES ET FRÉQUENCES RÉDUITES

La fréquence réelle s'obtient en multipliant la fréquence réduite par une fréquence de référence. Celle-ci est arbitraire mais a été conventionnellement choisie telle que le La du milieu du clavier d'un piano ait une fréquence de 440 Hz [Figure 25, page suivante]. Une fois ce choix posé on peut facilement calculer la fréquence réelle des autres notes de la gamme [Figure 24].

Fa	Fa <sup>#</sup>	Sol	Sol <sup>#</sup>	La	La <sup>#</sup>	...
1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	...
347.65	371.25	391.11	417.66	440.00	469.86	...

Si	Do	Do <sup>#</sup>	Ré	Ré <sup>#</sup>	Mi	Fa
$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2
495.00	521.48	556.88	586.67	626.48	660.00	695.31

**Figure 24** — Notes (ligne 1), fréquences réduites (ligne 2) et fréquences réelles (ligne 3).

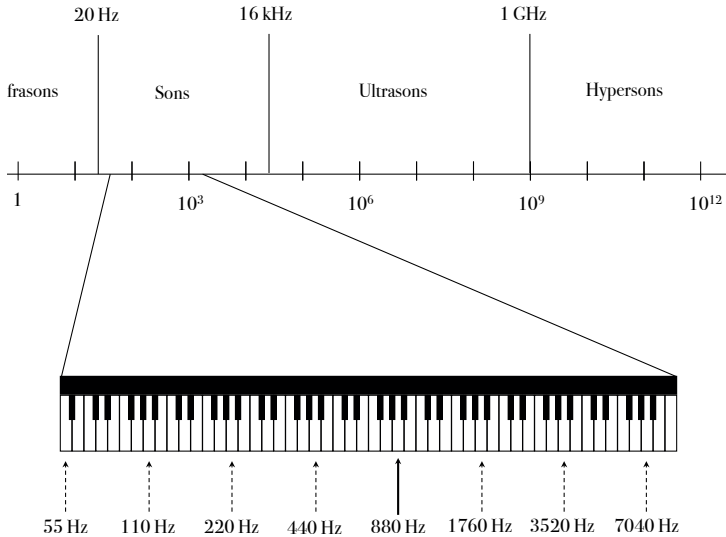
## 10. ENHARMONIE, COMA ET FEINTES BRISÉES

Le rapport de fréquence entre un demi-ton chromatique et un demi-ton diatonique est le coma pythagoricien :

$$\frac{\frac{3^7}{2^{11}}}{\frac{2^8}{3^5}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \simeq 1,0136$$

La coma est la distance qui sépare deux notes enharmoniques comme Do<sup>#</sup> et Ré<sup>b</sup> par exemple.

On apprend au cours de solfège qu'il y a 4 comas dans un demi-ton diatonique, 5 dans un demi-ton chromatique et 9 dans un ton.



**Figure 25** — Schéma d'un clavier de piano avec indication de la fréquence des notes La(0) à La(7). L'amplitude des fréquences couvertes par le piano est comparée à celle, beaucoup plus large, des phénomènes sonores pris dans leur ensemble qui comporte quatre grands domaines : les infra-sons en dessous de 20 Hz, les sons audibles de 20 à 20.000 Hz, les ultrasons de 20 kHz à 1 GHz (un milliard de Hertz) et les hypersons au delà.

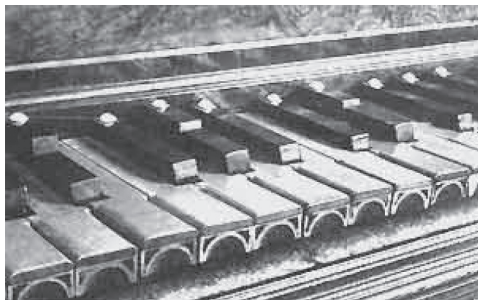
Suivant cette définition il y aurait donc 53 comas dans l'octave ( $5 \times 9 + 2 \times 4$ ). En réalité ces définitions des intervalles élémentaires en termes de comas sont *approximatives* :

$$\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^9 = 1.130 \simeq \frac{9}{8} = 1.125$$

$$\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^4 = 1.056 \simeq \frac{256}{243} = 1.053$$

$$\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^5 = 1.070 \simeq \frac{2187}{2048} = 1.068$$

Aussi faible que soit la différence entre notes enharmoniques, elle peut être musicalement signifiante; c'est pourquoi certains instruments anciens (orgues, virginals, clavecins) dédoublent parfois une ou plusieurs<sup>17</sup> touches noires<sup>18</sup> du clavier de manière à permettre de jouer l'altération juste. Les touches noires s'appelant des *feintes*, ce qui marque d'ailleurs un jugement péjoratif des premiers théoriciens sur ces notes altérées, on parle de clavier à feintes brisées<sup>19</sup> [Figure 26].



**Figure 26** — Clavier à feintes brisées de l'orgue de la basilique de San Petronio, à Bologne.

## 11. LA GAMME PENTATONIQUE

Nous avons introduit la gamme diatonique en prenant une série de 7 notes (plus l'octave); si nous nous étions limités aux cinq premières cordes nous aurions obtenu la gamme pentatonique :

<sup>17</sup> Souvent La#-Si $\flat$  et Ré#-Mi $\flat$ .

<sup>18</sup> La couleur noire est d'usage relativement récent et j'utilise ce terme par facilité en faisant référence au clavier de piano bien connu de tous.

<sup>19</sup> On utilise également les feintes brisées pour raccourcir la première octave d'un clavier et jouer le La et le Si de l'octave inférieure sur la feinte brisée du Do# et du Mi $\flat$  de cette première octave. On appelle ce dispositif clavier à *octave courte*; il présente également l'avantage de permettre de jouer certains accords de basse qui, sans lui, demanderait un empan trop grand.

$$1 \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \frac{3^2}{2^3} \end{array} \quad \frac{3^2}{2^3} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \frac{3^2}{2^3} \end{array} \quad \frac{3^4}{2^6} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \frac{3^2}{2^3} \times \frac{2^8}{3^5} \end{array} \quad \frac{3}{2} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \frac{3^2}{2^3} \end{array} \quad \frac{3^3}{2^4} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \frac{3^2}{2^3} \times \frac{2^8}{3^5} \end{array} \quad 2$$

Cette gamme pentatonique est constituée des intervalles suivants :

$$T \rightarrow T \rightarrow T+d \rightarrow T \rightarrow T+d$$

soit encore (on note 2M la seconde majeure et 3m la tierce mineure) :

$$2M \rightarrow 2M \rightarrow 3m \rightarrow 2M \rightarrow 3m$$

En choisissant Fa# comme tonique nous trouvons la gamme :

$$Fa\# \rightarrow Sol\# \rightarrow La\# \rightarrow Do\# \rightarrow Ré\# \rightarrow Fa\#$$

soit les notes associées aux touches noires du piano. Cette gamme pentatonique a un caractère quasi-universel et on la retrouve dans un très grand nombre de cultures dans toutes les régions du globe. On l'associe intuitivement à la musique chinoise et il suffit en effet de frapper au hasard les touches noires du piano pour percevoir une sonorité distinctement asiatique.

En décalant la suite des intervalles :

$$3m \rightarrow 2M \rightarrow 2M \rightarrow 3m \rightarrow 2M$$

on trouve, en prenant Fa comme tonique, la séquence classique du blues :

$$Fa \rightarrow Lab \rightarrow Sib \rightarrow Do \rightarrow Mib \rightarrow Fa$$



## UNE GAMME BASÉE SUR LE NOMBRE 5 ?

La gamme de Pythagore est construite sur les puissances successives de trois. On pourrait, en principe, construire une gamme sur les puissances successives de tout nombre premier\*.

Une gamme basée sur les puissances de 5 présente par exemple l'avantage de faire apparaître la tierce juste caractérisée par un rapport de fréquences  $5/4$ . Cette gamme a en revanche le grand désavantage de ne produire une décomposition équilibrée\*\* de l'octave que par une décomposition en 28 intervalles ce qui la rendrait, si on voulait l'utiliser, peu maniable. Elle ne produirait par ailleurs pas de quinte juste.

---

\* Un nombre premier n'est divisible que par 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,...

\*\* Par équilibrée nous entendons deux choses. D'une part que les degrés successifs ne soient séparés que par deux types d'intervalles, à l'instar des demi-tons chromatiques et diatoniques. D'autre part que ces intervalles aient des amplitudes proches l'une de l'autre.

## 12. NOTES MATHÉMATIQUES

### 12.1 Exposants et notation exponentielle

#### *Exposants entiers positifs*

La notation  $a^n$  ou « a exposant n », avec n entier, représente le nombre a multiplié n fois par lui-même. Ainsi :

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \times a$$

$$a^3 = a \times a \times a$$

$$a^4 = a \times a \times a \times a$$

On comprend aisément que :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Par exemple :

$$a^2 \times a^5 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a) = a^7$$

$$a \times a^2 = a \times (a \times a) = a^3$$

$$a^2 \times a^2 = (a \times a) \times (a \times a) = a^4$$

### *Exposants fractionnaires*

La racine carrée b d'un nombre a positif est le nombre qui, multiplié deux fois par lui-même, donne a :

$$b = \sqrt{a}$$

$$a = b \times b$$

On voit aisément qu'on peut noter la racine carrée de a comme  $a^{\frac{1}{2}}$  ; en effet :

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$$

Par extension :

- ▷ la racine  $\frac{m}{n}$ ème d'un nombre se note  $a^{\frac{1}{n}}$  ;
- ▷ le nombre  $a^{\frac{m}{n}}$  est le produit de la racine  $\frac{1}{n}$ ème de a m fois par elle-même, par exemple :

$$a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{a}$$

*Exposants négatifs*

Considérons le rapport de deux puissances de  $a$ , par exemple :

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a \times a = a^3$$

On comprend intuitivement qu'on peut généraliser ce résultat de la manière suivante :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

On peut écrire cette relation sous la forme :

$$a^m \times \frac{1}{a^n} = a^{m-n} = a^m \times a^{-n}$$

dont on déduit :

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

*Exposant nul*

Ayant introduit les exposants négatifs il est aisé de démontrer que tout nombre élevé à la puissance nulle donne l'unité :

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = a^0$$

**12.2 Logarithmes**

Cette note mathématique définit le concept important de logarithme, qui sera utilisé à différents endroits du livre, et l'applique au problème qui consiste à trouver le nombre d'octaves dont il faut

descendre un son pour le ramener dans l'octave de départ.

### Définition

Le logarithme<sup>20</sup> en base  $a$  d'un nombre  $b$  est le nombre  $c$  tel que :

$$a^c = b$$

On note :

$$c = \log_a b$$

Les bases les plus communément utilisées sont la base 10 qui donne les logarithmes décimaux (log) et la base  $e$  utilisée dans les logarithmes naturels ou népériens<sup>21</sup> (ln). Trois propriétés importantes des logarithmes sont rappelées ici :

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log(a^n) = n \times \log a$$

### Calcul du bon exposant de 2

Voici comment trouver, sans tâtonner, l'exposant de 2 qui ramène la fréquence réduite d'une note dans l'octave. Pour un exposant  $m$  de 3 donné, on cherche un exposant entier  $n$  de 2 garantissant que :

$$1 \leq \frac{3^m}{2^n} \leq 2$$

<sup>20</sup> Du grec λόγος αριθμός : rapport de nombres.

<sup>21</sup> On désigne par  $e$  le nombre d'Euler :  $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$  où la notation  $n!$  désigne la *factorielle* du nombre  $n$  c'est-à-dire le produit de tous les entiers plus petits ou égaux à  $n$  :  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ .

On va d'abord chercher un nombre  $x$  tel que

$$\frac{3^m}{2^x} = 1$$

soit

$$3^m = 2^x$$

soit encore en prenant le logarithme des deux membres :

$$m \log 3 = x \log 2$$

et finalement

$$x = m \frac{\log 3}{\log 2}$$

L'exposant  $n$  cherché est la partie entière de  $x$ . Exemples :

- ▷ pour  $m = 3$  on trouve  $x = 3 \times \log 3 / \log 2 = 4,75$  et donc  $n = 4$  ;
- ▷ pour  $m = 6$  on trouve  $x = 6 \times \log 3 / \log 2 = 9,51$  et donc  $n = 9$ .

### 13. SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Pythagore construit sa gamme à partir des nombres 2 et 3. Pour se rapprocher du langage musical, on pourrait dire qu'il la construit sur les intervalles d'octave (2) et de douzième (3) ou encore d'octave et de quinte (3/2). En considérant :

- ▷ un son de référence de fréquence réduite unitaire qu'on appelle la tonique ;
- ▷ ce même son octavié (fréquence réduite : 2) ;
- ▷ un certain nombre de sons dont les fréquences réduites sont les puissances successives de 3 divisées par la puissance de 2 qui les ramènent dans l'octave ;

- ▷ le schéma de Pythagore engendre successivement les gammes pentatonique, diatonique et chromatique ascendante. Cette dernière gamme fait apparaître les notes diésées.

Le renversement de la gamme chromatique ascendante engendre la gamme chromatique descendante et introduit les notes bémolisées.

Les degrés de cette gamme chromatique de Pythagore sont séparés par deux intervalles élémentaires :

- ▷ le demi-ton chromatique caractérisé par un rapport de fréquence de  $3^7/2^{11}$  ;
- ▷ le demi-ton diatonique caractérisé par un rapport de fréquence de  $2^8/3^5$ .

Le rapport entre ces deux intervalles définit le coma pythagoricien :  $3^{12}/2^{19}$ . Tout intervalle (seconde, tierce, quarte,...) est défini par un nombre donné de demi-tons chromatiques et diatoniques et apparaît donc aussi comme le rapport d'une puissance de 3 et d'une puissance de 2 ou **vice-versa**<sup>22</sup>.

---

<sup>22</sup> Nous verrons au **chapitre 7** que le fait que ces deux types d'intervalles existent ( $3^m/2^n$  et  $2^p/3^q$ ) joue un rôle très important en harmonie.

## Modes, transpositions, armures

Les élèves du cours de solfège apprennent par cœur les règles suivantes :

- ▷ l'ordre des dièses est Fa, Do, Sol, Ré, La, Mi, Si et l'ordre des bémols est inverse : Si, Mi, La, Ré, Sol, Do, Fa ;
- ▷ pour trouver la tonique d'une gamme majeure portant des dièses à l'armure<sup>1</sup> on prend le dernier dièse et on y ajoute un demi-ton diatonique ;
- ▷ la tonique d'une gamme mineure est une tierce mineure en-dessous de celle de sa relative majeure.

Ces règles apparaissent au profane comme cryptiques voire arbitraires. Nous verrons dans ce chapitre qu'elles sont, on s'en doute, une conséquence logique de la construction de la gamme de Pythagore et qu'elles ont, elles aussi, une base arithmétique.

### 1. MODES MUSICAUX

La construction de Pythagore engendre une gamme de huit notes (en considérant la répétition de la tonique à l'octave) caractérisée par l'alternance de deux types d'intervalles, tons (T) et demi-tons (d) :

---

<sup>1</sup> L'armure est l'indication, à la clé, en début de portée ou d'un groupe de mesures, des altérations qui s'appliquent à toutes les mesures suivantes, jusqu'à un éventuel changement d'armure.

T T T d T T d

Mais on retrouve cette séquence aux octaves inférieures et supérieures, de telle sorte que l'alternance de tons et demi-tons forme une suite continue :

... T d T T T d T T d T T T d T T d T ...

On peut la commencer où on veut et définir ainsi sept séquences différentes :

T	T	T	d	T	T	d													
	T	T	d	T	T	d	T												
		T	d	T	T	d	T	T											
			d	T	T	d	T	T	T										
				T	T	d	T	T	T	d									
					T	d	T	T	T	d	T								
						d	T	T	T	d	T	T							

Quel que soit le point de départ, la combinaison de 5 tons et de deux demi-tons fera toujours une octave :

$$\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^5 \times \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2 = 2$$

Chacune des sept séquences définit un *mode* musical [Figure 27]. On lui donne le nom de la note sur laquelle débute la séquence. L'histoire lui a également donné un qualificatif tiré de la géographie grecque ; le grand théoricien suisse de la musique, *Glareanus*<sup>2</sup> fige, dans son célèbre traité de 1547 (le *Dodekachordon*, Figure 28), une terminologie qui avait,

<sup>2</sup> **Heinrich Loris (Hendricus Loriti)**, dit **Glaréan** ou **Glareanus** (du nom du canton suisse de Glaris dont il est originaire), né en 1488 à Mollis et mort en 1563 à Fribourg en Brisgau dans le Bade-Wurtemberg, où il enseignait depuis 1529, après avoir dû fuir la Suisse par rejet de la Réforme. Élève d'Erasme à Bâle, Glareanus est un humaniste au vaste savoir : au delà de la musique, il est en effet connu pour ses traités de géographie (*De geographia liber unus*) et de mathématiques (*Epitome de sex arithmeticae practicae speciebus*).



Mode	Qualificatif	Séquence
Do	Ionien	T-T-d-T-T-T-d
Ré	Dorien	T-d-T-T-T-d-T
Mi	Phrygien	d-T-T-T-d-T-T
Fa	Lydien	T-T-T-d-T-T-d
Sol	Mixolydien	T-T-d-T-T-d-T
La	Æolien	T-d-T-T-d-T-T
Si	Locrien	d-T-T-d-T-T-T

Figure 27 — Définition des différents modes musicaux.

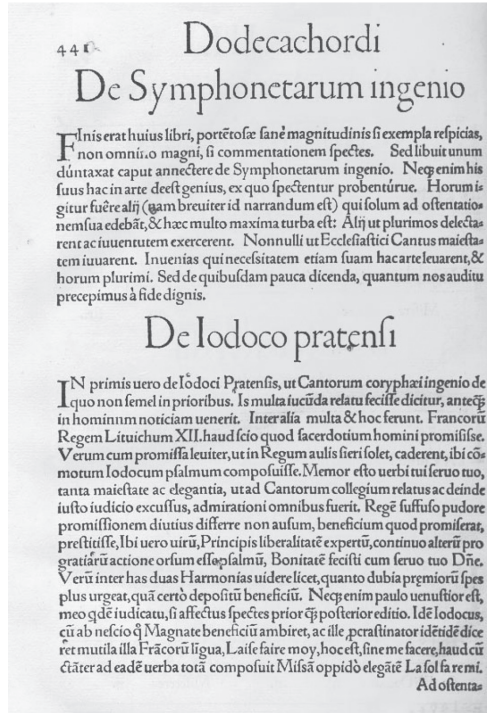


Figure 28 — Une page du *Dodekachordon* de Glareanus.

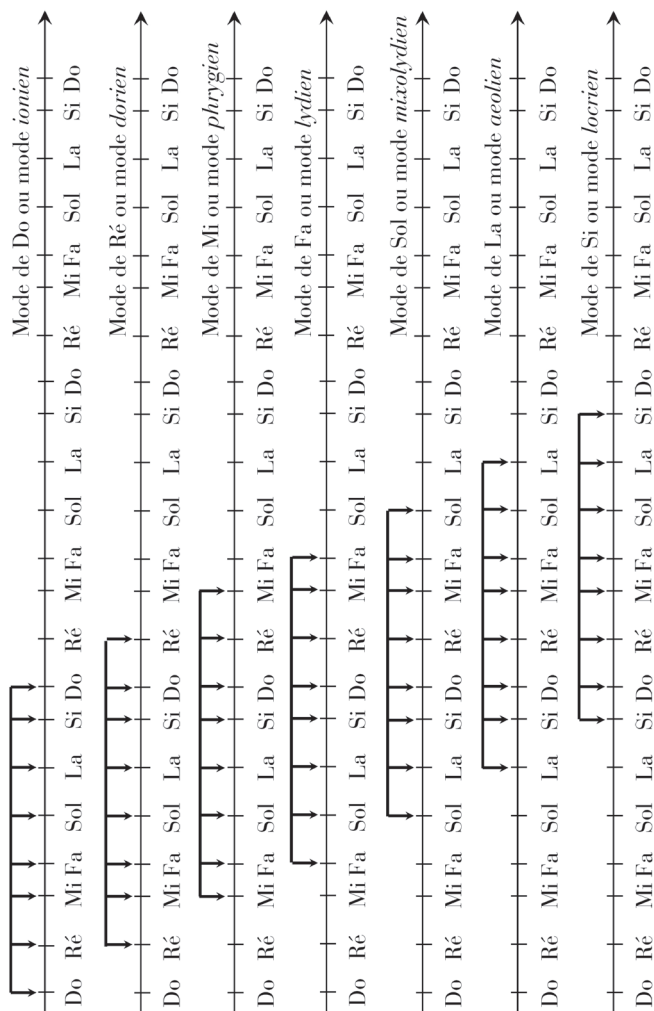
avant lui, connu de multiples déclinaisons.

À chaque mode correspond une gamme naturelle, dépourvue d'altérations, dont les fréquences réduites sont données à la **Figure 29**.

On peut encore se représenter ces modes comme un peigne (on parlera par la suite de gabarit) dont les dents pointent sur les notes de la gamme naturelle associée [**Figure 30**].

Do	T		T		d		T		T		T		d	
1	$\curvearrowright$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\curvearrowright$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^2}{3}$	$\curvearrowright$	$\frac{3}{2}$	$\curvearrowright$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\curvearrowright$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\curvearrowright$	2
		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$
Ré	T		d		T		T		T		d		T	
1	$\curvearrowright$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^2}{3}$	$\curvearrowright$	$\frac{3}{2}$	$\curvearrowright$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\curvearrowright$	2
		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$
Mi	d		T		T		T		d		T		T	
1	$\curvearrowright$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^2}{3}$	$\curvearrowright$	$\frac{3}{2}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\curvearrowright$	2
		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$
Fa	T		T		T		d		T		T		d	
1	$\curvearrowright$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\curvearrowright$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\curvearrowright$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\curvearrowright$	$\frac{3}{2}$	$\curvearrowright$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\curvearrowright$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\curvearrowright$	2
		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$
Sol	T		T		d		T		T		d		T	
1	$\curvearrowright$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\curvearrowright$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^2}{3}$	$\curvearrowright$	$\frac{3}{2}$	$\curvearrowright$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\curvearrowright$	2
		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$
La	T		d		T		T		d		T		T	
1	$\curvearrowright$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^2}{3}$	$\curvearrowright$	$\frac{3}{2}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\curvearrowright$	2
		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$
Si	d		T		T		d		T		T		T	
1	$\curvearrowright$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^2}{3}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^{10}}{3^6}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\curvearrowright$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\curvearrowright$	2
		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^2}{2^3}$

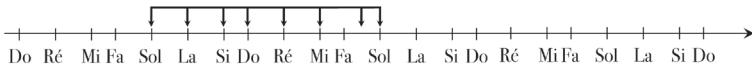
**Figure 29** — Fréquences réduites des gammes naturelles



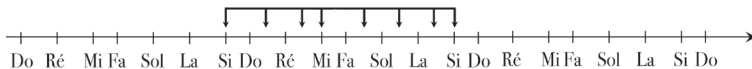
**Figure 30** — Peigne ou gabarit associé aux différents modes. La position des notes sur l'axe est définie par leur fréquence suivant une échelle logarithmique.

## 2. TRANSPOSITIONS

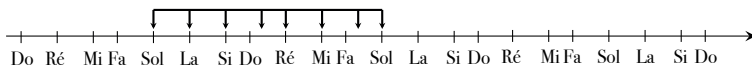
Transposer, c'est faire commencer le gabarit d'un mode sur une autre note que celle qui lui donne son nom. Si nous faisons commencer sur Sol le gabarit du mode de Do, nous voyons qu'il pointe vers les notes Sol, La, Si, Do, Ré, Mi, Fa#, Sol ce qui est la gamme de Sol dans le mode de Do :



Si nous commençons sur Si, le même gabarit pointe vers Si, Do#, Ré#, Mi, Fa#, Sol#, La#, Si (gamme de Si en mode de Do) :



La gamme de Sol lydien est créée en faisant débiter le gabarit du mode de Fa (mode lydien) sur la note Sol (Sol, La, Si, Do#, Ré, Mi, Fa#, Sol) :



On peut donc engendrer quatre-vingt-quatre gammes différentes en combinant chacun des sept modes avec, comme point de départ, n'importe lequel des douze degrés chromatiques ( $7 \times 12 = 84$ ). Tous les modes sont utilisés en musique mais deux modes jouent un rôle particulièrement important :

- ▷ le mode de Do qui engendre les gammes majeures ;
- ▷ le mode de La qui engendre les gammes mineures.

## LE NOM DES DEGRÉS

Les notes successives d'une gamme diatonique sont appelés les degrés de la gamme. Chaque degré est désigné par un chiffre romain et porte un nom conventionnel qui reflète sa position mais aussi son statut particulier au sein de la gamme :

- ▷ le premier degré (I) est la *tonique* au-dessus duquel se place la *sus-tonique* (II) ;
- ▷ le troisième degré (III), une tierce au-dessus de la tonique, est appelé la *médiate* ;
- ▷ le cinquième degré (V), une quinte au-dessus de la tonique, joue un rôle clé et reçoit dès lors le nom de *dominante* ;
- ▷ il est précédé de la sous-dominante (IV) et suivi de la sus-dominante (VI) ;
- ▷ si le septième degré (VII) n'est séparé de l'octave que par un demi-ton diatonique (modes de Do et de Fa) on l'appelle *sensible* alors que s'il en est séparé d'une seconde majeure on l'appelle *sous-tonique*.

## 3. ARMURES À DIÈSES

Reprenons la gamme chromatique (section 3.5) mais laissons les notes dans l'ordre où elles apparaissent naturellement dans la construction de Pythagore, sans les classer par ordre croissant de fréquences<sup>3</sup> :

<sup>3</sup> La valeur décimale de la fréquence réduite est indiquée pour bien montrer qu'il s'agit de notes situées dans l'octave (fréquences réduites comprises entre 1 et 2) et non de la suite des quintes comme le nom des notes le laisse supposer. Les fréquences réduites de la suite des quintes auraient le même numérateur (puissance  $n$  de 3) mais les exposants de 2 seraient identiques aux exposants de 3.

Fa	Do	Sol	Ré	La	Mi	Si
$1$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{3^6}{2^9}$
(1,0000)	(1,5000)	(1,1250)	(1,6875)	(1,2656)	(1,8984)	(1,4238)
Fa $\sharp$	Do $\sharp$	Sol $\sharp$	Ré $\sharp$	La $\sharp$	Mi $\sharp$	Si $\sharp$
$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$
(1,0679)	(1,6018)	(1,2014)	(1,8020)	(1,3515)	(1,0136)	(1,5205)

On observe que les fréquences réduites des notes naturelles sont caractérisées par des puissances de trois allant de zéro<sup>4</sup> à six alors que les notes altérées ont, pour cet exposant, des valeurs supérieures ou égales à sept. La transposition de tous les degrés de la gamme chromatique par une quinte multiplie leurs fréquences par 3/2 :

Do	Sol	Ré	La	Mi	Si	Fa $\sharp$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^4}{2^5}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{3^6}{2^8}$	$\frac{3^7}{2^{10}}$
(1,5000)	(2,2500)	(1,6875)	(2,5313)	(1,8984)	(2,8477)	(2,1357)
Do $\sharp$	Sol $\sharp$	Ré $\sharp$	La $\sharp$	Mi $\sharp$	Si $\sharp$	Fa $\sharp\sharp$
$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^9}{2^{13}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{11}}{2^{16}}$	$\frac{3^{12}}{2^{18}}$	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$	$\frac{3^{14}}{2^{21}}$
(1,6018)	(2,4027)	(1,8020)	(2,7030)	(2,027)	(1,5205)	(2,2807)

Les notes dont l'exposant de 3 était 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 étaient naturelles ; la transposition par une quinte majeure cet exposant d'une unité (1, 2, 3, 4, 5, 6) mais il reste inférieur à 7 et les notes transposées restent donc naturelles (Fa → Do, Do → Sol, Ré → La, La → Mi, Mi → Si).

Les notes dont l'exposant de 3 était 7, 8, 9, 10, 11 ou 12 étaient diésées ; la transposition par une quinte majeure cet exposant d'une unité (8, 9, 10, 11, 12, 13) et les notes transposées restent donc diésées<sup>5</sup> (Fa $\sharp$  → Do $\sharp$ , Do $\sharp$  → Sol $\sharp$ , Ré $\sharp$  → La $\sharp$ , La $\sharp$  → Mi $\sharp$ , Mi $\sharp$  → Si $\sharp$ ).

<sup>4</sup> Pour rappel tout nombre élevé à la puissance nulle vaut l'unité.

<sup>5</sup> Nous ne commenterons pas ici la survenue d'un Fa double dièse comme transposition du Si $\sharp$  ; cette problématique fera l'objet du chapitre suivant.

La seule note dont le statut (naturel ou diésé) est modifié par la transposition à la quinte est Si ; son exposant de 3 était 6, il devient 7. La note originale qui était naturelle (Si) devient diésée (Fa#).

**Notons que ce principe est indépendant du mode.** Nous avons travaillé sur la gamme de Fa naturelle (mode lydien) car elle ne fait apparaître que des fréquences réduites s'exprimant comme des puissances de 3 divisées par des puissances de 2. Les autres gammes naturelles font apparaître un mélange de fréquences réduites en  $3^m/2^n$  et  $2^p/3^q$  [Figure 29].

Notre démonstration aurait été un peu plus difficile si nous étions partis, par exemple, de la gamme de Do naturelle... mais la conclusion aurait été la même. Dans cette gamme de Do, le Fa est une quarte juste au-dessus de la tonique et a donc une fréquence réduite de  $2^2/3$  alors que le Si, une septième majeure au-dessus de la tonique a une fréquence réduite de  $3^5/2^7$ . Le rapport de fréquence résultant de la transposition du Si par une quinte ( $3/2$ ) :

$$\frac{3^5}{2^7} \times \frac{3}{2} = \frac{3^6}{2^8}$$

apparaît bien comme un Fa# c'est-à-dire un Fa ( $2^2/3$ ) haussé d'un demi-ton chromatique ( $3^7/2^{11}$ ) et monté à l'octave (2) :

$$\frac{2^2}{3} \cdot \frac{3^7}{2^{11}} \cdot 2 = \frac{3^6}{2^8}$$

•

Nous tirons de l'analyse ci-dessus un principe général. Quel que soit le mode, la transposition d'une gamme par une quinte juste :

- ▷ maintient naturelle toutes les notes naturelles à l'exception du Si qui engendre un Fa# ;

- ▷ maintient diésée toutes les notes diésées à l'exception du Si# qui engendre un Fa##.

On en tire deux conclusions bien connues des musiciens :

- ▷ si on transpose une gamme naturelle par n quintes justes on obtient une gamme à n dièses ;
- ▷ les dièses apparaissent dans l'ordre suivant :
  - **Fa** : la première quinte fait apparaître un **Fa#** comme transposition du Si naturel ;
  - **Do** : la seconde quinte transforme Fa# en **Do#** et recrée Fa# par transposition de Si ;
  - **Sol** : la troisième quinte transforme Do# en **Sol#** et recrée Do# et Fa# par transposition de Fa# et Si ;
  - **Ré** : la quatrième quinte transforme Sol# en **Ré#** alors que Sol#, Do# et Fa# sont recréés par transposition du Do#, Fa# et Si ;
  - **La** : la cinquième quinte transforme le Ré# en **La#** alors que Ré#, Sol#, Do# et Fa# sont recréés par transposition du Sol#, Do#, Fa# et Si ;
  - **Mi** : la sixième quinte transforme le La# en **Mi#** alors que La#, Ré#, Sol#, Do# et Fa# sont recréés par transposition du Ré#, Sol#, Do#, Fa# et Si ;
  - **Si** : la septième quinte transforme le Mi# en **Si#** alors que Mi#, Ré#, Sol#, Do# et Fa# sont recréés par transposition du Ré#, Sol#, Do#, Fa# et Si.

Ce qui change en fonction du mode c'est le degré de la gamme qui est affecté :

- ▷ en gamme de Do (gamme majeure), c'est la sensible (Si, VII) ;
- ▷ en gamme de Ré, c'est la sus-dominante (Si, VI) ;
- ▷ en gamme de Mi, c'est la dominante (Si, V) ;
- ▷ en gamme de Fa, c'est la sous-dominante (Si, IV) ;



- ▷ en gamme de Sol, c'est la médiate (Si, III) ;
- ▷ en gamme de La (gamme mineure), c'est la sus-tonique (Si, II) ;
- ▷ en gamme de Si, c'est la tonique (Si, I).



Deux problèmes pratiques se posent aux musiciens. Le *premier* est de trouver l'armure pour une tonalité donnée dans un mode donné. La règle classique pour le mode majeur consiste à se rappeler que le dernier dièse doit être la sensible de la gamme ; si on cherche par exemple l'armure de Ré majeur dont la sensible est Do# on sait qu'il y a deux dièses (Fa et Do).

Pour une gamme mineure on peut raisonner en termes de gamme relative : si on cherche l'armure de Mi mineur on montera Mi d'une tierce mineure pour trouver son relatif majeur qui est Sol majeur. La sensible de Sol Majeur est Fa# et donc Mi mineur a un dièse à l'armure.

Une règle générale applicable à tous les modes, et beaucoup plus simple à appliquer et retenir, consiste à compter le nombre de quintes permettant de passer de la note caractéristique du mode à la tonique choisie ; ce nombre sera le nombre de dièses. Ainsi dans les deux exemples précédents :

- ▷ Ré en mode de Do : Do → Sol → Ré, deux quintes, deux dièses ;
- ▷ Mi en mode de La : La → Mi, une quinte, un dièse.

Le *second* problème consiste à trouver la tonique pour un nombre de dièses donné. Ici encore les règles enseignées sont complexes et différentes selon qu'on est en mode majeur ou mineur. Une règle générale consiste à monter la note caractéristique du mode d'un nombre de quinte égal au nombre de dièses :

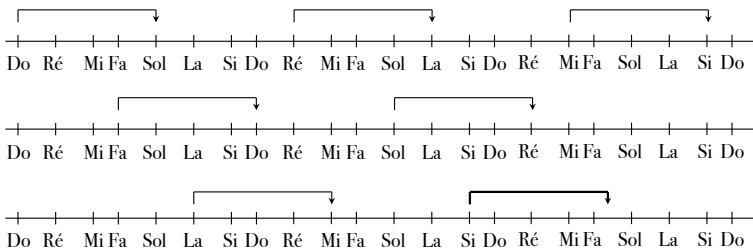
- ▷ trois dièses et mode de Do : Do → Sol → Ré → La, on est en La

majeur ;

- ▷ six dièses en mode de Si : Si → Fa# → Do# → Sol # → Ré # → La# → Mi#, on est en Mi# locrien.

•

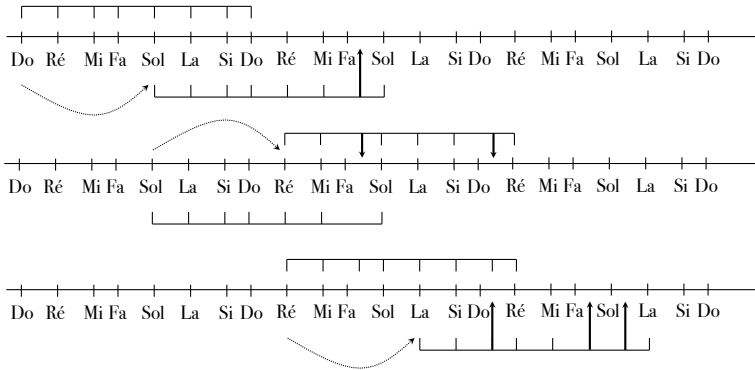
La démonstration ci-dessus aura sans doute paru très lourde à un musicien. Il eut été plus simple de raisonner musicalement et d'observer [Figure 31] que, dans une gamme naturelle, toutes les quintes sont justes (3T+d) sauf la quinte Si-Fa qui est mineure (2T+2d). En transposant tous les degrés d'une gamme naturelle d'une quinte juste ascendante, toutes les notes naturelles sont transformées en une autre note naturelle sauf le Si qui engendre un Fa#. La transposition par une quinte juste ascendante ajoute donc **un et un seul dièse à l'armure de la gamme de départ** [Figure 32].



**Figure 31** — Dans une gamme naturelle, toutes les quintes sont justes sauf la quinte Si-Fa.

#### 4. ARMURES À BÉMOLS

Partons de la gamme chromatique descendante mais gardons les notes dans l'ordre où elles apparaissent naturellement :



**Figure 32** — La transposition par quintes ascendantes fait apparaître un nouveau dièse à chaque quinte.

Si	Mi	La	Ré	Sol	Do	Fa
2	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$
(2,0000)	(1,3333)	(1,7778)	(1,1852)	(1,5802)	(1,0535)	(1,4047)
Si <sup>b</sup>	Mi <sup>b</sup>	La <sup>b</sup>	Ré <sup>b</sup>	Sol <sup>b</sup>	Do <sup>b</sup>	Fa <sup>b</sup>
$\frac{2^{12}}{3^7}$	$\frac{2^{13}}{3^8}$	$\frac{2^{15}}{3^9}$	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$
(1,8729)	(1,2486)	(1,6648)	(1,1099)	(1,4798)	(1,7668)	(1,3154)

On observe que les notes naturelles ont un exposant de trois (au dénominateur) qui est compris entre 0 et 6 alors que les notes altérées ont une valeur de cet exposant supérieure à 6. La transposition par une quinte descendante divise la fréquence réduite de chaque note par 3/2 et augmente donc l'exposant du dénominateur d'une unité. Les notes transposées gardent donc leur statut (naturel ou bémolisé) à l'exception du Fa dont la transposition donne Si<sup>b</sup>.

On comprend aisément que le processus de transposition par quintes descendantes fonctionne de manière exactement symétrique à celui décrit ci-dessus pour les quintes ascendantes. On en déduit les règles bien connues suivantes :

- ▷ la transposition d'une gamme naturelle, quel que soit son mode, par  $n$  quintes descendantes engendre une gamme à  $n$  bémols;
- ▷ ces altérations apparaissent dans l'ordre opposé à celui des dièses: Si, Mi, La, Ré, Sol, Do, Fa ;
- ▷ pour trouver la tonalité associée, dans un mode donné, à un nombre donné de bémols il suffit de baisser la note caractéristique du mode du nombre de quinte correspondant, ainsi :
  - trois bémols en mode de Do (mode majeur) donne Do → Fa → Si $\flat$  → Mi $\flat$  ;
  - cinq bémols en mode de La (mode mineur) : La $\flat$  → Ré → Sol → Do → Fa → Si $\flat$  ;
  - deux bémols en mode de Si : Si $\flat$  → Mi $\flat$  → La
- ▷ pour trouver l'armure associée à une tonique donnée dans un mode donné il suffit de compter le nombre de quinte juste descendante permettant de passer de la note caractéristique du mode à la tonique :
  - Fa majeur: Do → Fa, un bémol ;
  - Sol mineur: La → Ré → Sol, deux bémols.

## 5. SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Nous avons d'abord défini les modes musicaux comme les sept suites possibles de sept intervalles consécutifs pris dans la séquence TTdTTTdTTdTTTd. Les modes les plus courants sont le mode majeur (TTdTTTd) et le mode mineur (TdTTdTT).

Partant des fréquences réduites des gammes ascendantes (descendantes) et en les transposant par une quinte ascendante (descendante) nous avons fait apparaître à chaque transposition un dièse (un bémol). Ces altérations apparaissent dans l'ordre bien connu :

- ▷ Fa, Do, Sol, Ré, La, Mi, Si pour les dièses ;
- ▷ Si, Mi, La, Ré, Sol, Do, Fa pour les bémols.

Nous en avons déduit, par un raisonnement purement arithmétique, toutes les règles classiques relatives aux tonalités et aux armures.



Toutes les règles classiques du solfège sont donc intimement liées à la structure particulière de la gamme de Pythagore ; celle-ci présente pourtant certaines difficultés qui vont conduire à sa remise en cause partielle. Voyons, au chapitre suivant, quelles sont ces difficultés.



## Pythagore en difficulté

Quintes et octaves sont incommensurables: il est impossible de faire entrer un nombre entier  $n$  de quintes dans un nombre entier  $m$  d'octaves. Mathématiquement cela revient à écrire qu'il n'existe pas d'entiers  $m$  et  $n$  non nuls<sup>1</sup> tels que :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m$$

ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$3^n = 2^{n+m}$$

Cette propriété se démontre aisément puisque toutes les puissances entières de 3 sont impaires alors que celles de deux sont paires. Un nombre ne pouvant être à la fois pair et impair, il n'existe pas de  $n$  et  $m$  entier vérifiant l'égalité ci-dessus.

Cette propriété, dite *d'incommensurabilité des quintes et des octaves*, constitue le problème constitutif majeur de la gamme de Pythagore ; nous allons en explorer quelques conséquences dans ce chapitre.

---

<sup>1</sup> Le cas particulier  $m=n=0$  est ce qu'on appelle une *solution triviale* qui énonce simplement que zéro octave égale zéro quinte.

## 1. DÉCOUPE DE L'OCTAVE EN INTERVALLES ÉGAUX

Il est impossible de découper l'octave de manière homogène par la construction de Pythagore. Deux notes successives de la gamme sont en effet caractérisées par des fréquences réduites qui s'expriment sous la forme :

$$f_1 = \frac{3^{m_1}}{2^{n_1}}$$

pour la première et

$$f_2 = \frac{3^{m_2}}{2^{n_2}}$$

pour la seconde. L'intervalle qui les sépare est donc :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{3^{m_2-m_1}}{2^{n_2-n_1}}$$

Notez bien que si l'on fait l'hypothèse que  $f_2 > f_1$  il n'en résulte pas nécessairement que  $m_2 > m_1$  et la différence  $m_2 - m_1$  peut donc être positive ou négative. En revanche  $m_2 - m_1$  et  $n_2 - n_1$  sont nécessairement de même signe (ou nuls).

La découpe de l'octave en  $p$  intervalles égaux impliquerait donc l'égalité :

$$\left( \frac{3^{m_2-m_1}}{2^{n_2-n_1}} \right)^p = 2$$

qui peut s'écrire :

$$3^{p(m_2-m_1)} = 2^{p(n_2-n_1)+1}$$

$p$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $n_1$  et  $n_2$  étant entiers, les exposants de 3 et de 2 appa-



raissant dans l'expression ci-dessus sont des entiers et nous savons (incommensurabilité des quintes et des octaves) que de tels entiers n'existent pas. Il est donc inutile de poursuivre le schéma de Pythagore en ajoutant un plus grand nombre de degrés: on n'aboutira jamais à une découpe *homogène* de l'octave n'impliquant qu'un seul type d'intervalle élémentaire. On verra cependant un peu plus loin qu'on peut, pour certaines valeurs des entiers  $m$  et  $n$ , se rapprocher de l'égalité désirée entre  $m$  quintes et  $n$  octaves.

## 2. ACYCLISME IRRÉDUCTIBLE DE LA GAMME DE PYTHAGORE

Si l'on poursuit la construction de Pythagore, va-t-on, à un moment donné, retomber sur des degrés précédemment obtenus ? Cela équivaudrait à dire qu'il existe au moins deux couples de nombres  $(m_1, n_1)$  et  $(m_2, n_2)$  tels que :

$$\frac{3^{m_1}}{2^{n_1}} = \frac{3^{m_2}}{2^{n_2}}$$

mais ceci serait équivalent à :

$$3^{m_1 - m_2} = 2^{n_1 - n_2}$$

et cette égalité n'est vérifiée que si  $m_1 = m_2$  et  $n_1 = n_2$  ; tous les degrés de la gamme, quel que soit leur nombre, seront donc différents l'un de l'autre : la gamme de Pythagore n'est pas cyclique.

## 3. TRANSPOSITION ET ENHARMONIE

La gamme de Pythagore présente de sérieux problèmes de transposition. Dans sa version chromatique montante débutant sur Do, elle

est constituée des intervalles c-d-c-d-d-c-d-c-d-d. Si l'on suit la même séquence de demi-tons en débutant sur une autre note, Ré par exemple, on constate [Figure 33] que si la plupart des degrés rencontrés sont communs aux deux gammes, certains degrés, en revanche, ne se retrouvent que dans l'une ou l'autre d'entre elles. Dans la gamme de Pythagore, en effet, Fa ( $Mi + d$ ) n'est pas égal à  $Mi\sharp$  ( $Mi + c$ ) dont il diffère d'un coma pythagoricien. Ces deux notes, *enharmoniques*, n'ont pas exactement la même fréquence.

Gamme chromatique de Do	Gamme chromatique de Ré
Do	
Do $\sharp$	
Ré	Ré
Ré $\sharp$	Ré $\sharp$
Mi	Mi
<b>Fa</b>	<b>Mi<math>\sharp</math></b>
Fa $\sharp$	Fa $\sharp$
Sol	Sol
Sol $\sharp$	Sol $\sharp$
La	La
La $\sharp$	La $\sharp$
Si	Si
<b>Do</b>	<b>Si<math>\sharp</math></b>
Do $\sharp$	Do $\sharp$
Ré	Ré

**Figure 33** — Gammes chromatiques majeures de Do et Ré : certains degrés de la gamme de Ré ( $Mi\sharp$  et  $Si\sharp$ ) n'apparaissent pas dans la gamme chromatique de Do. Réciproquement, les degrés Fa et Do n'apparaissent pas dans la gamme chromatique de Ré.

4. LA QUINTE DU LOUP

Si, partant de Do, on grimpe par quintes successives, on obtient successivement Do, Sol, Ré, La, Mi, Si, Fa $\sharp$ , Do $\sharp$ , Sol $\sharp$ , Ré $\sharp$ , La $\sharp$ , Mi $\sharp$ , Si $\sharp$ . Mais Si $\sharp$  ( $Si+c$ ) n'est pas Do ( $Si+d$ ) : après avoir monté de douze

quintes on a parcouru sept octaves... plus un coma<sup>2</sup>! Si on veut absolument couvrir sept octaves par douze quintes, la douzième (Mi# → Do) sera un peu plus courte; on l'appelle la **quinte du loup**. Si on désigne par  $\ell$  le rapport de fréquence caractérisant cette quinte réduite, on doit exprimer que onze quintes justes plus cette quinte du loup donnent sept octaves :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{11} \cdot \ell = 2^7 \Rightarrow \ell = \frac{2^{18}}{3^{11}} = 1.4798$$

## 5. QUAND N QUINTES RECOUVRENT PRESQUE M OCTAVES

Nous savons qu'il n'y a pas de couple (m,n) d'entiers vérifiant :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m$$

Il existe en revanche une infinité de m et n réels qui la vérifient; pour le démontrer, prenons le logarithme<sup>3</sup> des deux membres :

$$n \log \frac{3}{2} = m \log 2 \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 2} \simeq 0,58496$$

Chercher les couples (m,n) pour lesquels m quintes est *pratiquement* égal à n octaves revient à chercher des approximations rationnelles<sup>4</sup> à ce nombre. Une manière élégante de construire des approximations rationnelles à un nombre réel consiste à en faire le développement sous forme de fraction continue :

<sup>2</sup> Pour rappel, un demi-ton chromatique est plus grand qu'un demi-ton diatonique.

<sup>3</sup> Voir, au chapitre 3, la note 12.2 pour une définition de cet outil mathématique.

<sup>4</sup> C'est-à-dire sous forme du rapport de deux nombres entiers.

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \dots}}}}}$$

Définissons :

$$\zeta = \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 2}$$

On notera  $\zeta_n$  l'approximation de  $\zeta$  par une fraction continue limitée à l'ordre  $n$  (coefficient  $a_0$  à  $a_n$ ) ; on construit ce développement de la manière suivante :

- ▷ la partie entière de  $\zeta$  est nulle et  $a_0$  est donc nul également :

$$\zeta_0 = 0$$

- ▷ l'inverse de  $(\zeta - \zeta_0)$  vaut 1.70951 ; la partie entière de ce nombre donne  $a_1 = 1$  :

$$\zeta_1 = 0 + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

- ▷ l'inverse du reste (0.70951) vaut 1.40942 ; la partie entière de ce nombre donne  $a_2 = 1$  :

$$\zeta_2 = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

- ▷ l'inverse du reste (0.40942) vaut 2.44247 ; la partie entière de ce nombre donne  $a_3 = 2$  :

$$\zeta_3 = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

- ▷ l'inverse du reste (0.44247) vaut 2.26002 ; la partie entière de ce nombre donne  $a_4 = 2$  :

$$\zeta_4 = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{7}{12} \sim 0.58333$$

- ▷ l'inverse du reste (0.26002) vaut 3.84591 ; la partie entière de ce nombre donne  $a_5 = 3$  :

$$\zeta_5 = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}} = \frac{24}{41} \sim 0.58537$$

- ▷ l'inverse du reste (0.84591) vaut 1.18216 ; la partie entière de ce nombre donne  $a_6 = 1$  :

$$\zeta_6 = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}}}} = \frac{31}{53} \sim 0.58491$$

- ▷ l'inverse du reste (0.18216) vaut 5.48955 ; la partie entière de ce nombre donne  $a_7 = 5$  :

$$\zeta_7 = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}}} = \frac{179}{306} \sim 0.58497$$

Le processus pourrait continuer indéfiniment (puisque  $\zeta$  est irrationnel) mais nous avons atteint une approximation qui, d'une part, donne correctement les quatre premiers chiffres significatifs

et, d'autre part, fait déjà intervenir des nombres de quintes et d'octaves trop élevés que pour avoir un intérêt pratique. On peut, par ailleurs, trouver d'autres approximations rationnelles par d'autres méthodes; les meilleures (pour  $n < 1000$ ) sont:

$$\zeta \simeq \frac{210}{359} \sim 0.58496$$

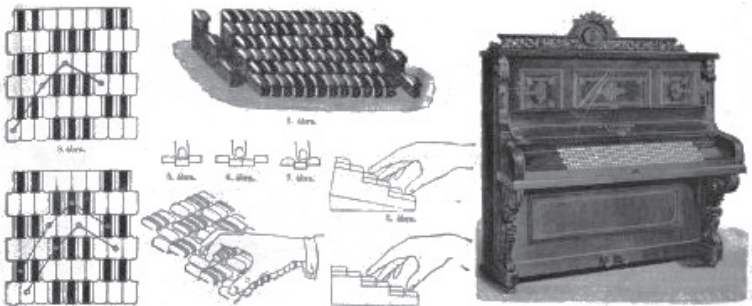
$$\zeta \simeq \frac{358}{612} \sim 0.58497$$

$$\zeta \simeq \frac{389}{665} \sim 0.58496$$

$$\zeta \simeq \frac{568}{971} \sim 0.58496$$

Analysons ces approximations successives:

- ▷ 0,1 et 1/2 sont trop imprécises et, de ce fait, non pertinentes;
- ▷ 3/5 correspond à la gamme pentatonique;
- ▷ 7/12 correspond au choix de Pythagore;



**Figure 34** — Clavier à 41 degrés de Jankó Pál tel que présenté dans le journal hongrois *Vasárnapi Újság* (les nouvelles du dimanche), édition du 1<sup>er</sup> décembre 1889.

- ▷ Jankó Pál, un musicien hongrois a construit en 1882 un clavier à 41 degrés [Figure 34];
- ▷ la division de l'octave en 53 degrés ( $\zeta = 31/53$ ) apparaîtra à deux reprises dans la suite de ce livre: gamme de Holder et Mercator (section suivante) et gamme à comas (chapitre suivant);
- ▷ les approximations suivantes sont sans intérêt pratique car elles conduisent au découpage de l'octave en un nombre beaucoup trop élevé de degrés.

## 6. DÉCOUPE DE L'OCTAVE EN DEUX INTERVALLES INÉGAUX

Le schéma de Pythagore ne permet pas de décomposer l'octave de manière homogène. Nous avons montré que sa découpe en douze degrés n'introduisait en revanche que deux types d'intervalles (demi-tons chromatique et diatonique) et que ceux-ci étaient très proche. Pouvons-nous arriver au même résultat (deux types seulement d'intervalles d'amplitudes proches) avec un nombre plus élevé de degrés?

Si l'on veut découper la gamme en  $r$  intervalles,  $r_1$  d'un premier type:

$$I_1 = \frac{3^{m_1}}{2^{n_1}}$$

et  $r_2$  d'un deuxième type:

$$I_2 = \frac{3^{m_2}}{2^{n_2}}$$

alors ces différents entiers sont reliés par l'équation:

$$\left(\frac{3^{m_1}}{2^{n_1}}\right)^{r_1} \cdot \left(\frac{3^{m_2}}{2^{n_2}}\right)^{r_2} = 2$$

Soit :

$$3^{r_1 \cdot m_1 + r_2 \cdot m_2} = 2^{r_1 \cdot n_1 + r_2 \cdot n_2 + 1}$$

La solution triviale est ici pertinente et exige que :

$$r_1 \cdot m_1 + r_2 \cdot m_2 = 0$$

et

$$r_1 \cdot n_1 + r_2 \cdot n_2 + 1 = 0$$

La première équation nécessite, puisque  $r_1$  et  $r_2$  sont positifs, que  $m_1$  et  $m_2$  soient de signe contraire.  $n_1$  est par ailleurs nécessairement de même signe que  $m_1$  et  $n_2$  de même signe que  $m_2$ . Choisissons  $m_1 > 0$  ; on aura alors :

$$I_1 = \frac{3^{|m_1|}}{2^{|n_1|}}$$

et

$$I_2 = \frac{2^{|n_2|}}{3^{|m_2|}}$$

un des intervalles est donc *nécessairement* le rapport d'une puissance (positive) de 3 et d'une puissance (positive) de 2 alors que l'autre fait apparaître la puissance (positive) de 2 au numérateur et celle de 3 au dénominateur.

On montre aisément, en parcourant progressivement toutes les valeurs de  $r$ , que seules certaines de ces valeurs sont compatibles avec l'objectif de ne rencontrer que deux intervalles [Figure 35] mais que ceux-ci sont, en général, très différents (voir par exemple la décomposition en 17 degrés qui fait apparaître douze demi-tons chromatiques et cinq comas). Seules les décompositions en 12 et 53



$r$	$I_1$	$r_1$	$I_2$	$r_2$	$\frac{I_1}{I_2}$
2	$\frac{3}{2} = 1,500$	1	$\frac{2^2}{3} = 1,333$	1	$\frac{3^2}{2^3} = 1,12500$
3	$\frac{2^2}{3} = 1,333$	2	$\frac{3^2}{2^3} = 1,125$	1	$\frac{2^5}{3^5} = 1,18519$
5	$\frac{2^5}{3^3} = 1,185$	2	$\frac{3^2}{2^3} = 1,125$	3	$\frac{2^8}{3^5} = 1,05350$
7	$\frac{3^2}{2^3} = 1,125$	5	$\frac{2^8}{3^5} = 1,053$	2	$\frac{3^7}{2^{11}} = 1,06787$
12	$\frac{3^7}{2^{11}} = 1,068$	5	$\frac{2^8}{3^5} = 1,053$	7	$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,01364$
17	$\frac{2^8}{3^5} = 1,053$	12	$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,014$	5	$\frac{2^{27}}{3^{17}} = 1,03932$
29	$\frac{2^{27}}{3^{17}} = 1,039$	12	$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,014$	17	$\frac{2^{46}}{3^{29}} = 1,02533$
41	$\frac{2^{46}}{3^{29}} = 1,025$	12	$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,014$	29	$\frac{2^{65}}{3^{41}} = 1,01153$
53	$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,014$	41	$\frac{2^{65}}{3^{41}} = 1,012$	12	$\frac{3^{53}}{2^{84}} = 1,00209$

**Figure 35** — Découpe de l’octave en  $r$  intervalles de deux types seulement. L’intervalle  $I_1$  apparaît  $r_1$  fois, l’intervalle  $I_2$   $r_2$  fois ( $r = r_1 + r_2$ ).

intervalles<sup>5</sup> découpent donc l’octave quasi-régulièrement en intervalles *pratiquement* identiques ne relevant que de deux types.

La gamme à douze degrés est la gamme classique de Pythagore. La gamme à 53 degrés a été étudiée, de manière théorique, par Holder<sup>6</sup>

<sup>5</sup> Et d’autres comptant un nombre encore beaucoup plus élevé d’intervalles.

<sup>6</sup> **William Holder** (1616-1698), théoricien de la musique anglais.

et Mercator<sup>7</sup> ; elle fait intervenir les deux types d'intervalles suivants :

- ▷ le coma pythagoricien :  $3^{12}/2^{19} \sim 1,0136$
- ▷ un coma qu'on pourrait qualifier de *holderien* :  $2^{65}/3^{41} \sim 1,0115$ .

## 7. SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Aucune puissance de 3 (toujours impaire) ne peut être égale à une puissance de 2 (toujours paire). De cette évidence arithmétique découle l'*incommensurabilité* des *quintes* et des *octaves*. Ce chapitre a présenté quelques conséquences de cette propriété :

- ▷ la construction de Pythagore, qui consiste à transposer une note de départ par des quintes consécutives puis à les ramener dans l'octave, est irréductiblement acyclique et tous les degrés qu'elle engendre sont différents l'un de l'autre ;
- ▷ il est impossible de découper l'octave de manière homogène et il existe toujours au moins deux types d'intervalles : tons et demi-tons diatoniques (gamme à 7 degrés), demi-tons diatoniques et chromatiques (gamme à 12 degrés), comas pythagoriciens et holderiens (gamme à 53 degrés) ;
- ▷ pour refermer le cycle de 12 quintes sur 7 octaves on doit insérer, après 11 quintes justes, une quinte du loup légèrement plus courte.

Ces difficultés sont autant d'obstacles à la transposition et à l'harmonie. Nous verrons au chapitre suivant trois solutions qui ont été proposées pour éliminer ou contourner ces difficultés : la gamme de Zarlino, les tempéraments mésotoniques et le tempérament égal.

---

<sup>7</sup> **Nicolaus Mercator** (1620-1687), mathématicien allemand.

## Au-delà de Pythagore

Trois tentatives d'améliorations de la gamme de Pythagore vont être présentées dans ce chapitre : la gamme harmonique de Zarlino, les tempéraments mésotoniques et, enfin, le tempérament égal.

Posons-nous d'abord la question de la compatibilité entre les harmoniques d'une note et les degrés de la gamme.

### 1. HARMONIQUES ET DEGRÉS DE LA GAMME

Le son produit par un instrument quelconque jouant une note donnée (La par exemple) contient la fréquence associée à la note choisie ( $f_0 = 440$  Hz dans notre exemple) mais aussi celles de ses harmoniques ( $nf_0$ ). De nombreux harmoniques se retrouvent dans la gamme de Pythagore.

- ▷ Les harmoniques 1, 2, 4 et 8 donnent les La successifs à l'octave ; nous avons en effet vu que multiplier la fréquence par deux revient à hausser la note d'une octave.
- ▷ L'harmonique 3 nous donne la douzième (Mi) ; le rapport de fréquence 3 a en effet été générateur de la gamme de Pythagore et cet intervalle de fréquence correspond bien à une quinte ( $3/2$ ) haussée d'une octave (2) soit une douzième ( $3/2 \times 2 = 3$ ).

---

<sup>1</sup> Pour rappel : nous avons adopté la convention suivant laquelle l'harmonique  $n$  est celle dont la fréquence est égale à  $n$  fois la fréquence du fondamental soit  $nf_0$ .

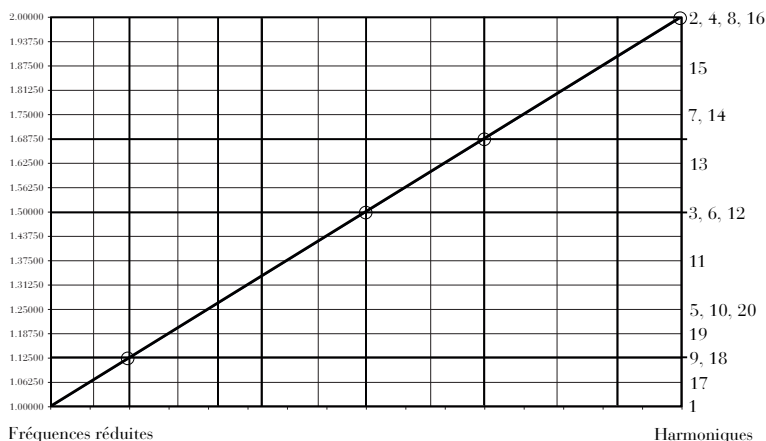
- ▷ Les harmoniques 6, 12 et 24 donnent les autres Mi à l'octave.
- ▷ L'harmonique 9 fait monter de trois octaves ( $2^3 = 8$ ) et d'une seconde majeure ( $9/8$ ) soit un Si.
- ▷ Les harmoniques 18 et 36 donnent les autres Si à l'octave.
- ▷ L'harmonique 27 fait monter le fondamental de quatre octaves (16) et d'une sixte majeure ( $27/16$ ) soit un Fa.

Les harmoniques 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19 et 20, pour se limiter aux vingt premiers, donnent des sons qui, en revanche, ne **font pas partie de la gamme**. La gamme de Pythagore ayant été construite sur la quinte (rapport  $3/2$ ) et l'octave (rapport 2) on ne peut en effet y trouver que les harmoniques qui sont soit une puissance de 2, soit une puissance de 3, soit le produit d'une puissance de 2 et d'une puissance de 3. La **Figure 36** résume le rapport qui existe entre les harmoniques d'une note et la gamme de Pythagore; la **Figure 37** exprime cette relation graphiquement.

On peut trouver, pour quelques-uns de ces harmoniques *manquants* des degrés de la gamme dont la fréquence est très voisine;

Harmonique	1	2	3	4	5	6	7
Notation en puissance	1	2	3	$2^2$	-	$2 \times 3$	-
Note	La	La	Mi	La	-	Mi	-
Harmonique	8	9	10	11	12	13	14
Notation en puissance	$2^3$	$3^2$	-	-	$2^2 \times 3$	-	-
Note	La	Si	-	-	Mi	-	-
Harmonique	15	16	17	18	19	20	21
Notation en puissance	-	$2^4$	-	$2 \times 3^2$	-	-	-
Note	-	La	-	Si	-	-	-
Harmonique	22	23	24	25	26	27	28
Notation en puissance	-	-	$2^3 \times 3$	-	-	$3^3$	-
Note	-	-	Mi	-	-	Fa	-

**Figure 36** — Table des harmoniques et correspondance avec les degrés de la gamme de Pythagore.



**Figure 37** — Harmoniques et gamme de Pythagore – Les barres verticales représentent la fréquence des différents degrés de la gamme de Do Majeur. Les barres horizontales représentent la fréquence réduite, ramenée dans l’octave, des harmoniques du fondamental. Pour qu’un harmonique engendre une note de la gamme, il faut que l’intersection entre les lignes verticales et horizontales correspondantes se situe sur la bissectrice. Les points qui ont ces propriétés sont entourés d’un cercle.

par exemple :

- ▷  $5 \sim 3^4/2^4 = 5.0625$  de telle sorte que l’harmonique 5 est approximativement une tierce majeure ( $3^4/2^6$ ) et deux octaves au-dessus du fondamental (La) soit un Do# ;
- ▷ les harmoniques de fréquences 10 et 20 engendrent donc la même note à l’octave ;
- ▷  $7 \sim 2^6/3^2 = 7.1111$  de telle sorte que l’harmonique 7 est approximativement trois octaves ( $2^3$ ) moins une seconde majeure ( $3^2/2^3$ ) au-dessus du fondamental (La) soit un Sol ;
- ▷ l’harmonique 14 engendre donc la même note à l’octave.

S’il existe de nombreux harmoniques d’une note qui n’appar-

tiennent pas, *stricto sensu*, à la gamme, il faut noter en revanche qu'à chaque degré d'une gamme correspond un nombre infini d'harmoniques du fondamental produisant cette note octaviée une ou plusieurs fois. En effet, toute note de la gamme s'écrivant sous la forme  $f_0 \times 3^m/2^n$ , il suffit de hausser (ou baisser si  $m$  et  $n$  sont négatifs) la note du nombre voulu d'octaves et de quintes pour trouver la fréquence de l'harmonique voulu. Cette conclusion est toutefois d'une faible portée car ces fréquences seront, dans la plupart des cas, si hautes qu'on ne pourra les percevoir.

## 2. LA GAMME DE ZARLINO

Pour résoudre le problème de l'incompatibilité du caractère géométrique de la gamme et arithmétique des harmoniques, Zarlino<sup>2</sup> a proposé une gamme harmonique. Son raisonnement part de l'idée que les rapports entre deux harmoniques successifs forment une échelle naturelle qui doit se retrouver dans la gamme. Choissant Do comme tonique (fréquence réduite unitaire), il définit successivement :

- ▷ Sol à la fréquence réduite  $3/2$  soit une quinte juste au-dessus de la tonique ;
- ▷ Fa à la fréquence réduite  $4/3$  soit une quarte juste au-dessus de la tonique ;
- ▷ Mi à la fréquence réduite  $5/4$  soit une tierce majeure juste au-dessus de la tonique ;
- ▷ combinant la tierce ( $5/4$ ) et la quarte ( $4/3$ ) il place le La à la fréquence réduite  $5/3$  soit une sixte majeure juste au-dessus de la tonique ;
- ▷ à ce stade la gamme se présente comme suit :

---

<sup>2</sup> **Gioseffo Zarlino** (1517-1590) est un compositeur et théoricien de la musique italien.

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1		$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$		2

- ▷ pour les secondes majeures ascendantes Do-Ré et La-Si il utilise le même rapport de fréquence que pour Fa-Sol soit  $(3/2) / (4/3) = 9/8$  qui est aussi, d'ailleurs, le rapport entre deux harmoniques successifs;

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1	$\curvearrowright \frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$ $\curvearrowright \frac{10}{9}$	$\frac{4}{3}$ $\curvearrowright \frac{16}{15}$	$\frac{3}{2}$ $\curvearrowright \frac{9}{8}$	$\frac{5}{3}$ $\curvearrowright \frac{10}{9}$	$\frac{15}{8}$ $\curvearrowright \frac{9}{8}$	2 $\curvearrowright \frac{16}{15}$

On peut diviser les secondes Do-Ré, Ré-Mi, Fa-Sol, Sol-La et La-Si en insérant les degrés chromatiques suivants<sup>3</sup>:

- ▷ Mib à la fréquence réduite  $6/5$ ;
- ▷ Fa# à la fréquence réduite  $7/5$  soit un intervalle de  $21/20$  au-dessus du Fa ( $4/3$ );
- ▷ Lab à la fréquence réduite  $8/5$ ;
- ▷ par analogie avec la seconde Fa-Sol, on placera le Do# et le La#  $21/20$  au-dessus du Do ( $21/20$ ) et du La ( $5/3 \times 21/20 = 7/4$ ).

Do	Do#	Ré	Mi <sup>b</sup>	Mi	Fa	Fa#	Sol
1	$\curvearrowright \frac{21}{20}$	$\frac{5}{4}$ $\curvearrowright \frac{15}{14}$	$\frac{6}{5}$ $\curvearrowright \frac{16}{15}$	$\frac{3}{2}$ $\curvearrowright \frac{25}{24}$	$\frac{4}{3}$ $\curvearrowright \frac{16}{15}$	$\frac{7}{5}$ $\curvearrowright \frac{21}{20}$	$\frac{5}{3}$ $\curvearrowright \frac{15}{14}$
Sol	Lab	La	La#	Si	Do		
$\frac{3}{2}$ $\curvearrowright \frac{16}{15}$	$\frac{8}{5}$ $\curvearrowright \frac{25}{24}$	$\frac{5}{3}$ $\curvearrowright \frac{21}{20}$	$\frac{7}{4}$ $\curvearrowright \frac{15}{14}$	$\frac{15}{8}$ $\curvearrowright \frac{16}{15}$	2		

<sup>3</sup> Notons ici que la construction de la gamme de Zarlino n'est pas univoque et que d'autres choix cohérents pourraient être posés.

Cette gamme chromatique contient des degrés diésés et bémolisés; on peut créer les gammes chromatiques montantes (#, **Figure 38**) et descendantes (b, **Figure 39**) complètes en inversant les séquences diatonique-chromatique dans les secondes Ré-Mi et Sol-La ou Do-Ré, Fa-Sol et La-Si :

Do	Do <sup>#</sup>	Ré	Ré <sup>#</sup>	Mi	Fa	Fa <sup>#</sup>	Sol
1	$\frac{21}{20}$ ↷	$\frac{9}{8}$ ↷	$\frac{75}{64}$ ↷	$\frac{5}{4}$ ↷	$\frac{4}{3}$ ↷	$\frac{7}{5}$ ↷	$\frac{3}{2}$ ↷
Sol	Sol <sup>#</sup>	La	La <sup>#</sup>	Si	Do		
$\frac{3}{2}$ ↷	$\frac{25}{24}$ ↷	$\frac{5}{3}$ ↷	$\frac{7}{4}$ ↷	$\frac{15}{8}$ ↷	$\frac{16}{15}$ ↷	2	

**Figure 38** — Gamme chromatique ascendante de Zarlino

Do	Ré <sup>b</sup>	Ré	Mi <sup>b</sup>	Mi	Fa	Sol <sup>b</sup>	Sol
1	$\frac{15}{14}$ ↶	$\frac{9}{8}$ ↶	$\frac{6}{5}$ ↶	$\frac{5}{4}$ ↶	$\frac{4}{3}$ ↶	$\frac{10}{7}$ ↶	$\frac{3}{2}$ ↶
Sol	Lab	La	Si <sup>b</sup>	Si	Do		
$\frac{3}{2}$ ↶	$\frac{8}{5}$ ↶	$\frac{5}{3}$ ↶	$\frac{25}{14}$ ↶	$\frac{15}{8}$ ↶	$\frac{16}{15}$ ↶	2	

**Figure 39** — Gamme chromatique descendante de Zarlino

La gamme de Zarlino a l'avantage de contenir naturellement les harmoniques 1 à 10 du fondamental :

▷ 1 est la tonique (Do) ;



- ▷ 2, 4, 8 sont les octaves (Do) ;
- ▷ 3, 6, 9 sont des quintes octaviées ( $3/2 \times 2 = 3$ ) ;
- ▷ 5 et 10 sont des tierces octaviées ( $5/4 \times 2^2 = 5$ ) ;
- ▷ 7 est une quarte triton augmentée d'une tierce majeure et de deux octaves ( $7/5 \times 5/4 \times 4 = 7$ ).

Elle fait surtout apparaître de nombreux intervalles naturels, définis comme des rapports d'harmoniques successifs:  $2/1$ ,  $3/2$ ,  $4/3$ ,  $5/4$ ,  $6/5$ ,  $7/6$  ( $= 7/5 \times 5/3 \times 1/2$ ),  $8/7$  ( $8/5 \times 5/7$ ),  $9/8$ ,  $10/9$  ( $5/4 \times 8/9$ ).

Cette gamme, en un sens *musicalement parfaite*, a cependant le défaut majeur de contenir six intervalles élémentaires:

- ▷ un grand-ton entre Do-Ré, Fa-Sol et La-Si caractérisé par un rapport de fréquences de  $9/8 = 1.1250$  ;
- ▷ un petit-ton entre Ré-Mi et Sol-La dont les fréquences sont dans un rapport de  $10/9 = 1.1110$  ;
- ▷ le grand ton se divise en deux demi-tons:
  - le grand chromatique de rapport de fréquence  $21/20 = 1.0500$  entre Do-Do#, Fa-Fa# et La-La# ;
  - le grand diatonique de rapport de fréquence  $15/14 = 1.0714$  entre Do#-Ré, Fa#-Sol et La#-Si ;
- ▷ le petit ton se divise également en deux demi-tons:
  - le petit chromatique de rapport de fréquence  $25/24 = 1.0417$  entre Mi $\flat$ -Mi et La $\flat$ -La.
  - le petit diatonique de rapport de fréquence  $16/15 = 1.0667$  entre Ré-Mi $\flat$ , Mi-Fa, Sol-La $\flat$  et Si-Do

La différence entre le grand ton et le petit ton définit le coma *syn-tonique*:

$$\frac{\frac{9}{8}}{\frac{10}{9}} = \frac{81}{80} = 1.0125$$

qui peut encore être divisé en deux demi-comas, définis comme le rapport des grands et petits chromatiques et des grands et petits diatoniques :

$$\frac{\frac{21}{20}}{\frac{25}{24}} \times \frac{\frac{15}{14}}{\frac{16}{15}} = \frac{126}{125} \times \frac{225}{224} = 1.0080 \times 1.0045 = \frac{81}{80} = 1.0125$$

Ces deux intervalles sont appelés respectivement kleisma septimal (225/224) et comma enharmonique (126/125).

Malgré leurs modes de construction résolument différents les gammes diatoniques de Zarlino et de Pythagore ne diffèrent que très peu l'une de l'autre en termes de fréquences :

Note	Zarlino	Pythagore	Rapport (P sur Z)
Do	1	1	1
Ré	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	1
Mi	$\frac{5}{4}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{81}{80}$
Fa	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	1
Sol	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
La	$\frac{5}{3}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{80}$
Si	$\frac{15}{8}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{81}{80}$
Do	2	2	1

Le plus grand écart entre deux degrés des gammes diatoniques de Zarlino et Pythagore (Mi, La et Si) est d'un coma syntonique soit

moins qu'un coma pythagoricien :

$$\frac{3^3}{\frac{2^4}{5}} = \frac{3^4}{\frac{2^6}{5}} = \frac{3^5}{\frac{2^7}{15}} = \frac{81}{80} = 1.0125 < \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.0136$$

Les écarts sont plus importants entre les notes altérées... mais uniquement du fait que, dans la gamme de Zarlino, les diatoniques sont plus grands que les chromatiques (donc  $\text{Mib}_Z$  est plus aigu que  $\text{Ré}\sharp_Z$ ) alors que, dans la gamme de Pythagore, la seconde diminuée a une amplitude supérieure à la seconde mineure ( $\text{Mib}_P$  est plus grave que  $\text{Ré}\sharp_P$ ). Si on compare les degrés altérés dans l'ordre où ils apparaissent ( $\text{Ré}_Z$  à  $\text{Ré}_P$ ,  $\text{Ré}\sharp_Z$  à  $\text{Mib}_P$ ,  $\text{Mib}_Z$  à  $\text{Ré}\sharp_P$ ,  $\text{Mi}_Z$  à  $\text{Mi}_P$ ) les écarts restent sous le coma syntonique.

Le rapport entre comas pythagoricien et syntonique est appelé schisma :

$$\frac{80}{81} \cdot \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.0011$$

L'existence de deux tons et de quatre demi-tons pose des problèmes de transposition et d'harmonie insurmontables qui font que, malgré sa richesse harmonique évidente, la gamme de Zarlino ne possède guère qu'un intérêt théorique et historique.

### 3. TEMPÉRAMENTS MÉSOTONIQUES

La gamme de Pythagore se construit sur une suite de quintes ; cet intervalle y prend donc sa juste valeur de  $3/2$ . La tierce y est en revanche caractérisée par le rapport de fréquence  $3^4/2^6 = 81/64$  qui diffère de sa valeur juste ( $5/4$ ) d'un coma *syntonique* ( $81/80 = 1.0125$ ).

Si on souhaite privilégier la justesse des tierces aux dépens de celle des quintes, on peut légèrement réduire l'amplitude des

quintes afin que la tierce prenne sa valeur juste. Cette idée mène à la définition de tempéraments *mésotoniques*. Le calcul se fait en observant qu'une tierce majeure (Fa<sup>(3)</sup>-La<sup>(3)</sup> par exemple) est en fait composée de quatre quintes diminuées de 2 octaves (Fa<sup>(3)</sup> ↑ Do<sup>(4)</sup> ↑ Sol<sup>(4)</sup> ↑ Ré<sup>(5)</sup> ↑ La<sup>(5)</sup> ↓ La<sup>(4)</sup> ↓ La<sup>(3)</sup>). Si on désigne par  $q$  l'intervalle de quinte désiré, on a l'équation :

$$\frac{5}{4} = \frac{q^4}{2^2} \Rightarrow q = \sqrt[4]{5} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[4]{\frac{81}{80}}} = 1.495$$

On voit donc que, pour rendre la tierce juste, la quinte doit être réduite d'un quart de coma syntonique. Dans le tempérament mésotonique ainsi construit, la quinte du loup (Section 5.4) a une amplitude supérieure à celle de la quinte juste :

$$\left(\sqrt[4]{5}\right)^{11} \cdot \ell = 2^7 \Rightarrow \ell = \frac{2^7}{5^{\frac{11}{4}}} = 1.541$$

Il existe plusieurs tempéraments mésotoniques intermédiaires qui cherchent un équilibre plus subtil entre la justesse des quintes et des tierces. L'idée est de ne réduire la quinte que d'un sixième, d'un huitième ou d'un douzième de coma syntonique. Si on choisit, par exemple, de baisser la quinte d'un sixième de coma syntonique :

$$q = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[6]{\frac{81}{80}}} = 1.49689$$

alors l'intervalle de tierce est trop élevé de deux sixième de comas syntoniques :

$$t = \frac{q^4}{2^2} = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{2}{6}} = 1.25519$$

et la quinte du loup vaut :

$$\ell = \frac{2^7}{q^{11}} = \frac{3}{2} \frac{\left( \sqrt[6]{\frac{81}{80}} \right)^{11}}{\frac{3^{12}}{2^{19}}} = 1.51390$$

soit une quinte juste baissée d'un coma pythagoricien et haussée de onze sizièmes de coma syntonique, soit encore haussée de cinq sixième de coma syntonique moins un schisma.

#### 4. LE TEMPÉRAMENT ÉGAL

De nombreuses modifications de la gamme de Pythagore ont été proposées au fil du temps et constituent autant de tempéraments. Chaque tempérament distribue d'une manière différente le coma qui sépare douze quintes de sept octaves et tente, à chaque fois, de concilier l'inconciliable. On est, au fond, face à un problème qui s'apparente à la quadrature du cercle<sup>4</sup>.

Au fil des dix-huitième et dix-neuvième siècles, une solution radicale s'est progressivement imposée : elle décompose l'octave en douze intervalles **strictement égaux** en forçant l'égalité parfaite entre douze quintes et sept octaves. Les demi-tons diatoniques et chromatiques prennent, dans cette gamme, la même amplitude :

$$\sqrt[12]{2}$$

Toutes les transpositions deviennent possibles puisque dans ce

---

<sup>4</sup> L'expression *quadrature du cercle* est devenue synonyme de problème insoluble ou de contradiction irréconciliable. À l'origine il s'agit d'un problème de géométrie : comment construire, avec une règle et un compas, un carré dont l'aire serait égale à celle d'un disque donné. On sait aujourd'hui que ce problème, qui a fait couler beaucoup d'encre, n'admet pas de solution.

système, par exemple :  $Mi\# = Fa$  et  $Fa\#\# = Sol = Lab\flat$  (enharmonie parfaite).

Les intervalles de cette gamme de tempérament égal ou bien tempérée<sup>5</sup> s'écartent toujours, mais très faiblement, de ceux de la gamme de Pythagore; l'intervalle de la quinte Fa-Do est, par exemple, de :

$$2^{\frac{7}{12}} = 1.4983 \neq \frac{3}{2}$$

soit un douzième de coma en dessous de sa valeur juste de  $3/2$  :

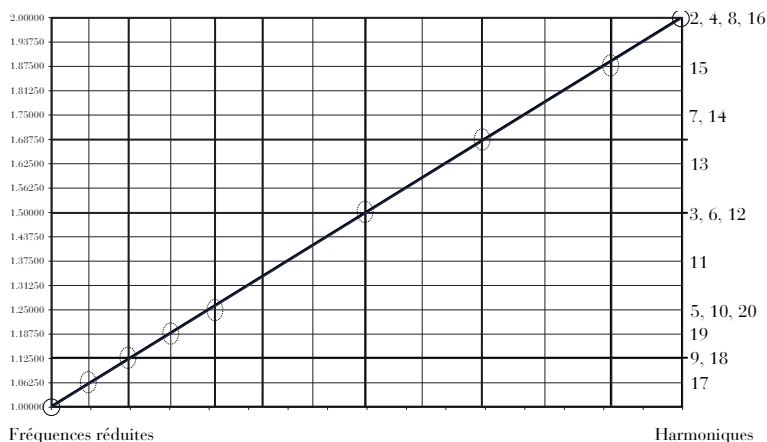
$$\frac{\frac{3}{2}}{2^{\frac{7}{12}}} = \left( \frac{3^{12}}{2^{19}} \right)^{\frac{1}{12}}$$

#### 4.1 Harmoniques et tempérament égal

Seuls les harmoniques dont l'ordre est une puissance de 2 (2, 4, 8, 16, 32) se retrouvent dans le tempérament égal... soit bien moins que dans la gamme de Pythagore. Elle semble donc bien moins accordée aux instruments traditionnels.

La réalité est cependant beaucoup plus subtile : la **Figure 40**, à comparer à la **Figure 37**, montre en effet que de nombreux harmoniques (lignes horizontales) viennent croiser les degrés (lignes verticales) à **proximité** de la bissectrice (ces points sont entourés d'une ellipse). Il y a donc, somme toute, un accord plus approximatif mais

<sup>5</sup> On parle souvent de gamme tempérée mais c'est une dénomination ambiguë car toute gamme constitue un tempérament; *gamme à tempérament égal* est une dénomination précise mais parfois lourde à laquelle on préférera souvent *gamme bien tempérée* comme dans le titre de l'œuvre de Jean-Sébastien Bach « le clavier bien tempéré » (BWV 846-893) qui démontre la puissance de cette gamme en proposant un prélude et une fugue dans chacune des douze tonalités majeures et mineures.



**Figure 40** — Harmoniques et gamme tempérée – Les barres verticales représentent la fréquence des différents degrés de la gamme chromatique ascendante de Do. Les barres horizontales représentent la fréquence réduite, ramenée dans l’octave, des harmoniques du fondamental. Pour qu’un harmonique engendre une note de la gamme, il faut que l’intersection entre les lignes verticales et horizontales correspondantes se situe sur la bissectrice. Les points qui ont ces propriétés sont entourés d’un cercle, ceux qui en sont proches sont entourés d’une ellipse.

plus complet entre la gamme à tempérament égal et les harmoniques du fondamental.

## 4.2 Gammes tempérées généralisées

On peut généraliser la gamme tempérée et construire des échelles musicales basées sur un intervalle fondamental  $p$  découpé en un nombre  $n$  de sous-intervalles ( $p = 2$  et  $n = 12$  dans la gamme tempérée classique).

Karlheinz Stockhausen a ainsi construit son *Étude n° 2* (Studie II, op. 3, 1954) sur les valeurs  $p = 5$  et  $n = 25$  créant un intervalle élémentaire égal à :

$$\sqrt[25]{5} = 1,06649$$

## 5. GAMME À 53 COMAS

Nous avons vu que le coma pythagoricien rentrait approximativement quatre fois dans un demi-ton diatonique et cinq fois dans un demi-ton chromatique (**Chapitre 3, section 10**). On peut créer une gamme à comas où cette égalité est parfaite. Puisqu'il y a 7 diatoniques et 5 chromatiques dans l'octave, il y aura donc  $7 \times 4 + 5 \times 5 = 53$  comas dans l'octave, chacun ayant une amplitude de :

$$\sqrt[53]{2} = 1,01316$$

Les amplitudes des demi-tons diatonique et chromatique et du ton seront respectivement :

$$d = 2^{\frac{4}{53}} \quad c = 2^{\frac{5}{53}} \quad T = 2^{\frac{9}{53}}$$

## 6. COMPARAISON DES TROIS TEMPÉRAMEMENTS

La mesure d'un intervalle musical par une fraction entière ou l'expression décimale de celle-ci, n'est pas toujours pratique. Félix Savart<sup>6</sup> a proposé de mesurer ce rapport sur une échelle logarithmique et

---

<sup>6</sup> **Félix Savart** (1791-1841) est un physicien français principalement connu pour sa contribution à la loi de Biot-Savart qui relie, en électro-magnétisme, courant induit et champ magnétique. Savart a consacré une part importante de sa carrière à l'acoustique et à la mécanique vibratoire. Il était par ailleurs un excellent violoniste.



Intervalle	Valeur en cent		
	Egal	Pyth.	Zar.
Schisma	2	2	2
Kleisma septimal	8	8	8
Comma enharmonique	14	14	14
Comma syntonique	22	22	22
Comma pythagoricien	23	23	23
Do-Do	0	0	0
Do-Do $\sharp$	100	114	84
Do-Ré $\flat$	100	90	119
Do-Ré	200	204	204
Do-Ré $\sharp$	300	318	275
Do-Mi $\flat$	300	294	316
Do-Mi	400	408	386
Do-Mi $\sharp$	500	522	-
Do-Fa $\flat$	400	384	-
Do-Fa	500	498	498
Do-Fa $\sharp$	600	612	583
Do-Sol $\flat$	600	588	617
Do-Sol	700	702	702
Do-Sol $\sharp$	800	816	773
Do-La $\flat$	800	792	814
Do-La	900	906	884
Do-La $\sharp$	1000	1020	969
Do-Si $\flat$	1000	996	1004
Do-Si	1100	1110	1088
Do-Si $\sharp$	1200	1223	-
Do-Do $\flat$	1100	1086	-
Do-Do	1200	1200	1200

**Figure 41** — Amplitude (en cents de Prony) de différents intervalles dans les tempéraments égal, de Pythagore et de Zarlino.

d'associer au rapport de fréquence  $f_1/f_2$  la mesure  $S$  suivante :

$$S = 1000 \log_{10} \frac{f_1}{f_2}$$

se mesurant en Savart (unité adimensionnelle). Une octave mesure 301 Savarts.

Gaspard de Prony<sup>7</sup> propose une mesure alternative, nettement plus utilisée aujourd'hui, qui associe 100 cent à chaque demi-ton de l'échelle à tempérament égal. Le nombre  $C$  de cent caractérisant un intervalle donné est donc :

$$C = 100 \frac{\log \left( \frac{f_1}{f_2} \right)}{\log \left( \sqrt[12]{2} \right)} = 3,9864S$$

La **Figure 41** donne la mesure en cents des intervalles dans les gammes de Pythagore, de Zarlino et bien tempérée. Un des intérêts de la mesure d'un intervalle en cents (ou en Savarts) est que la mesure du rapport de deux intervalles est égale à la différence de leur mesure en cents. Les notes  $Mi\sharp$ ,  $Fab$ ,  $Si\sharp$  et  $Do\flat$  n'ayant pas été définies dans le tempérament de Zarlino, les intervalles correspondants ne sont pas donnés.

## 7. SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Pour résoudre les difficultés rencontrées au chapitre précédent, de nombreux théoriciens ont proposé des aménagements à la gamme de Pythagore. À dire vrai, ce problème fût une véritable bouteille à encre au Moyen Âge et à la Renaissance.

Nous n'avons présenté que trois tentatives : la gamme harmonique de Zarlino et les tempéraments mésotoniques d'abord qui

<sup>7</sup> Gaspard Clair François Marie Riche, baron de Prony (1755-1839).

conserver des tempéraments inégaux mais apportent, l'une la tierce juste mais quatre demi-tons différents, l'autre la tierce juste mais des quintes faussées.

Nous avons ensuite introduit la gamme à tempérament égal qui tranche le nœud gordien en rendant tous les intervalles également (mais très faiblement) faux !

Nous sommes désormais armés pour étudier les principes de base de l'harmonie au travers de notre prisme habituel de l'arithmétique.



## Accords, période, harmonie

Pourquoi toutes les notes de la gamme ne se marient-elles pas harmonieusement entre elles ? Pourquoi du moins certains intervalles sont-ils plus *musicaux* que d'autres ? On défendra dans ce chapitre l'idée que nous aimons des sons conjoints caractérisés par une courte période et que nous rejetons ceux caractérisés par une longue période.

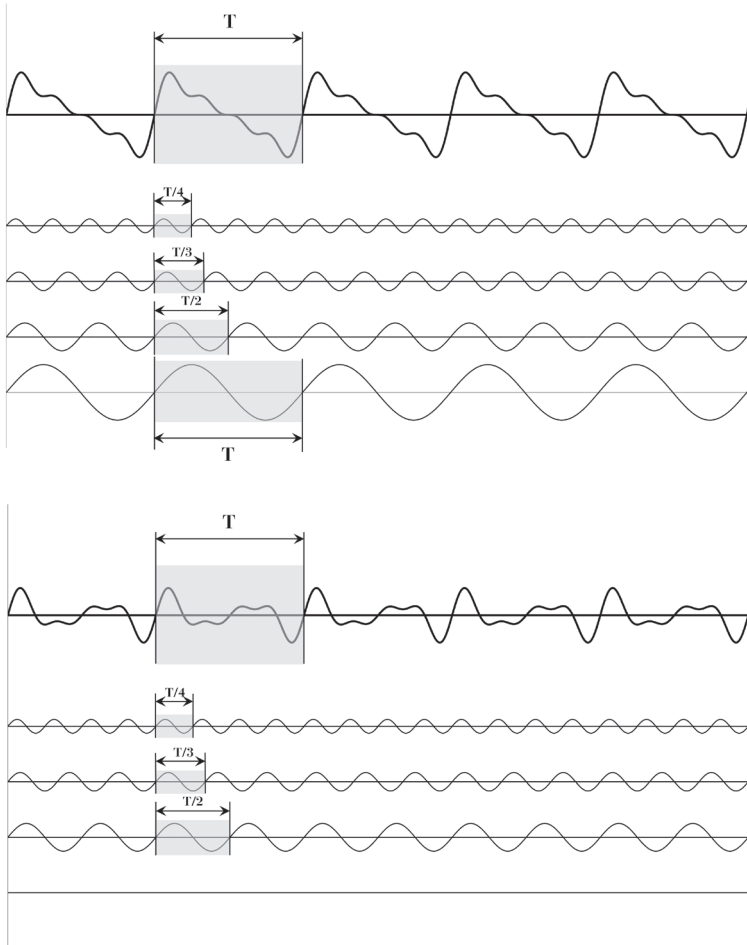
### 1. PÉRIODE D'UNE NOTE UNIQUE

Nous avons vu au **chapitre 1** qu'une note unique est, en première approximation, constituée de la combinaison de plusieurs sons purs dont les fréquences sont les multiples d'une fréquence fondamentale  $f_0$ . La période du signal polychromatique engendré par la combinaison des harmoniques est l'inverse de  $f_0$  :

$$T = \frac{1}{f_0}$$

Pour un La(3), par exemple, dont la fréquence fondamentale est de 440 Hz, la période est de  $1/440 = 0,0023$  seconde.

Notons que si, dans la plupart des cas, le fondamental est effectivement présent dans le signal [**Figure 42**, graphe du haut], son absence éventuelle [**Figure 42**, graphe du bas] ne change pas la période du signal global.



**Figure 42** — La combinaison d'un fondamental de fréquence  $f_0$  et de ses premiers harmoniques de fréquence  $2f_0$ ,  $3f_0$ ,  $4f_0$  (figure du haut) engendre un signal de période  $T = 1/f_0$ . L'absence du fondamental (figure du bas) change la forme du signal mais ne change pas la période. En effet, le fondamental n'est pas nécessairement la fréquence la plus basse du signal, elle est le plus grand commun diviseur des fréquences des harmoniques présents (ici  $f_0 = \text{PGCD}[2f_0; 3f_0; 4f_0]$ ).

La période associée à la note la plus basse d'un accord<sup>1</sup> servira de référence et on évaluera la période de l'accord par rapport à cette référence.

## 2. ACCORD DE DEUX SONS

### 2.1 Période associée à deux notes jouées conjointement

Pour trouver la période d'un son composite constitué des fréquences  $f_1$  et  $f_2$  il faut trouver la fréquence  $f_0$  d'un fondamental dont ils sont les harmoniques, c'est-à-dire trouver le réel  $f_0$  et les entiers  $m$  et  $n$  tels que :

$$f_1 = m f_0$$

et

$$f_2 = n f_0$$

$f_0$  est donc le plus grand commun diviseur<sup>2</sup> des fréquences constituantes ( $f_1, f_2$ ). On peut également écrire :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m}{n}$$

La période recherchée est égale à :

---

<sup>1</sup> En harmonie le terme *accord* est réservé à des combinaisons d'au moins trois notes. On l'utilisera ici, de manière abusive, pour désigner toute combinaison de notes, quel qu'en soit le nombre.

<sup>2</sup> Les notions de plus petit commun multiple (PPCM) et de plus grand commun diviseur (PGCD) sont habituellement définies sur des nombres entiers. Mais on peut généraliser la notion de PGCD aux réels en disant que  $f_0$  est le plus grand commun diviseur de  $f_1$  et  $f_2$  si  $m$  et  $n$  sont les plus petits entiers de la forme  $m = f_1/f_0$  et  $n = f_2/f_0$ .

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{m}{f_1} = \frac{n}{f_2}$$

dont on tire :

$$T = mT_1 = nT_2 \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}$$

Un signal composite est, en conséquence, périodique si les fréquences ou les périodes des signaux constitutifs sont dans des rapports rationnels<sup>3</sup> ou, ce qui revient au même, si un nombre entier de périodes de l'un entre dans un nombre entier de périodes de l'autre [Figure 43, graphe du haut].

Ceci est vrai que les signaux constitutifs soient monochromatiques ou contiennent des harmoniques. En effet, si  $f_0$  est le plus grand diviseur commun de  $(f_1, f_2)$ , il l'est aussi de  $(f_1, pf_1, f_2, qf_2)$ , quels que soient les entiers  $p$  et  $q$ . Pour analyser la période d'un son composite, seules les fréquences fondamentales de chaque son doivent être considérées; leurs harmoniques n'interviennent pas dans sa détermination [Figure 43, graphe du bas].

La Figure 44 confirme, *a contrario*, que deux sons dont les fréquences sont dans un rapport irrationnel engendrent un signal combiné qui n'est pas périodique.

## 2.2 Période et intervalles

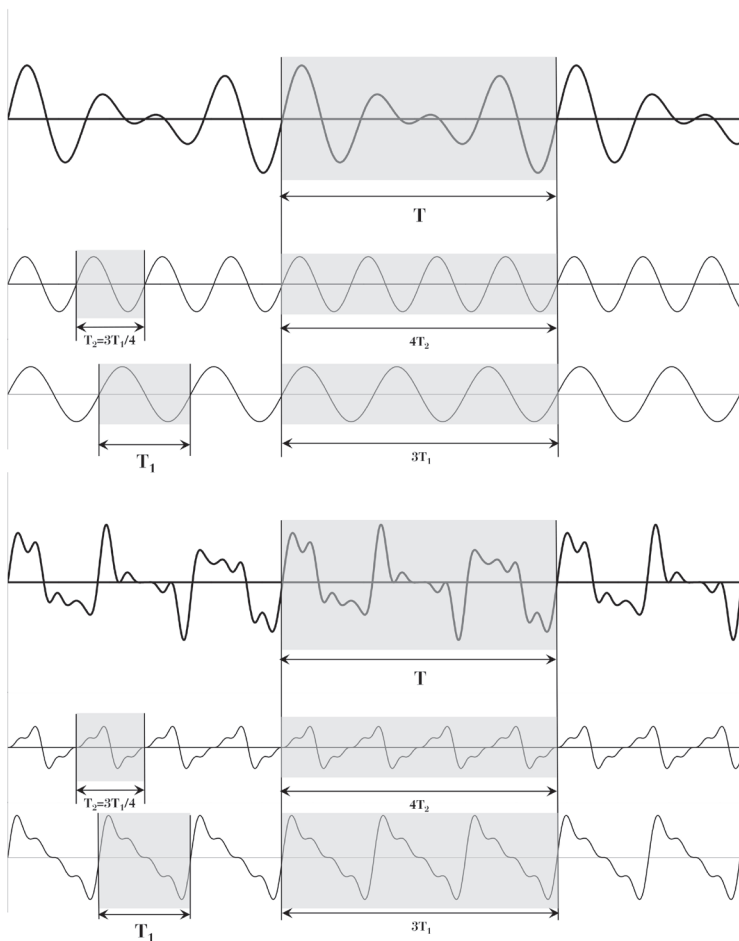
La Figure 23 définit les intervalles musicaux par un rapport rationnel de fréquences. Les fréquences de deux notes séparées par une tierce majeure sont, par exemple, liées par la relation :

$$f_2 = \frac{3^4}{2^6} f_1$$

---

<sup>3</sup> Voir, en fin de chapitre, la note sur les nombres réels et rationnels.





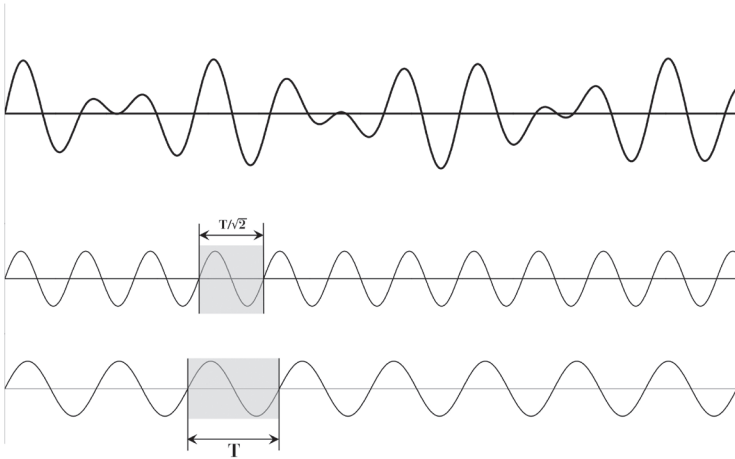
**Figure 43** — Un signal composite formé de deux sons purs dont les périodes sont dans un rapport entier (ici :  $3/4$ ) est périodique. Ceci se vérifie, que les signaux constitutifs soient monochromatiques (graphe du haut) ou harmoniques (graphe du bas).

ce qu'on peut réécrire sous la forme :

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2^6}{f_1} = \frac{3^4}{f_2} \rightarrow n = 2^6 \text{ et } m = 3^4$$

On voit donc que les entiers  $m$  et  $n$  introduits précédemment sont respectivement le dénominateur et le numérateur du rapport de fréquence rationnel définissant l'intervalle. On ne peut pas trouver de valeurs plus petites pour  $m$  et  $n$  car cela signifierait qu'il existe un commun diviseur à une puissance de 3 et à une puissance de 2, ce qui est impossible (incommensurabilité des quintes et des octaves).

La période du son combiné est donc, dans cet exemple de deux sons séparés par une tierce majeure, 81 fois ( $3^4$ ) plus longue que celle associée à la plus haute des deux notes ou 64 fois ( $2^6$ ) celle associée à la plus basse des deux notes.



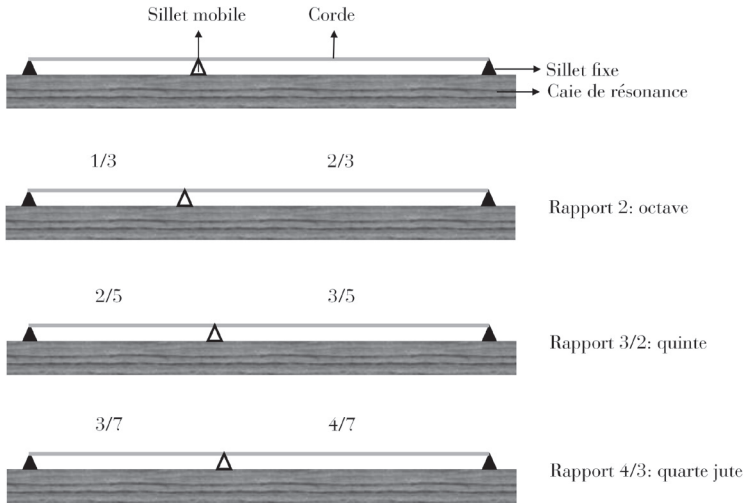
**Figure 44** — Si les périodes des sons constitutifs sont dans un rapport irrationnel (ici :  $\sqrt{2}$ ), le signal résultant est non périodique.

Le coefficient par lequel il faut multiplier la période, associée à la note la plus basse lorsqu'elle est jouée conjointement avec une note se trouvant à un intervalle donné au-dessus de celle-ci, est repris à la **Figure 45**. Les intervalles y sont classés dans l'ordre croissant des valeurs de ce coefficient **qu'on prend comme critère de musicalité de l'intervalle**.

L'intervalle de quarte augmentée était appelé au Moyen Âge *diabolus in musica*; en effet, il lui correspond un son polyphonique de très longue période qui nous est plutôt désagréable. Le classement que fait apparaître le critère de la période semble, au regard du tableau, cohérent avec les règles de l'harmonie.

Nom de l'intervalle	Facteur multipliant la période de la note la plus basse
Octave	1
Quinte juste	2
Quarte juste	3
Seconde majeure	$2^3 = 8$
Septième mineure	$3^2 = 9$
Sixième majeure	$2^4 = 16$
Tierce mineure	$3^3 = 27$
Tierce majeure	$2^6 = 64$
Sixième mineure	$3^4 = 81$
<b>Septième majeure</b>	$2^7 = 128$
<b>Seconde mineure</b>	$3^5 = 243$
<b>Quarte augmentée (triton)</b>	$2^9 = 512$
<b>Quinte diminuée</b>	$3^6 = 729$

**Figure 45** — Lorsqu'on joue simultanément deux notes séparées par un intervalle donné, la période du son conjoint est celle de la note la plus basse multipliée par le nombre apparaissant dans la colonne de droite.



**Figure 46** — Les accords de deux sons peuvent aisément être étudiés grâce à une corde unique posée sur des silleux fixes à ses deux extrémités. Un sillet mobile permet de découper la corde en deux portions et de produire tous les types d'intervalles (en jouant les deux cordes l'une après l'autre) ou d'accords (en les jouant simultanément).

### 3. FRÉQUENCES FANTÔMES...

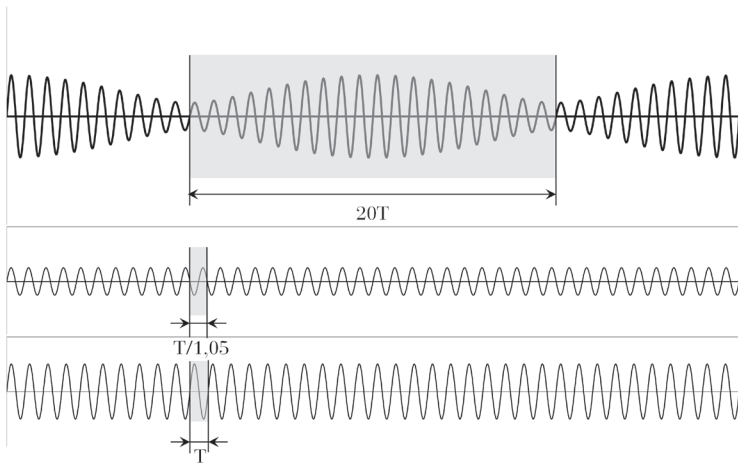
#### 3.1 Battements

Pour vérifier l'accord d'une guitare, on peut jouer un La en position 5 sur la sixième corde (la plus grave) et jouer la même note sur la cinquième corde à vide. On adapte alors la tension de cette dernière jusqu'à ce que les deux sons aient exactement la même hauteur. Ce faisant, on ressent nettement une vibration du manche qui est d'autant plus lente que l'on se rapproche de l'accord parfait: c'est le phénomène de battement.

Deux sons dont les fréquences sont très proches engendrent en effet un son conjoint de très grande période. Ainsi les fréquences de 100 et 105 Hz ont-elles un fondamental commun de 5 Hz; deux cordes vibrant à ces fréquences engendrent donc conjointement un son dont la période est de 0,2 seconde [Figure 47].

On constate que :

- ▷ le nombre de battements par seconde est d'autant plus faible que les fréquences constitutives ( $f_1, f_2$ ) sont proches;
- ▷ que l'amplitude des battements est d'autant plus marquée que les amplitudes ( $a, b$ ) sont voisines.



**Figure 47** — Phénomène de battement : deux sons de périodes proches engendrent un son conjoint dont l'amplitude varie sur une période qui est la différence des périodes des deux signaux constitutifs..

Les battements ne sont pas nécessairement négatifs d'un point de vue musical. Jean Bosquet<sup>4</sup> indique par exemple que « les battements lents ne sont pas désagréables, ils sont même recherchés dans certains jeux d'orgues (unda maris et voix céleste) mais ils deviennent d'autant plus choquants pour l'oreille que leur fréquence augmente. Dans l'aigu (vers 500 à 1000 Hz), 30 à 40 battements par seconde produisent une sorte de roulement continu extrêmement dur et déplaisant. Au delà de ce chiffre, le degré de dureté diminue progressivement jusqu'à disparaître complètement ». Helmholtz<sup>5</sup> propose d'ailleurs une hiérarchie musicale des intervalles basée sur une mesure de dureté qui « atteint son maximum pour 33 battements, et décroît ensuite pour un nombre croissant de battements ».

En conséquence, nous restreindrons dorénavant l'usage du mot *battement* à des interférences entre des sons dont la différence de fréquence est de l'ordre de grandeur de 33 Hz. Quelques observations :

- ▷ Une note seule, jouée sur un instrument harmonique, ne produit pas de battements puisque la différence de fréquence entre deux harmoniques n'est jamais inférieure à la fréquence du fondamental.
- ▷ Si l'on joue deux notes conjointes, des battements apparaissent rarement entre les fondamentaux, sauf si l'intervalle est petit (la différence entre les fondamentaux de  $\text{Ré}_3$  -293 Hz- et  $\text{Mi}_3$

---

<sup>4</sup> BOSQUET J., *Histoire succincte et représentation schématique des tempéraments musicaux*, Académie royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 6<sup>e</sup> série, t. 19, 2008, p. 85 sqq.

<sup>5</sup> HELMHOLTZ H., *Théorie physiologique de la musique*, traduction française de G. Guérout, Masson (1868). Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, né en 1821 et mort en 1884 à Potsdam est connu pour ses travaux appliquant la physique à la physiologie et pour ses contributions à la thermodynamique. Dans le domaine de l'acoustique il a notamment aidé à élucider les mécanismes physiologiques permettant la perception de la hauteur des sons (*tonotopie*).

### SACRÉ SIMPSON...

Mathématiquement, le phénomène de battement est clairement mis en évidence par la formule de Simpson :

$$\begin{aligned} & a \cos(2\pi f_1 t) + b \cos(2\pi f_2 t) = \\ & (a+b) \cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \\ & + (a-b) \sin\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \end{aligned}$$

qui montre que la somme de deux sons purs de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  peut s'écrire comme le produit d'une oscillation à la fréquence moyenne  $(f_1+f_2)/2$  et d'une modulation\* de l'amplitude de cette oscillation entre les valeurs  $(a+b)$  et  $(a-b)$  à la fréquence  $(f_1-f_2)/2$ . Notons que, d'un point de vue perceptif, les battements ne se répètent pas à la fréquence  $(f_1-f_2)/2$  mais à la fréquence  $(f_1-f_2)$ . Cette modulation est bien visible à la **Figure 47**.

\* Le mot est employé ici dans son sens physique (Larousse: *variation dans le temps d'une caractéristique d'un phénomène*) et pas dans son sens musical (Larousse: *changements de ton, d'accent ou d'intensité*).

-331 Hz- est de 37 Hz) ou les notes graves (la différence entre les fondamentaux de Sol<sub>0</sub> -49 Hz- et Mi<sub>1</sub> -83 Hz- est de 34 Hz).

- ▷ On trouvera par contre fréquemment des battements entre les harmoniques de deux notes jouées simultanément, ainsi si on joue un La<sub>3</sub> (440 Hz) et un Do<sub>3</sub><sup>#</sup> (557 Hz), l'harmonique 5 de la première note (2200 Hz) n'est distante que de 28 Hz de l'harmonique 4 de la seconde (2228 Hz).
- ▷ L'amplitude des harmoniques diminuant habituellement avec leur rang, les battements sont d'autant plus importants

qu'ils interviennent entre harmoniques d'ordres voisins et d'amplitudes semblables.

Des battements apparaissent aussi par l'effet :

- ▷ de l'inharmonicité des instruments qui ne génèrent pas toujours des harmoniques parfaitement équidistants. Ceci fait apparaître des battements au sein même d'une note unique et rend battant des intervalles, comme la quinte, qui sont habituellement sans battements ;
- ▷ du défaut d'accordage des instruments dont on constate qu'il est d'autant plus perceptible qu'on monte dans les harmoniques. En effet, dans un accord de La mineur, un désaccord de 5 Hz sur le fondamental (445 plutôt que 440 pour La<sub>3</sub>) crée un battement de 30 Hz entre l'harmonique 6 (Mi<sub>6</sub> altéré) de la tonique et l'harmonique 4 de la dominante (Mi<sub>6</sub> juste).

### 3.2 Sons résultants

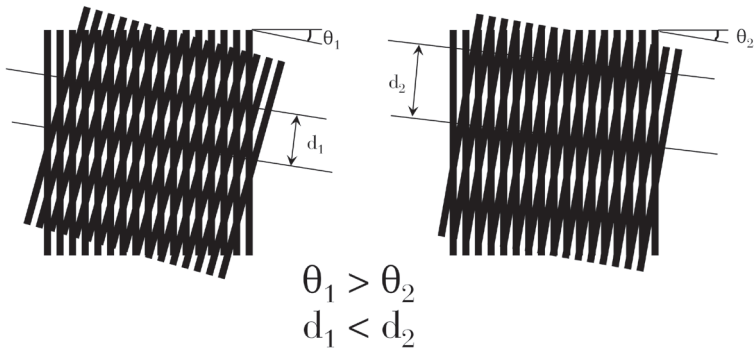
Une analyse détaillée du spectre associé au son de deux notes conjointes montre que, outre les harmoniques de chacun des deux sons, le signal résultant comporte des composantes à toutes les fréquences de la forme :

$$mf_1 + nf_2$$

où m et n sont des entiers pouvant être positifs ou négatifs. Ces composantes, appelées sons résultants ou sons de combinaison, sont le fruit d'une imperfection<sup>6</sup> du comportement des instruments de musique (sons résultants *objectifs* mesurables par un microphone) ou de l'oreille (sons résultants *subjectifs* seulement perçus par le sujet).

<sup>6</sup> Les physiciens parlent de *non-linéarité* et de comportement non-linéaire du système. Voir la note mathématique sur ce sujet en fin de chapitre.





**Figure 48** — Le phénomène de battement s'apparente à celui de moiré. Si on superpose deux réseaux de lignes et qu'on crée un désalignement d'un angle  $\theta$ , des bandes claires et sombres apparaissent (moiré). Plus on est proche d'un alignement parfait, plus la distance entre les lignes s'accroît.

Les sons résultants les plus importants sont :

- ▷ le premier son résultant différentiel de fréquence  $f_1 - f_2$  ;
- ▷ le son différentiel cubique de fréquence  $2f_1 - f_2$  <sup>7</sup> ;
- ▷ les premiers sons de combinaison  $f_1 + f_2, 2f_1 + f_2, f_1 + 2f_2$ , etc...

Le son résultant associé à deux harmoniques d'un même son n'enrichit pas le spectre car il en fait déjà partie. En effet si  $f_1$  et  $f_2$  sont respectivement les harmoniques  $p$  et  $q$  d'un même fondamen-

<sup>7</sup> Jean Bosquet (*op. cit.*) en décrit une application pratique qui illustre bien le propos : « Dans le deuxième mouvement, 'grave', de la pièce d'orgue dite souvent Fantaisie en Sol, BWV 572, J.-S. Bach écrit, à la mesure 66, un Si grave suivi du Si à l'octave inférieure qui n'existe quasi jamais, les claviers d'orgue commençant en général sur Do. Pour obtenir un Si très grave (en dessous du Do inférieur), il suffit de maintenir le Si le plus grave du pédalier [notre  $f_2$ ] et de l'accompagner du Fa# une quarte plus bas [notre  $f_1 = 3f_2/4$ ] ; l'effet est saisissant lorsque, comme il se doit, cette pièce est jouée avec une registration fournie. » Le son cubique est bien dans ce cas à la fréquence  $2f_1 - f_2 = f_2/2$ , soit une octave en-dessous du Si le plus grave !

tal  $f_0$ , les sons résultants sont également des harmoniques du fondamental :

$$mf_1 + nf_2 = m \cdot pf_0 + n \cdot qf_0 = (mp + nq) f_0$$

#### 4. ACCORDS DE TROIS SONS

Un accord de trois sons (Do-Mi-Sol par exemple) peut être vu comme la combinaison de deux accords de deux sons (Do-Mi et Do-Sol). À chaque paire de notes est associée un intervalle et donc un multiplicateur de la période [Figure 45]. Le multiplicateur résultant est le *plus petit commun multiple* des multiplicateurs associés à chaque intervalle. De ce principe, on peut tirer quelques conclusions générales :

- ▷ L'attrait de l'accord majeur (Do-Mi-Sol), qui est constitué d'une quinte juste (Do-Sol) et d'une tierce majeure (Do-Mi), s'explique par le fait que la période de la note la plus basse (Do) n'est augmentée *que* du facteur 64 (le plus petit commun multiple entre 2 et 64 est 64). L'accord mineur (La-Do-Mi) l'emporte cependant sur ce plan de la période puisque, en combinant une tierce mineure (La-Do) et une quinte juste (La-Mi), il crée un ensemble dont la période (facteur  $54 = 2 \times 27$ ) est encore plus réduite que celle de l'accord majeur (facteur 64).
- ▷ D'une manière générale, il faut éviter de combiner les intervalles dont le multiplicateur est une puissance de 3 avec ceux dont le multiplicateur est une puissance de 2 car le plus petit commun multiple est alors simplement le produit des deux multiplicateurs. L'accord Do-Mib-La est, par exemple, constitué d'une tierce mineure (multiplicateur  $3^3 = 27$ ) et d'une sixième majeure (multiplicateur  $2^4 = 16$ ) et son multiplicateur global est 432.

Intervalle 1	Facteur 1	Intervalle 2	Facteur 2	Facteur résultant
Quarte juste	3	Quinte juste	2	$2 \cdot 3 = 6$
Seconde majeure	$2^3 = 8$	Quinte juste	2	$2^3 = 8$
Quarte juste	3	Septième mineure	$3^2 = 9$	$3^2 = 9$
Seconde majeure	$2^3 = 8$	Sixième majeure	$2^4 = 16$	$2^4 = 16$
Quinte juste	2	Sixième majeure	$2^4 = 16$	$2^4 = 16$
Quinte juste	2	Septième mineure	$3^2 = 9$	$2 \cdot 3^2 = 18$
Seconde majeure	$2^3 = 8$	Quarte juste	3	$2^3 \cdot 3 = 24$
Tierce mineure	$3^3 = 27$	Quarte juste	3	$3^3 = 27$
Tierce mineure	$3^3 = 27$	Septième mineure	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$
Quarte juste	3	Sixième majeure	$2^4 = 16$	$2^4 \cdot 3 = 48$
Tierce mineure	$3^3 = 27$	Quinte juste	2	$2 \cdot 3^3 = 54$
Seconde majeure	$2^3 = 8$	Tierce majeure	$2^6 = 64$	$2^6 = 64$
Tierce majeure	$2^6 = 64$	Quinte juste	2	$2^6 = 64$
Tierce majeure	$2^6 = 64$	Sixième majeure	$2^4 = 16$	$2^6 = 64$
Seconde majeure	$2^3 = 8$	Septième mineure	$3^2 = 9$	$2^3 \cdot 3^2 = 72$
Tierce mineure	$3^3 = 27$	Sixième mineure	$3^4 = 81$	$3^4 = 81$
Quarte juste	3	Sixième mineure	$3^4 = 81$	$3^4 = 81$
Sixième mineure	$3^4 = 81$	Septième mineure	$3^2 = 9$	$3^4 = 81$
Seconde majeure	$2^3 = 8$	Septième majeure	$2^7 = 128$	$2^7 = 128$
Tierce majeure	$2^6 = 64$	Septième majeure	$2^7 = 128$	$2^7 = 128$
Quinte juste	2	Septième majeure	$2^7 = 128$	$2^7 = 128$
Sixième majeure	$2^4 = 16$	Septième majeure	$2^7 = 128$	$2^7 = 128$
Sixième majeure	$2^4 = 16$	Septième mineure	$3^2 = 9$	$2^4 \cdot 3^2 = 144$
Quinte juste	2	Sixième mineure	$3^4 = 81$	$2 \cdot 3^4 = 162$
Tierce majeure	$2^6 = 64$	Quarte juste	3	$2^6 \cdot 3 = 192$
Seconde majeure	$2^3 = 8$	Tierce mineure	$3^3 = 27$	$2^3 \cdot 3^3 = 216$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	Tierce mineure	$3^3 = 27$	$3^5 = 243$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	Quarte juste	3	$3^5 = 243$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	Sixième mineure	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	Septième mineure	$3^2 = 9$	$3^5 = 243$
Quarte juste	3	Septième majeure	$2^7 = 128$	$2^7 \cdot 3 = 384$
Tierce mineure	$3^3 = 27$	Sixième majeure	$2^4 = 16$	$2^4 \cdot 3^3 = 432$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	Quinte juste	2	$2 \cdot 3^5 = 486$

**Figure 49** — Un accord combinant les intervalles de la première et de la troisième colonne engendre un son polyphonique dont la période est celle de la note la plus basse multipliée par le facteur de la cinquième colonne. Si on adhère au principe qui associe harmonie et courte période, on trouve ici les accords de trois notes classés du plus harmonieux au moins harmonieux. Suite du tableau : voir **Figure 50**.

# DES CHIFFRES ET DES NOTES

Intervalle 1	Facteur 1	Intervalle 2	Facteur 2	Facteur résultant
Seconde majeure	$2^3 = 8$	Quarte triton	$2^9 = 512$	$2^9 = 512$
Tierce majeure	$2^6 = 64$	Quarte triton	$2^9 = 512$	$2^9 = 512$
Quarte triton	$2^9 = 512$	Quinte juste	2	$2^9 = 512$
Quarte triton	$2^9 = 512$	Sixième majeure	$2^4 = 16$	$2^9 = 512$
Quarte triton	$2^9 = 512$	Septième majeure	$2^7 = 128$	$2^9 = 512$
Tierce majeure	$2^6 = 64$	Septième mineure	$3^2 = 9$	$2^6 \cdot 3^2 = 576$
Seconde majeure	$2^3 = 8$	Sixième mineure	$3^4 = 81$	$2^3 \cdot 3^4 = 648$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	Quinte diminuée	$3^6 = 729$	$3^6 = 729$
Tierce mineure	$3^3 = 27$	Quinte diminuée	$3^6 = 729$	$3^6 = 729$
Quarte juste	3	Quinte diminuée	$3^6 = 729$	$3^6 = 729$
Quinte diminuée	$3^6 = 729$	Sixième mineure	$3^4 = 81$	$3^6 = 729$
Quinte diminuée	$3^6 = 729$	Septième mineure	$3^2 = 9$	$3^6 = 729$
Septième mineure	$3^2 = 9$	Septième majeure	$2^7 = 128$	$2^7 \cdot 3^2 = 1152$
Sixième mineure	$3^4 = 81$	Sixième majeure	$2^4 = 16$	$2^4 \cdot 3^4 = 1296$
Quinte diminuée	$3^6 = 729$	Quinte juste	2	$2 \cdot 3^6 = 1458$
Quarte juste	3	Quarte triton	$2^9 = 512$	$2^9 \cdot 3 = 1536$
Tierce mineure	$3^3 = 27$	Tierce majeure	$2^6 = 64$	$2^6 \cdot 3^3 = 1728$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	Seconde majeure	$2^3 = 8$	$2^3 \cdot 3^5 = 1944$
Tierce mineure	$3^3 = 27$	Septième majeure	$2^7 = 128$	$2^7 \cdot 3^3 = 3456$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	Sixième majeure	$2^4 = 16$	$2^4 \cdot 3^5 = 3888$
Quarte triton	$2^9 = 512$	Septième mineure	$3^2 = 9$	$2^9 \cdot 3^2 = 4608$
Tierce majeure	$2^6 = 64$	Sixième mineure	$3^4 = 81$	$2^6 \cdot 3^4 = 5184$
Seconde majeure	$2^3 = 8$	Quinte diminuée	$3^6 = 729$	$2^3 \cdot 3^6 = 5832$
Sixième mineure	$3^4 = 81$	Septième majeure	$2^7 = 128$	$2^7 \cdot 3^4 = 10368$
Quinte diminuée	$3^6 = 729$	Sixième majeure	$2^4 = 16$	$2^4 \cdot 3^6 = 11664$
Tierce mineure	$3^3 = 27$	Quarte triton	$2^9 = 512$	$2^9 \cdot 3^3 = 13824$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	Tierce majeure	$2^6 = 64$	$2^6 \cdot 3^5 = 15552$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	septième majeure	$2^7 = 128$	$2^7 \cdot 3^5 = 31104$
Quarte triton	$2^9 = 512$	Sixième mineure	$3^4 = 81$	$2^9 \cdot 3^4 = 41472$
Tierce majeure	$2^6 = 64$	Quinte diminuée	$3^6 = 729$	$2^6 \cdot 3^6 = 46656$
Quinte diminuée	$3^6 = 729$	Septième majeure	$2^7 = 128$	$2^7 \cdot 3^6 = 93312$
Seconde mineure	$3^5 = 243$	Quarte triton	$2^9 = 512$	$2^9 \cdot 3^5 = 124416$
Quinte diminuée	$3^6 = 729$	Quarte triton	$2^9 = 512$	$2^9 \cdot 3^6 = 373248$

**Figure 50** — Suite du tableau précédent.

- ▷ Le pire accord imaginable est indiscutablement l'accord qui combinerait Do, Ré♭ et Sol♭ (seconde mineure et quarte triton) qui multiplie la période du Do par... 124.416 ! L'accord combinant quarte triton et quinte diminuée est encore pire mais il fait apparaître l'enharmonie Fa#-Sol♭ et a donc peu de sens.

Les **Figures 49 et 50** donnent le coefficient multiplicateur de la période pour toutes les combinaisons possibles de deux intervalles.

#### 4.1 Renversements

Un accord renversé est un accord dont la note la plus basse n'est pas la tonique. Les renversements de l'accord de Do majeur (Do-Mi-Sol) sont par exemple Mi-Sol-Do ou Sol-Do-Mi [**Figure 51**]. Ces accords sont-ils équivalents d'un point de vue harmonique ?



**Figure 51** — Accord de Do majeur et ses différents renversements.

L'accord de Do-Mi-Sol est constitué d'une tierce majeure (Do-Mi) et d'une quinte juste (Do-Sol) ; le facteur associé est donc 64.

L'accord Mi-Sol-Do contient, lui, une tierce mineure (Mi-Sol) et une sixte mineure (Mi-Do). Le coefficient multiplicateur de la période du Mi seul est donc de  $3^4 = 81$ . Mais pour comparer des choses comparables, on devrait se référer à la tonique de l'accord dans son état fondamental (Do grave) qui est une tierce majeure en dessous du Mi. Le premier renversement Mi-Sol-Do est donc caractérisé par une période qui est  $3^4 \times 2^6 / 3^4 = 2^6 = 64$  fois celle de la tonique.

Le second renversement, Sol-Do-Mi, comporte une quarte juste (Sol-Do) et une sixième majeure (Sol-Mi) ; il conduit à augmenter la période du Sol d'un facteur  $2^5 = 48$  et celle du Do (une quarte juste au dessus) de  $48 \times 4/3 = 64$ .

Les renversements sont donc, au regard du critère choisi, musicalement équivalents... si on les rapporte à la même référence.

## 4.2 Accords enrichis

Les intervalles de quarte juste, de neuvième majeure, de septième mineure et de sixième majeure sont caractérisés par un facteur d'amplification de la période faible, respectivement 3, 4, 9 et 16. Cette propriété explique le caractère harmonieux des accords augmentés associés.

## 4.3 Accords du tempérament égal

Les rapports de fréquences dans la gamme tempérée sont tous irrationnels. Deux ou trois notes jouées ensemble forment donc **nécessairement** un son de période infinie. Si le critère de période proposé ici était valide, ces sons seraient... parfaitement désagréables à l'oreille humaine. On peut en tirer deux conclusions :

- ▷ soit la théorie qui lie harmonie et courte période est fausse... mais elle a quand même l'avantage d'expliquer, parmi d'autres choses, le rejet de la seconde mineure, de la quarte augmentée et de la quinte diminuée par la théorie classique de l'harmonie ;
- ▷ soit on doit admettre que notre appareil auditif assimile le rapport de fréquence irrationnel au rapport rationnel le plus proche et *fait comme si...*

La question sera partiellement tranchée au chapitre 9 qui montrera que la hauteur tonale d'un son musical n'est pas composée d'une fréquence unique mais plutôt d'un intervalle de fréquences d'une certaine largeur<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup> Le terme technique est *bande de fréquences*.

## 5. NOTES MATHÉMATIQUES

### 5.1 Nombres rationnels et irrationnels

Plutôt que de dire que *deux longueurs sont dans un rapport entier*, un mathématicien dira que leur rapport est un nombre rationnel. Un nombre qui n'est pas rationnel est dit *irrationnel*; les nombres  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt{2}$  sont des exemples bien connus de nombres irrationnels.

À tout nombre irrationnel  $x$  on peut toujours associer deux nombres rationnels  $r_1$  et  $r_2$  qui *encadrent*  $x$  d'aussi près qu'on le souhaite. Ainsi si  $\varepsilon$  est un nombre positif arbitrairement petit on peut toujours trouver  $r_1$  et  $r_2$  tels que :

$$r_1 < x \text{ et } x - r_1 < \varepsilon$$

$$x < r_2 \text{ et } r_2 - x < \varepsilon$$

On peut encore dire que  $\mathbb{Q}$  (l'ensemble des rationnels) est *dense* dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des réels et que l'adhérence de  $\mathbb{Q}$  est  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que le plus petit ensemble fermé contenant  $\mathbb{Q}$  est  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{Q}$  est par ailleurs de mesure nulle : les nombres rationnels, contrairement à ce qu'on pourrait intuitivement penser, sont des exceptions et les nombres irrationnels la norme.

Un important paradoxe lié à ces propriétés est celui du caractère dual de tout nombre représentant une propriété attachée à un système physique : ce nombre est, le plus souvent, irrationnel mais le résultat de sa mesure, étant affecté d'une précision finie, est par essence décimal donc rationnel.

### 5.2 Non-linéarité

L'acoustique est fondamentalement une science linéaire. La linéarité physique implique deux propriétés : d'une part l'effet lié à une

cause est proportionnel à l'amplitude de celle-ci et, d'autre part, l'effet conjoint de deux causes est égal à la somme des effets qu'aurait eu chaque cause si elle avait agi seule. On écrira cette deuxième propriété d'un système linéaire de la manière suivante :

$$p_1 \oplus p_2 = p_1 + p_2$$

où le symbole  $\oplus$  représente l'opérateur de combinaison des signaux sonores.

Trois phénomènes introduisent une faible dose de non-linéarité en acoustique :

- ▷ la physique de l'instrument (amortissement par exemple) ;
- ▷ la physiologie de l'oreille ;
- ▷ la propagation dans l'air à des niveaux sonores élevés.

On peut, de manière simplifiée, écrire que, dans ce contexte non-linéaire :

$$p_1 \oplus p_2 = p_1 + p_2 + \epsilon (p_1 + p_2)^2$$

où  $\epsilon$  désigne un coefficient nettement plus petit que l'unité. Si les signaux 1 et 2 sont monochromatiques de fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , ce terme croisé s'écrit (formules de Simpson) :

$$\begin{aligned} \cos^2(\omega_1 t) + 2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) + \cos^2(\omega_2 t) = \\ 1 + \frac{1}{2} (\cos(2\omega_1 t) + \cos(2\omega_2 t)) + \cos(\omega_1 + \omega_2) t + \cos(\omega_1 - \omega_2) t \end{aligned}$$

en introduisant la pulsation  $\omega$  définie comme  $2\pi$  fois la fréquence :  $\omega = 2\pi f$ .

On constate donc que la non-linéarité crée des composantes spectrales additionnelles aux fréquences  $2f_1$ ,  $2f_2$ ,  $f_1 + f_2$  et  $f_1 - f_2$ .

Si on réalise le même calcul avec des sons harmoniques, on voit



que toutes les combinaisons  $mf_1 + nf_2$  apparaissent du fait de la réponse non-linéaire du système.

## 6. SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Plusieurs sons harmoniques dont les fréquences fondamentales sont dans un rapport entier engendrent un son combiné qui est périodique. Nous avons proposé de mesurer la qualité musicale de l'ensemble par le rapport de la période du son combiné et de celle associée à la tonique de l'accord. Ce faisant nous avons retrouvé une hiérarchie des intervalles et des accords qui est compatible avec les règles fondamentales de l'harmonie.

Nous avons, par ailleurs, évoqué les concepts de battement et de sons résultants.

Quittons maintenant le solfège et penchons-nous sur les instruments de musique pour comprendre pourquoi la plupart d'entre eux produisent des sons harmoniques.



## Physique des instruments de musique

Les sons musicaux sont, en première analyse, harmoniques: ils sont la combinaison de signaux élémentaires dont les fréquences sont des multiples d'une fréquence fondamentale qui détermine la hauteur tonale du son considéré. Ce chapitre tente d'expliquer les mécanismes physiques par lesquels les instruments engendrent naturellement ce type de sons.

L'accent sera mis sur les instruments à vent mais le chapitre se conclura par une section sur les instruments à corde et une autre sur les percussions.

En ce qui concerne les instruments à vent notre cheminement sera le suivant.

- ▷ Dans un premier temps, nous allons essayer de comprendre intuitivement par quel mécanisme le son se propage dans l'air et pourquoi cette propagation se fait à vitesse finie.
- ▷ Nous pourrions alors introduire la notion de longueur d'onde  $\lambda$  qui joue, dans l'espace, le même rôle que joue, dans le temps, la période  $T$ .
- ▷ Les ondes sonores se réfléchissent à l'extrémité d'un tuyau comme la lumière sur un miroir. Nous montrerons que deux types fondamentalement différents de réflexions se produisent suivant que ce tube est ouvert ou fermé.
- ▷ Au départ de l'observation d'une balançoire nous présente-

rons le phénomène de résonance par lequel une très grande classe de systèmes physiques, des instruments de musique aux lasers, des quartz aux ponts de chemin de fer, répondent préférentiellement à certaines fréquences qu'on appelle les fréquences de résonances.

- ▷ On pourra alors introduire une typologie élémentaire des instruments à vent basée sur les conditions aux deux extrémités du tuyau : côté bouche (biseau ou anche) et côté opposé (tube ouvert ou fermé).
- ▷ Quelques éléments complémentaires seront présentés tels que la forme de la perce et du pavillon ou le phénomène de couplage entre système excitateur et résonances du tuyau.
- ▷ Différents modes de variation de la hauteur seront enfin présentés : coulisse, pistons et trous de jeux.

Les instruments de musique sont des systèmes physiques très complexes et leur description détaillée dépasse largement le cadre et l'ambition du présent ouvrage. Nous nous contenterons donc, conformément à l'objectif pédagogique poursuivi, d'une description intuitive et qualitative des phénomènes. De nombreux livres permettront au lecteur qui le désire d'aller plus loin dans ce domaine passionnant ; citons, par ordre croissant de complexité et de date de parution, les livres de Leipp<sup>1</sup>, Fletcher et Rossing<sup>2</sup> et enfin Chaigne et Kergomard<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> LEIPP E., *Acoustique et musique*, Masson, 1971.

<sup>2</sup> FLETCHER N.H. et ROSSING T.D., *The Physics of Musical Instruments*, Springer, 1998.

<sup>3</sup> CHAIGNE A. et KERGOMARD J., *Acoustique des instruments de musique*, Belin, 2008.

## 1. PROPAGATION DU SON DANS L'AIR

Le son se propage dans l'air<sup>4</sup> : lorsque je parle, je mets mes cordes vocales en vibration et elles entraînent avec elles l'air qui les entoure. Ce mouvement se propage aux particules voisines puis aux voisines des voisines et finalement, de proche en proche, à celles situées dans l'oreille externe d'un auditeur, à proximité de son tympan. Cette fine membrane se met alors elle-même en vibration et engendre la sensation auditive après passage dans l'oreille moyenne, l'oreille interne, le nerf auditif et enfin les zones spécialisées du cortex cérébral [Chapitre 10]. Cette propagation entre la source (mes cordes vocales) et le récepteur (le tympan) ne se fait pas instantanément : le son se propage à une vitesse finie qui dépend du milieu traversé. Dans l'air cette vitesse est, à la température standard de 15°C, de 340 mètres par seconde<sup>5</sup>.

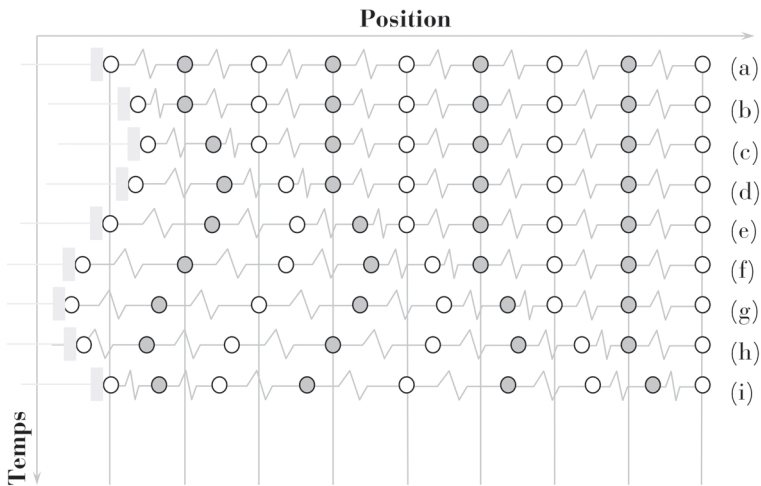
La propagation de proche en proche à vitesse finie dans un milieu matériel pesant et élastique se comprend bien en observant la **Figure 52** qui représente des petites masses connectées par des ressorts, la masse la plus à gauche étant attachée rigidement à un piston auquel on communique un mouvement de va-et-vient<sup>6</sup>. Chaque **ligne** du diagramme (notées de **a** à **i** sur la **Figure**

<sup>4</sup> Il se propage également dans tous les milieux matériels (gaz, liquide, solide) mais il ne se propage pas dans le vide, à l'inverse des ondes électromagnétiques, la lumière notamment.

<sup>5</sup> Dans les gaz parfaits, la vitesse du son dépend de la température au travers de la relation  $c = \sqrt{\gamma RT}$  où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques à pression ( $c_p$ ) et volume ( $c_v$ ) constants ( $\gamma=1.4$  pour les gaz diatomiques),  $R$  est la constante des gaz parfaits ( $R=c_p-c_v=287 \text{ J/(kg.K)}$  pour l'air) et  $T$  est la température absolue soit la température en degrés centigrades plus 273,15 ( $15^\circ\text{C} = 288,15\text{K}$ ).

<sup>6</sup> Cette section et les deux suivantes font de larges emprunts à MIGEOT J.-L., COYETTE J.-P., LIELENS G., *Phénomènes fondamentaux de l'acoustique linéaire*, Cachan, Lavoisier, 2015.

52) correspond à la position des masses à un instant donné, chaque **colonne** montre la position d'une des masses à différents instants. Cet ensemble de masses et de ressorts fournit un modèle phénoménologique utile d'une colonne d'air dans un tube : les masses individuelles représentent la masse d'air contenue dans un petit tronçon de tube alors que les ressorts symbolisent son élasticité ou, pour utiliser le terme idoine, sa compressibilité.



**Figure 52** — Propagation du son : le modèle phénoménologique des petites masses reliées par des ressorts.

Analysons la **Figure 52** ligne par ligne :

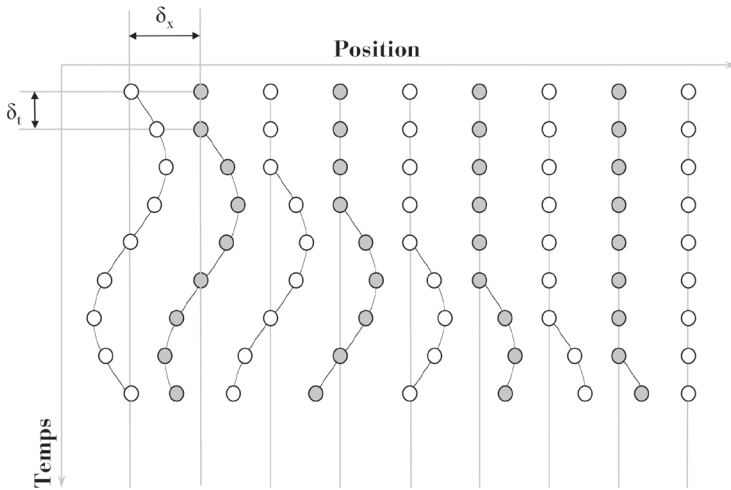
- ▷ La première ligne (a) donne la position initiale des masses avant que le piston ne se mette en mouvement.
- ▷ Quand il commence à bouger (b), il entraîne dans son mouvement la première masse et le ressort situé entre les deux premières masses se comprime. La seconde masse ne bouge

toutefois pas encore ; elle en est empêchée par son inertie (sa masse) et par la capacité du ressort à stocker l'énergie transmise par la première masse.

- ▷ En (c), le piston et la première masse ont atteint leur déplacement maximum ; la seconde masse a vaincu son inertie et s'est mise en branle. Elle n'a cependant pas encore transmis son mouvement à la troisième masse : l'énergie transmise par la seconde masse est stockée dans le deuxième ressort.
- ▷ En (d) le piston commence à faire machine arrière. La première masse le suit mais la seconde, sous l'effet de son inertie, continue son mouvement vers la droite. Le ressort entre les masses 1 et 2 est maintenant étiré. La masse 3 s'est mise en mouvement, la masse 4 est toujours au repos.
- ▷ Ainsi de proche en proche, chaque masse réagit au déplacement du piston avec un temps de retard et la perturbation qu'il provoque se déplace de gauche à droite avec une vitesse finie dont la valeur est déterminée à la fois par la rigidité des ressorts (c'est-à-dire la compressibilité de l'air) et par l'inertie des petites masses (c'est-à-dire la densité ou masse spécifique de l'air).

La Figure 53 donne quelques éléments supplémentaires :

- ▷ Si on trace la trajectoire de chaque masse, on constate qu'elles sont toutes sinusoïdales, comme celle du piston, mais qu'elles sont déphasées les unes par rapport aux autres.
- ▷ Si  $\delta_x$  désigne la distance entre deux masses, alors leur mise en mouvement est décalée dans le temps de  $\delta_t$ . La vitesse du son est égale au rapport de ces deux termes (décalage spatial sur déphasage temporel) :  $c = \frac{\delta_x}{\delta_t}$ .



**Figure 53** — Deux particules séparées par une distance  $\delta_x$  suivent le même mouvement mais avec un décalage dans le temps  $\delta_t$ . Le rapport  $\delta_x/\delta_t$  mesure la vitesse à laquelle la perturbation engendrée par le piston se déplace dans le tube : c'est la vitesse du son.

On retrouve ce mécanisme de propagation avec retard lorsqu'une foule fait la *hola* dans un stade [Figure 54] : chacun se lève avec un petit décalage par rapport à son voisin. Un autre exemple est celui de la circulation *en accordéon* dans les embouteillages des départs en vacances : le véhicule devant nous se met en branle, nous le suivons avec un petit temps de retard et le véhicule loin derrière nous peut très bien se mettre en mouvement au moment même où le premier véhicule s'arrête à nouveau. La vitesse de propagation finie du son explique de nombreux phénomènes courants. Lorsque nous voyons par exemple un ouvrier, loin de nous, frapper avec une masse sur un pieu qu'il veut enfoncer, nous voyons l'impact quasi immédiatement (la vitesse de la lumière est de 300 millions de mètres par secondes et sa propagation, sur de courtes distances, est



quasi instantanée) alors que le son ne nous parvient que plus tard (il se propage un million de fois moins vite). De la même manière, la lumière d'un éclair précède toujours le tonnerre de plusieurs secondes. Dans les deux cas, la mesure du temps qui s'écoule entre les observations visuelles et auditives ( $\Delta t$ ) permet de calculer la distance entre l'observateur et le fait observé ( $c \cdot \Delta t$  avec  $c = 340 \text{ m/s}$ ).



**Figure 54** — L'onde sonore se propage dans l'air comme la hola se propage parmi les spectateurs d'un match de football.

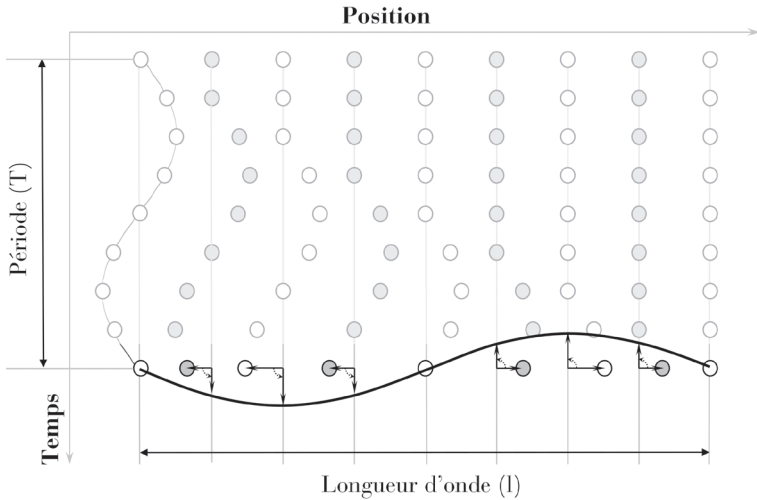
## 2. LONGUEUR D'ONDE

Regardons maintenant la **Figure 55**: et intéressons-nous à la position des masses au bout du temps  $T$  qu'a mis le piston à effectuer un aller-retour complet. Comme les masses se déplacent horizontalement il n'est pas facile d'embrasser d'un coup d'œil la manière dont ce déplacement varie en fonction de la position des masses. Reportons donc à chaque fois le déplacement horizontal sur l'axe vertical; nous voyons alors que ce déplacement a lui-même une variation sinusoïdale et qu'à la périodicité temporelle  $T$  correspond une périodicité spatiale  $\lambda$  appelée la *longueur d'onde* du son; ce n'est pas une constante propre au milieu car elle dépend directement de la période  $T$  à laquelle elle est liée par la relation :

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$$

dont on tire également :

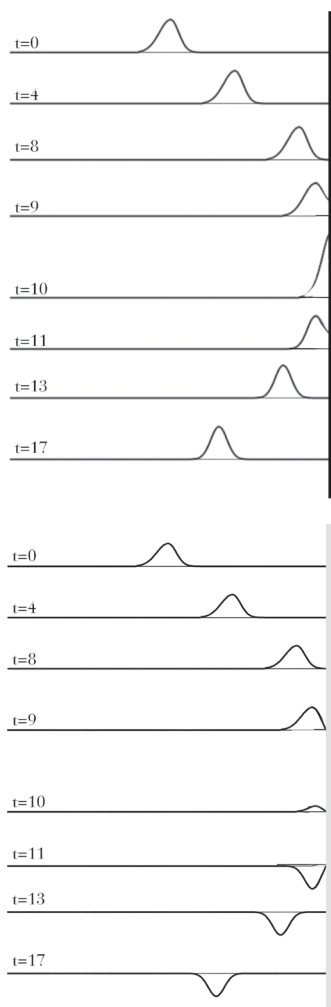
$$c = \lambda \cdot f$$



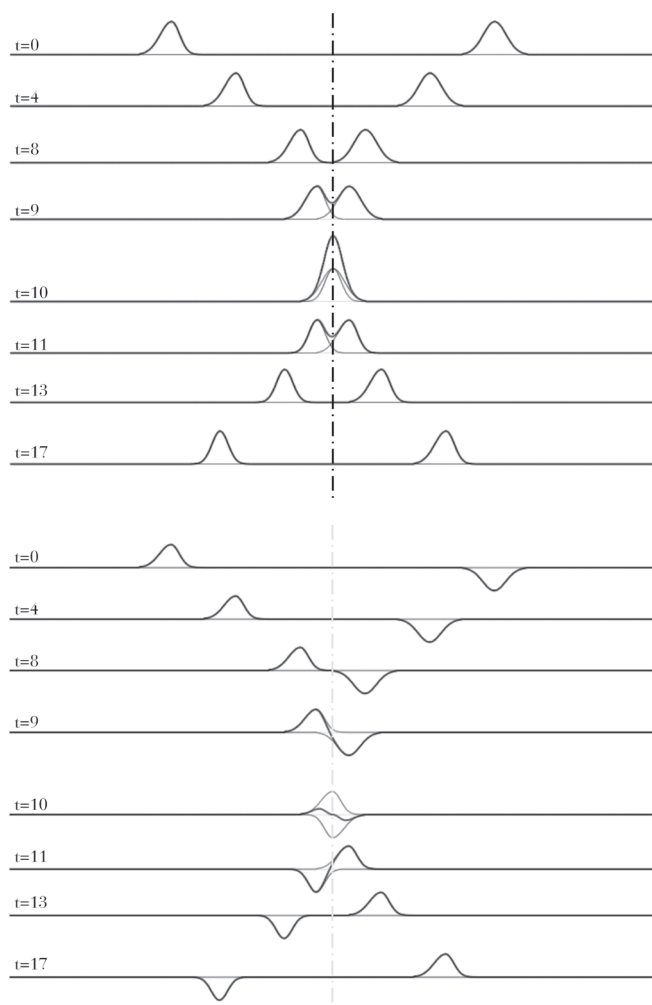
**Figure 55** — Propagation du son : la période ( $T$ ) et la longueur d'onde ( $\lambda$ ) sont reliées entre elles par la vitesse du son ( $c$ ) :  $\lambda = c \cdot T$ .

### 3. RÉFLEXIONS

Le tube des **Figures 52 et suivantes** était supposé infini et l'onde émise à l'extrémité gauche s'y propage indéfiniment vers la droite. Si, en revanche, le tube est de dimension finie, l'onde émise à l'extrémité gauche sera réfléchiée à l'extrémité droite et reviendra alors vers la source. La **Figure 56** montre que la réflexion s'effectue de manière différente suivant que cette extrémité est ouverte ou fermée. La **Figure 57** montre que cette réflexion peut s'analyser comme la superposition de l'onde incidente et d'une onde image, symétrique ou antisymétrique de la première.



**Figure 56** — Une onde sonore se propageant dans un tube se réfléchit à l'extrémité de celui-ci. Cette réflexion se passe différemment suivant que le tube est fermé (schéma du haut) ou ouvert (schéma du bas). Dans le premier cas l'onde se réfléchit sans changement de phase; dans le second elle subit un renversement (changement de signe).



**Figure 57** — La réflexion du son sur une paroi peut être analysée comme la réflexion de la lumière sur un miroir : tout se passe comme si, à l'onde incidente, venait se superposer une onde symétrique se propageant en sens contraire (schéma du haut). Dans le cas de la réflexion sur une section ouverte, l'onde originale et l'onde image sont antisymétriques (schéma du bas).

## 4. RÉSONANCES

### 4.1 Oscillations d'une balançoire

Pour pousser un enfant sur une balançoire, on peut choisir l'une des deux techniques suivantes : soit celle d'imposer le rythme des oscillations, ce qui entraîne un épuisement rapide sans que l'enfant ne soit balancé très haut, soit celle de suivre le rythme naturel de la balançoire en donnant de petites impulsions régulières lorsque l'enfant est au plus haut, ce qui suffit à amplifier progressivement les balancements sans la moindre fatigue. Ce rythme naturel de la balançoire est appelé sa *fréquence de résonance*. C'est à cette fréquence que l'effet est maximum pour une dépense d'énergie minimale. Quelle que soit la fréquence des oscillations qu'on lui imposera, c'est toujours ce rythme d'oscillation que la balançoire reprendra une fois que l'on aura arrêté de pousser. Enfin, si l'on se contente d'écarter la balançoire de sa position d'équilibre avant de la relâcher, c'est encore à cette fréquence qu'elle oscillera.



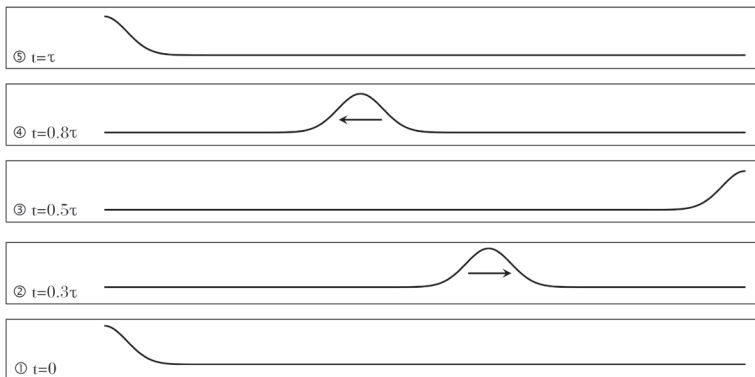
**Figure 58** — La fréquence d'oscillation d'une balançoire est fixée par le système, pas par le parent qui pousse l'enfant.

## 4.2 Résonances acoustiques d'un tube



**Figure 59** — Tube fermé excité par un piston oscillant.

Beaucoup de systèmes physiques ont, comme la balançoire, un rythme qui leur est propre. Les instruments de musique exploitent ces rythmes et émettent des sons aux fréquences de résonances correspondantes. Les instruments à vent, par exemple, exploitent les fréquences de résonance d'un tube rempli d'air. Essayons de comprendre la nature de ces résonances et considérons un tube de longueur  $\ell$  [Figure 59] dont nous fermons rigidement l'extrémité droite. L'autre extrémité est également fermée mais par une paroi mobile (un piston) que nous pouvons faire vibrer à notre guise.



**Figure 60** — Propagation d'une impulsion dans un tube : chaque graphique représente la position de l'onde sonore à un instant différent depuis son émission (en bas) jusqu'à son retour (en haut) après réflexion sur le fond. Une flèche indique le sens de propagation.

Imaginons l'expérience suivante.

- ▷ Une petite impulsion donnée au piston engendre dans le tube une onde sonore qui se propage vers la droite à la vitesse du son  $c$ .
- ▷ Elle arrive au bout du tube au bout d'un temps  $\ell/c$ , s'y réfléchit et fait le chemin inverse avant de revenir à son point de départ après un temps total  $\tau = 2\ell/c$  [Figure 60].
- ▷ Elle se réfléchit alors sur le piston (dont on suppose qu'il est, lui aussi, constitué d'un matériau dur et rigide) et repart pour un deuxième, troisième,  $n$ ème aller-retour<sup>7</sup>.

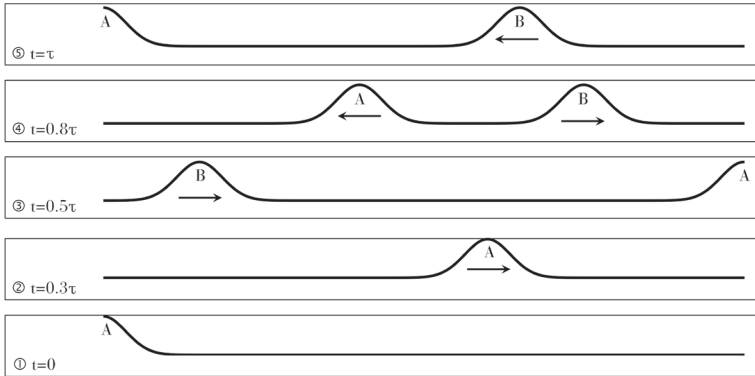
Supposons maintenant que nous donnions au piston non pas une impulsion unique mais **une série d'impulsions** séparées d'un temps  $\tau'$  : cette situation est illustrée à la Figure 61. Rien de bien particulier ne se produit, chaque impulsion se propage distinctement des autres.

Si, en revanche, les deux impulsions sont séparées exactement du temps  $\tau$  nécessaire à la réalisation d'un trajet aller-retour ( $\tau' = \tau$ ), la deuxième impulsion commence son premier aller-retour *exactement* au moment où la première impulsion commence son second voyage et elles cheminent ensemble, se combinant l'une à l'autre. On a donc, pendant ce second aller-retour, une seule impulsion dans le tube mais elle a une amplitude double de l'impulsion initiale.

Si finalement nous envoyons un *train d'impulsions*, chaque impulsion étant décalée de la précédente d'un temps  $\tau$ , nous aurons deux impulsions lors du second aller-retour, trois au troisième, quatre au quatrième et ainsi de suite : les impulsions successives s'ajoutent les unes aux autres et le niveau sonore associé s'accroît très rapide-

---

<sup>7</sup> En réalité l'impulsion va perdre une partie de son énergie à chaque trajet et à chaque réflexion mais nous pouvons, à ce stade, faire abstraction de ce phénomène de perte.



**Figure 61** — Propagation de deux impulsions dans un tube : lorsque l'onde associée à la première impulsion (A) approche du fond du tube une deuxième impulsion (B) est émise. Les deux ondes se croisent mais n'interagissent pas.

ment, exactement comme les amplitudes d'oscillation de la balançoire. Le rythme des impulsions qui conduit à cette amplification continue est la *fréquence de résonance acoustique*  $f_r$  du tube : elle est l'inverse du temps  $\tau = 2\ell/c$  et est donc donnée par :

$$f_r = \frac{1}{\tau} = \frac{c}{2\ell}$$

À l'inverse de la balançoire, le tube n'a pas une fréquence de résonance unique. En effet, si nous excitons le tube deux fois plus rapidement, à la fréquence  $2f_r$ , que se passe-t-il ? Nous envoyons une seconde impulsion lorsque la première est au fond du tube ( $\tau = \tau/2$ ) puis une troisième lorsque la première est revenue à son point de départ ( $\tau = \tau$ ) et que la seconde est au fond du tube, etc. La première et la troisième vont donc cheminer ensemble et se superposer. Lorsque cette onde combinée arrivera au fond du tube ( $\tau = 3\tau/2$ ), la seconde impulsion sera revenue au piston et s'y combinera avec la



quatrième. Si, tout à l'heure, toutes les impulsions s'ajoutaient l'une à l'autre, maintenant les impulsions impaires s'ajoutent d'une part et les impulsions paires s'ajoutent d'autre part mais le résultat est identique: l'amplitude des impulsions s'accroît à chaque étape et atteint vite des niveaux importants.

On conçoit bien, finalement, que si le rythme des oscillations est  $nf_r$ , on observera le même phénomène:

- ▷ à l'impulsion 1 s'ajouteront les impulsions  $n+1$ ,  $2n+1$ ,  $3n+1$ ,...
- ▷ à l'impulsion 2 s'ajouteront les impulsions  $n+2$ ,  $2n+2$ ,  $3n+2$ ,...
- ▷ à l'impulsion  $m$  s'ajouteront les impulsions  $n+m$ ,  $2n+m$ ,  $3n+m$ ,...

#### 4.3 Résonance et longueur d'onde

Le phénomène de résonance a été présenté au paragraphe précédent comme résultant de la superposition d'impulsions séparées du temps  $\tau$  nécessaire à la réalisation d'un aller-retour dans le tube à la vitesse du son  $c$ . Que se passe-t-il quand le piston suit, comme à la **Figure 52**, un mouvement sinusoïdal continu de période  $\tau$  ?

On a exactement la même croissance du niveau sonore car chaque morceau de la sinusoïde parcourt l'aller-retour dans le temps  $\tau$  et revient donc à son point de départ exactement après que le piston ait réalisé un cycle complet. Le signal sonore émis par le piston se retrouve constamment en phase avec celui qui a déjà effectué un, deux, trois,... allers-retours dans le tube.

Cette situation se produit lorsque  $\tau$  est une fraction entière du temps nécessaire à réaliser un aller-retour soit lorsque :

$$\tau = \frac{1}{n} \frac{2\ell}{c} \Leftrightarrow \ell = n \frac{c\tau}{2} = n \frac{\lambda}{2}$$

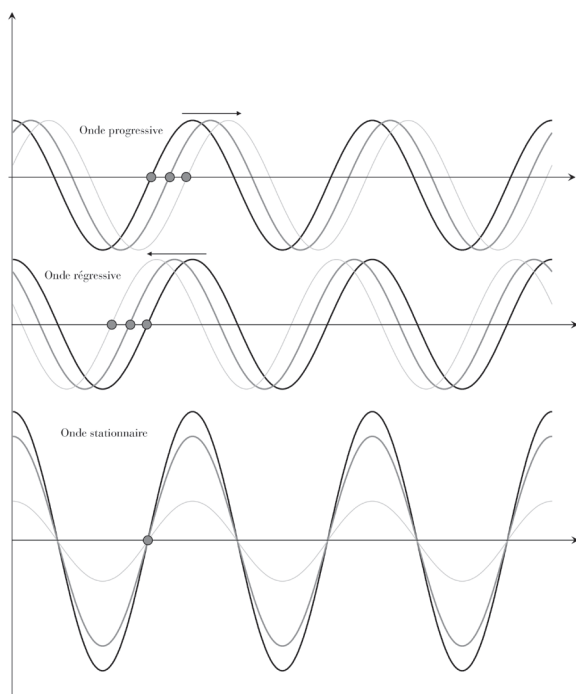
En effet, nous avons vu que le produit de la vitesse du son  $c$  et de la période du signal  $\tau$  est égal à la longueur d'onde  $\lambda$ . **Il y a donc résonance lorsque la longueur du tube est égale à un nombre entier de demi-longueur d'onde.**

#### 4.4 Conclusions préliminaires sur les résonances

1. Si l'on excite un tube fermé à une fréquence qui est un multiple entier de  $f_0 = c/(2\ell)$ , le niveau sonore dans le tube augmente à chaque cycle, sans limite si l'on néglige la viscosité de l'air.
2. Si la fréquence d'excitation n'est pas un multiple entier de  $f_0$ , les impulsions successives ne se cumuleront jamais exactement (elles ne seront jamais *en phase*) et le niveau sonore grandira bien

#### ONDES PROGRESSIVES ET ONDES STATIONNAIRES

Une onde sonore se propage en s'éloignant de sa source; dans un tube cette propagation se fait le long de l'axe. Si le tube est infini, la propagation est décrite par le graphe supérieur de la **Figure 62**: la sinusoïde qui représente la variation de pression le long de l'axe glisse simplement de gauche à droite à la vitesse du son. Si le tube est de dimension finie, la réflexion de cette onde sur le fond engendre une onde réfléchie qui se propage de droite à gauche [**Figure 43**, graphe du milieu]. La combinaison de ces deux ondes, identiques mais de sens de propagation opposés, engendre une onde *qui ne se propage pas* et que l'on dit *stationnaire*. La pression locale continue à varier dans le temps mais l'onde elle-même ne se propage pas. Les nœuds (points de pression nulle), qui se propagent avec les ondes progressives ou régressives, sont immobiles pour l'onde stationnaire. Les tubes et tuyaux des instruments sont le siège d'ondes stationnaires.



**Figure 62** — Si l'on superpose une onde se propageant de gauche à droite (graphe du haut) et une onde se propageant de droite à gauche (graphe du milieu) on obtient une onde stationnaire (graphe du bas). Dans chaque graphe les trois courbes montrent l'onde à trois instants successifs (dans l'ordre chronologique : trait noir gras, trait gris gras, trait noir fin). Les petits cercles matérialisent les nœuds de vibration.

mais de manière beaucoup moins rapide ; il restera, en tout état de cause, fini<sup>8</sup>.

3. Si l'excitation combine plusieurs fréquences, seules celles qui sont des multiples de  $f_0$  seront grandement amplifiées par le tube et elles domineront le signal sonore produit par l'instrument. Le tube agit comme un *filtre* qui, parmi toutes les fréquences qu'on lui présente, sélectionne les fréquences multiples de  $c/(2\ell)$ .

4. À un tube de longueur  $\ell$  donnée correspond une fréquence de résonance fondamentale  $f_0$  donnée mais cette relation peut-être inversée et, si l'on veut créer un tube résonant à la fréquence  $f_0$ , il suffit de lui donner une longueur qui est un multiple entier de demi-longueurs d'ondes.

## 5. TYPOLOGIE DES INSTRUMENTS À VENTS

### 5.1 Système excitateur : anche ou biseau

Malgré toute leur diversité apparente, les modes de production du son dans les instruments à vents se résument à deux grandes catégories : les anches et les biseaux.

Une **anche** se comporte comme le piston de notre exemple précédent. Elle vient pousser sur l'air contenu dans le tube à un rythme régulier et communique sa vitesse aux particules d'air avec lesquelles elle est en contact : c'est une *source de vitesse*. Du point

---

<sup>8</sup> La **Figure 61** est à cet égard trompeuse car l'impulsion  $y$  est montrée comme strictement positive alors qu'un signal sonore comporte généralement des alternances de pressions positives et négatives. Lorsque deux ondes identiques se combinent en phase, les parties positives et négatives s'additionnent séparément et les amplitudes maximum croissent : il y a interférence constructive. Lorsqu'elles sont déphasées l'une par rapport à l'autre, les parties positives et négatives se compensent partiellement : il y a interférence destructive.

de vue de l'onde sonore, le tube est *fermé* par l'anche : après avoir exécuté un aller-retour dans le tube, une onde sonore se réfléchira donc sur l'anche sans changement de phase. Il existe quatre types d'anches : les anches *simples* qui peuvent être *battantes* (clarinettes, cors de basset, saxophones, jeux d'anches des orgues) ou *libres* (accordéons, harmonica, harmonium), les anches *doubles* (basson, hautbois, cor anglais, cornemuse, cromorne, duduk) et les anches *lippales* (cuivres) ou c'est la vibration des lèvres qui engendre le son.

Un **biseau**, qu'il soit taillé et acéré (comme celui d'une flûte à bec) ou simplement formé par une arête vive (comme celui d'une flûte traversière) n'agit pas en communiquant une vitesse aux particules d'air mais en contrôlant l'amplitude de la fluctuation de pression : on parle donc de source de pression. L'extrémité qui porte le biseau apparaît *ouverte* à l'onde sonore qui s'y réfléchit avec un changement de phase de  $180^\circ$ .

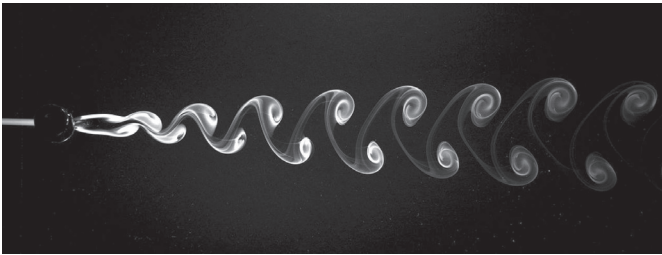
Le tableau ci-dessous synthétise les propriétés des deux systèmes excitateurs :

Type de système exciteur	Type d'excitation	Type de réflexion	Conditions acoustiques
Anche	Vitesse	Sans changement de phase	Maximum de pression, minimum de vitesse
Biseau	Pression	Inversion de la phase	Maximum de vitesse, minimum de pression

### QUE SE PASSE-T-IL QUAND ON SOUFFLE SUR UN BISEAU ?

Avez-vous jamais regardé, depuis le parapet d'un pont, l'eau de la rivière couler de part et d'autre d'une des piles ? À l'aval, des tourbillons apparaissent [Figure 63], une fois à gauche, une fois à droite. Le même mécanisme fait flotter les drapeaux : le vent souffle sur le mât, des tourbillons se détachent et poussent le drapeau alternativement vers la gauche et vers la droite ; comme ces tourbillons sont emportés par l'écoulement, le drapeau oscille sur sa longueur.

Quand le souffle du flûtiste vient se séparer sur le biseau : des tourbillons se détachent, une fois au-dessus, une fois en-dessous. Leur rythme n'est toutefois plus imposé par la seule dynamique du fluide : l'alternance dessus-dessous se cale naturellement sur la fréquence de résonance de l'air dans le corps de la flûte.

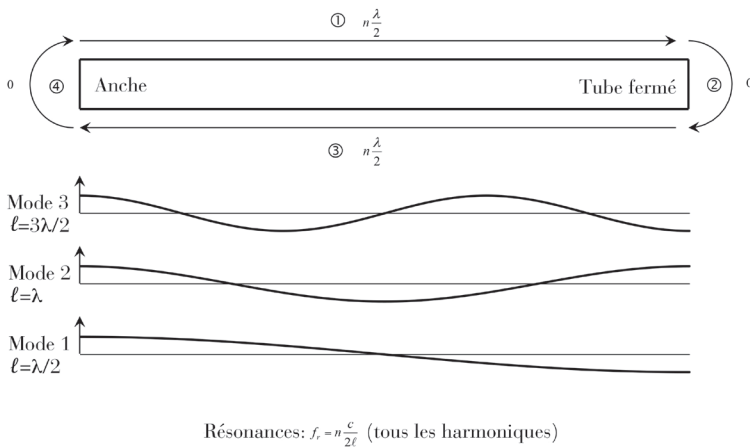


**Figure 63** — Allées tourbillonnaires de Von Karman : un jet d'air frappant un obstacle engendre un sillage où des tourbillons de sens de rotation contraires alternent de part et d'autre de l'axe du jet. Photo : Jürgen Wagner. .

## 5.2 Harmoniques paires et impaires

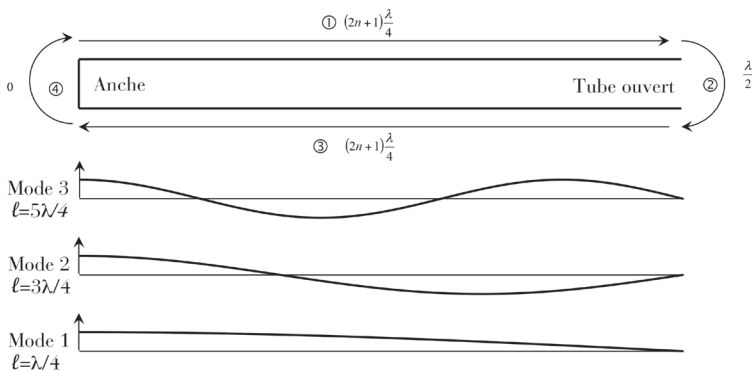
La nature du système excitateur (anche ou biseau) combiné avec les conditions à l'autre extrémité du tube (ouvert ou fermé) va déterminer les fréquences de résonance du conduit. Quatre configurations sont envisageables :

- ▷ anche et tube fermé : les cuivres bouchés se rapprochent de ces conditions ;
- ▷ anche et tube ouvert : bois, cuivres, jeux d'anche de l'orgue ;
- ▷ biseau et tube fermé : certaines flûtes de Pan, jeux de bourdon de l'orgue ;
- ▷ biseau et tube ouvert : flûtes (à bec et traversière), certaines flûtes de Pan, jeux de bouche de l'orgue.



**Figure 64** — Anche et tube fermé — La résonance se produit lorsque la longueur du tube est égale à un nombre entier de demi longueurs d'ondes. Il n'y a pas de sections ouvertes et donc pas de déphasage associé. Les sections gauche et droite sont fermées. On a ainsi des maxima de pression aux deux extrémités. Tous les harmoniques sont présents.

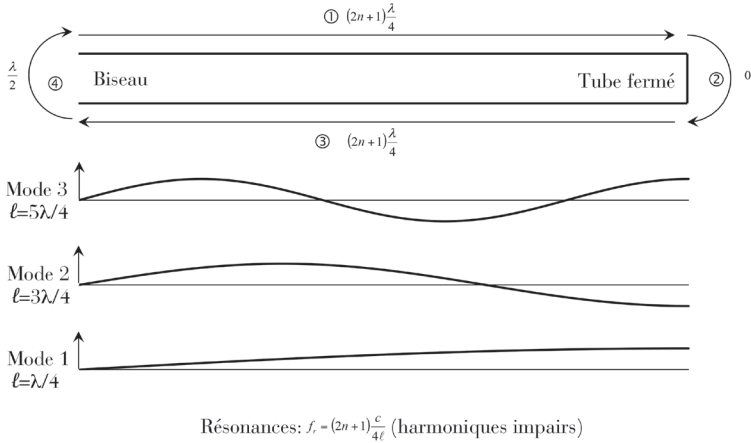
Chacune des configurations est caractérisée par un mécanisme de résonance différent. Pour qu'il y ait résonance il faut, en effet, que la différence de phase entre l'onde qui a déjà réalisé un aller-retour et est prête à repartir pour un deuxième trajet, et l'onde qui se prépare à partir pour son premier trajet soit un multiple entier de  $2\pi$  ( $360^\circ$ ). Autrement dit, il faut que le chemin acoustique parcouru en un cycle soit égal à un nombre entier de longueurs d'onde. Par *chemin acoustique* nous entendons la somme du chemin effectivement parcouru et du chemin équivalent au déphasage lié à la réflexion éventuelle sur les extrémités ouvertes (un déphasage de  $\pi$  correspond à un chemin acoustique additionnel d'une demi-longueur d'onde). Les différents cas sont



Résonances:  $f_n = (2n+1)\frac{c}{4\ell}$  (harmoniques impairs)

**Figure 65** — Anche et tube ouvert — La résonance se produit lorsque la longueur du tube est égale à un nombre impair de quart de longueurs d'ondes. Le chemin acoustique total est alors bien égal à un nombre entier de longueur d'ondes:  $2(2n+1)\lambda/4 + \lambda/2 = (n+1)\lambda$ . La section gauche est fermée (maximum de pression) alors que la droite est ouverte (minimum de pression). Seuls les harmoniques impairs sont présents.





**Figure 66** — Biseau et tube fermé — La résonance se produit lorsque la longueur du tube est égale à un nombre impair de quart de longueurs d'ondes. Le chemin total est alors bien égal à un nombre entier de longueur d'ondes :  $2(2n+1)\lambda/4 + \lambda/2 = (n+1)\lambda$ . La section gauche est ouverte (minimum de pression) alors que la droite est fermée (maximum de pression). Seuls les harmoniques impairs sont présents.

analysés aux **Figures 64 et suivantes** ; ces figures montrent également la distribution de pression dans le tube aux trois premières fréquences de résonance.

D'un point de vue harmonique, on a donc deux grands types d'instruments :

- ▷ ceux, comme les bois, les cuivres ou les jeux de bourdon et d'anche à l'orgue dont la première résonance se produit lorsque le tube a une longueur égale à un quart de longueur d'onde et où seuls les harmoniques impairs sont excités :

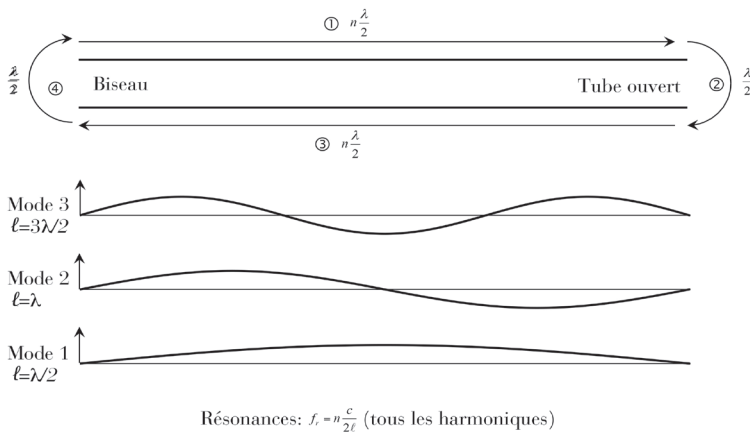
$$f_n = n \frac{c}{4\ell} \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$$

- ▷ ceux, comme les flûtes, dont la première résonance correspond à un tube dont la longueur est égale à une demi longueur d'onde et où tous les harmoniques sont excités :

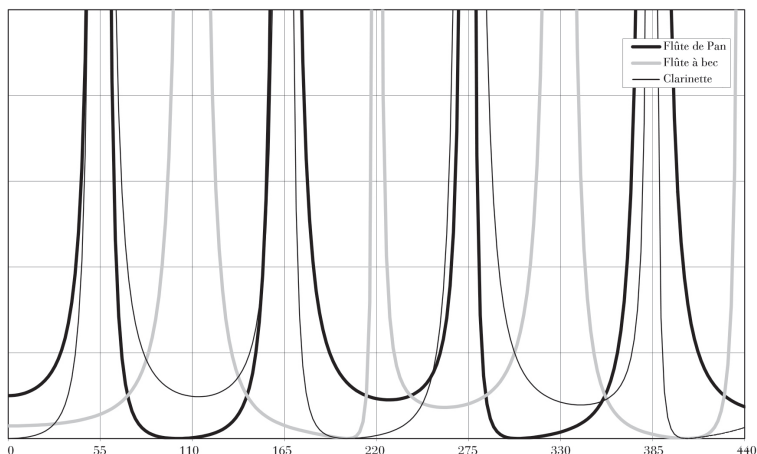
$$f_n = n \frac{c}{2\ell} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

•

Le niveau sonore dans le tube est maximum aux fréquences de résonance; il est même, en théorie, c'est-à-dire en l'absence de mécanisme de dissipation d'énergie, infini à ces fréquences. Il n'est néanmoins pas nul aux autres fréquences; la **Figure 68** montre l'amplitude du son en un point donné à l'intérieur des trois types fondamentaux de tubes pour une excitation de référence.



**Figure 67** — Biseau et tube fermé — La résonance se produit lorsque la longueur du tube est égale à un nombre entier de demi longueurs d'ondes. Le chemin total est alors bien égal à un nombre entier de longueur d'ondes:  $2n\lambda/2 + 2\lambda/2 = (n+1)\lambda$ . Les sections gauche et droites sont ouvertes (minimum de pression). Tous les harmoniques sont présents.



**Figure 68** — Évolution en fonction de la fréquence du carré de l'amplitude de la pression sonore au point de coordonnée  $x = 0.707$  d'un tube de longueur  $340/110 = 1.545$  mètres. La courbe noire grasse donne le niveau pour un système de type *flûte de Pan* (biseau + tube fermé), la courbe en gris pour un système de type *flûte à bec* (biseau + tube ouvert) et la courbe en trait fin pour la réponse pour un système de type *clarinette* (anche + tube ouvert).

### 5.3 Perce, pavillon, couplage et partiels

Deux paramètres additionnels viennent enrichir notre typologie : la perce et le pavillon.

La **perce**, c'est-à-dire la forme du conduit intérieur du tuyau de l'instrument, peut-être cylindrique (flûtes) ou conique (saxophones). En pratique la perce est souvent variable et a une forme plus complexe qu'un simple cylindre ou cône ; l'art du facteur réside, pour une large part, dans la maîtrise des subtils changements de section de la perce.

Le **pavillon** est l'évasement plus ou moins complet et rapide de l'extrémité ouverte de l'instrument. Il influe sur les conditions de réflexion de l'onde sonore à l'extrémité du tuyau. Nous avons jusqu'ici rencontré deux cas extrêmes : réflexion sans changement de phase sur une section fermée et réflexion avec inversion de phase sur une section ouverte. En réalité, une section ouverte n'a ce comportement parfait que si le diamètre du tube est très petit par rapport à la longueur d'onde (flûte par exemple) ; dès que cette condition n'est pas remplie, le déphasage devient variable et dépend de la fréquence du son ainsi que de la forme exacte du pavillon.

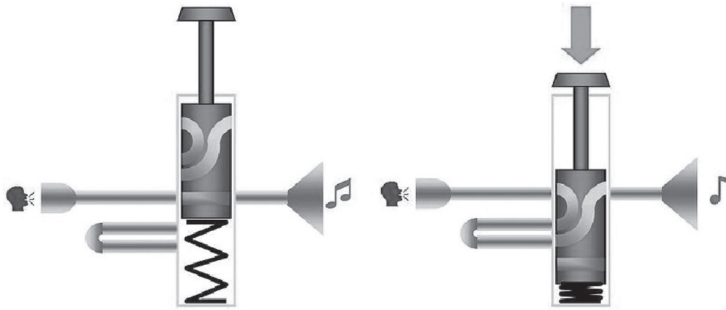
Un phénomène subtil vient encore compliquer les choses : le système excitateur et l'onde sonore dans le tuyau ont des comportements fortement couplés et influent l'un sur l'autre. Dans certains instruments (flûtes) c'est la résonance du tuyau qui domine et qui impose la fréquence d'oscillation du flux d'air entre la face supérieure et inférieure du biseau. Dans d'autres (trompette), c'est au contraire le système excitateur (les lèvres) qui fixe le son émis qui n'est ensuite que filtré par les résonances du tuyau.

Il n'est pas possible de rentrer ici dans le détail de ces comportements complexes. On doit cependant noter que la forme de la perce et du pavillon ainsi que la force du couplage influent profondément sur la réponse harmonique de l'instrument. Les fréquences qui dominent son spectre sont appelées les *partiels* de l'instrument ; ils sont assez régulièrement espacés mais s'éloignent parfois sensiblement de la fréquence de résonance du tuyau telle qu'elle résulte de l'analyse qualitative présentée ci-dessus.

## 6. RÉGLAGE DE HAUTEUR

Un instrument à vent de longueur fixe ne pourrait jouer qu'un nombre très limité de notes ; il faut donc pouvoir ajuster la longueur

afin de déplacer les résonances et les partiels et accéder à d'autres notes. Le changement de longueur peut se réaliser par une coulisse (trombone), par la multiplication de tubes de longueurs différentes (orgue) ou par des pistons (trompette et cors) qui ouvrent et ferment des connexions entre tubulures, insérant ou retirant ainsi des tronçons de tuyau [Figure 69].

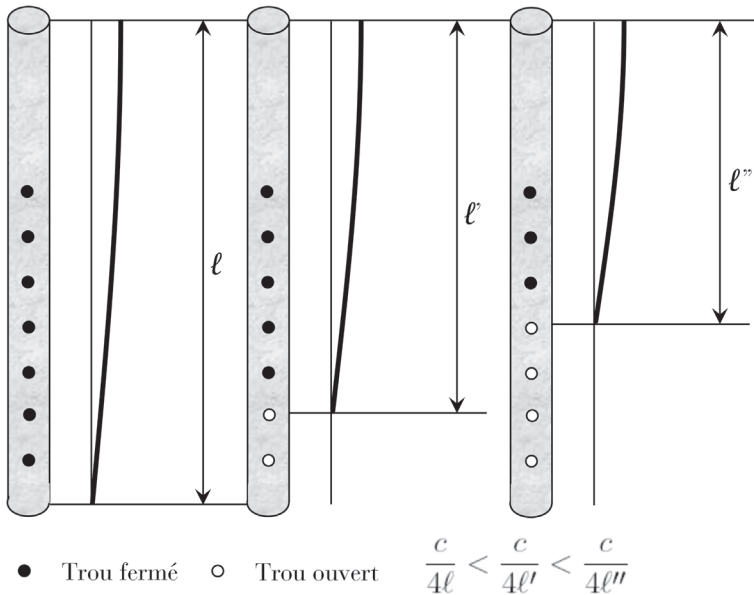


©Wikimedia Commons

**Figure 69** — Les pistons d’une trompette modifient la longueur du tuyau et modifient ainsi son registre.

Les bois privilégient un autre moyen : les trous de jeux. Le tuyau est percé de trous que l’on peut boucher avec les doigts (flûte à bec) ou ouvrir avec des clés (clarinette, saxophone). Chaque trou peut être en position ouverte ou fermée. Fermé il est, en première analyse, inexistant. Ouvert il crée, localement, et toujours en première analyse, une condition de pression acoustique nulle, homologue à celle régnant à l’extrémité du tube. Ouvrir les trous proches de l’extrémité du tube revient à réduire la longueur effective du tube [Figure 70] et donc ses fréquences de résonance.

À chaque doigté correspondent plusieurs notes puisqu’on peut exciter les différents modes du tuyau [Figures 64 et suivantes]. En

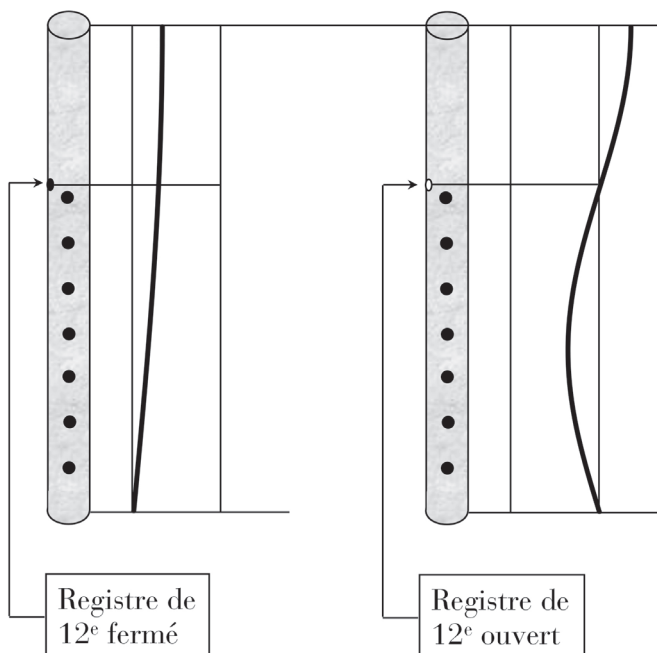


**Figure 70** — Ouvrir les trous proches de l'extrémité du tube revient à réduire la longueur effective du tube (exemple d'un instrument à résonance en quart de longueur d'onde).

principe, il suffit de varier le débit d'air pour passer d'un mode à l'autre mais cette méthode manque de précision. Pour favoriser la transition vers un mode plus élevé, des trous additionnels, dits trous de *registre*, sont disponibles. Leur but est d'imposer, au nœud du mode supérieur qu'on souhaite exciter, un point de pression nulle [Figure 71].

•

Le comportement réel d'un instrument dont le corps est percé de trous est beaucoup plus complexe qu'indiqué plus haut. Si les facteurs ont découvert progressivement où placer les trous et quels diamètres leur donner, les scientifiques n'ont que récemment élucidé



**Figure 71** — L'ouverture d'un registre bien placé force le passage d'une résonance à l'autre. Ici, par exemple, l'onde stationnaire passe de l'ordre 1 à l'ordre 3, la fréquence est multipliée par 3 et donc la note monte d'une douzième.

les détails de la physique mise en jeu. Un premier enrichissement du modèle consiste à affiner notre vision de ce que représente un trou ouvert et un trou fermé :

- ▷ Quand un doigt ou une clé ferme le trou, ce dernier n'est pas complètement bouché. Une petite cavité d'air existe, sous le doigt, dans l'épaisseur du matériau ; aussi petite que soit cette cavité elle affecte les ondes stationnaires qui se développent dans le tube.
- ▷ Lorsque un trou est ouvert, il n'impose pas réellement une

pression acoustique nulle. En effet, le nœud de pression n'apparaît pas exactement à l'endroit du trou mais à une petite distance  $\Delta$  de celui-ci. La longueur acoustique du tube n'est donc pas  $\ell$  mais  $\ell + \Delta$ . La valeur de  $\Delta$  dépend de la position du trou, de son diamètre et de l'ordre du mode considéré. Même lorsque tous les trous sont fermés, la longueur acoustique du tube est légèrement plus grande que sa longueur physique et les fréquences de résonance sont donc inférieures à celles prédites par le modèle simple vu plus haut.



L'analyse la plus détaillée repose sur la notion d'*impédance acoustique*. L'impédance est, pour un doigté donné, une caractéristique intrinsèque du tube et est donc indépendante du système exciteur (biseau ou anche). La notion d'impédance acoustique peut se comprendre par analogie avec l'électricité :

- ▷ si on établit une différence de potentiel  $U$  constante (courant continu) aux bornes d'un circuit, il y circule un courant d'intensité  $I$  et le rapport  $U/I$  mesure la *résistance* du circuit ;
- ▷ si le courant est alternatif et que  $\tilde{U}$  et  $\tilde{I}$  représentent respectivement l'amplitude de la tension et du courant, le rapport des deux amplitudes est un nombre complexe  $Z = \tilde{U}/\tilde{I}$  qui joue, en courant alternatif, le même rôle que la résistance en courant continu ;
- ▷ en acoustique, la pression acoustique  $p$  joue le rôle de la tension  $\tilde{U}$  et la vitesse d'oscillation des particules d'air  $v$  est l'homologue du courant. L'impédance acoustique est alors le rapport  $p/v$  de la pression et de la vitesse acoustique<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup> Pour être précis, il s'agit du rapport des spectres associés à ces deux quantités.



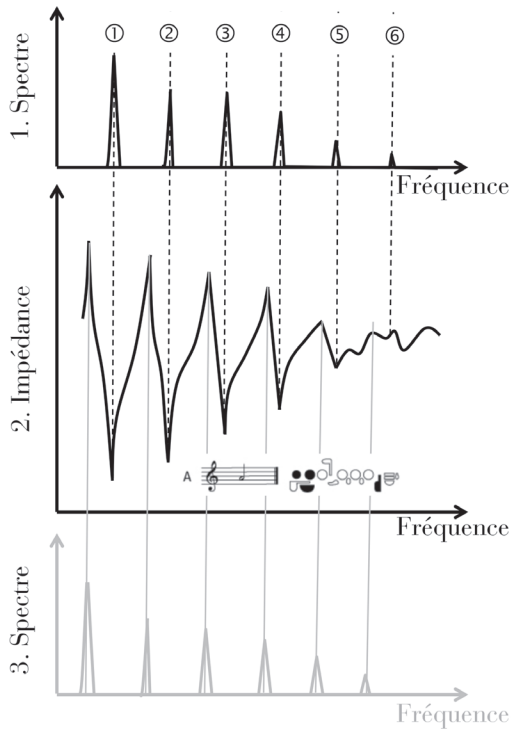
L'impédance acoustique d'un tube percé de trous partiellement fermés par un doigté donné est une fonction complexe de la fréquence [Figure 72]. Suivant le type de source, les résonances interviennent soit lorsque l'impédance est infinie (anche) soit lorsqu'elle est nulle (biseau). Tout l'art du facteur consiste à jouer de tous les paramètres à sa disposition (position, diamètre et perce des trous) pour assurer la plus grande justesse et la plus grande amplitude de jeu à l'instrument qu'il construit en positionnant les zéros et les asymptotes aux fréquences voulues.

## 7. INSTRUMENTS À CORDES – APPROCHE INTUITIVE

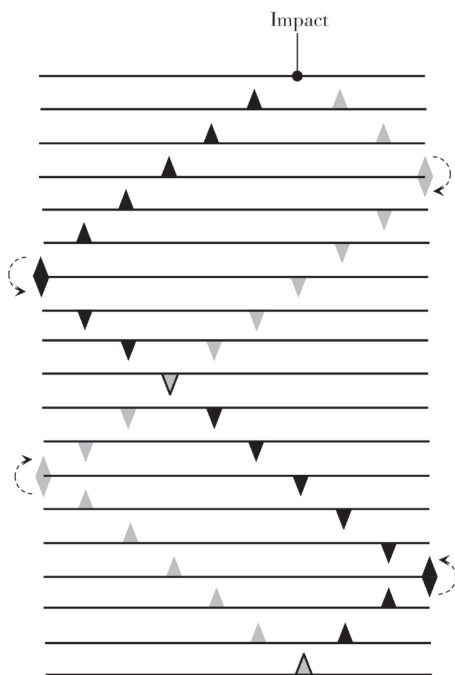
### 7.1 Résonance vibratoire d'une corde

La résonance acoustique d'un tuyau ouvert aux deux extrémités et la résonance vibratoire d'une corde fixée à ses deux extrémités sont deux phénomènes très semblables. Les similitudes et les différences sont expliquées conceptuellement ci-dessous [voir Figure 73].

- ▷ Imaginons pour commencer que la corde soit mise en vibration par l'impact répété (période  $\tau'$ ) d'un petit marteau en un point déterminé de la corde. Cet impact a pour effet de faire subir localement à la corde un déplacement dans une direction perpendiculaire à sa longueur. La corde étant élastique et pourvue de masse, ce déplacement local, au droit du marteau, va se communiquer avec retard aux points voisins, de part et d'autres du point d'impact. Dans l'analyse de la résonance d'un tuyau, l'impact était donné à l'extrémité, ici il est donné en un point courant de la corde.
- ▷ La vitesse de propagation n'est plus la vitesse du son dans l'air mais une fonction de la tension  $T$  dans la corde (exprimée



**Figure 72** — Le graphe du milieu (2) donne l'impédance acoustique à l'embouchure d'une flûte Böhm pour un doigté classique de  $La_4$ . Le spectre sonore est donné par le graphe supérieur (1) ; les partiels apparaissent bien quand l'impédance acoustique présente un minimum. À titre informatif, le graphe du dessous (3) donne schématiquement le spectre sonore qu'on obtiendrait si on excitait le même corps avec un dispositif à anche : les partiels correspondraient dans ce cas au maximum de l'impédance. Les graphes (1) et (2) sont tirés de SMITH J.R. et al., *The Acoustic Impedance of the Boehm Flute : Standard and Some Non-Standard Fingerings*, Proceedings of the Institute of Acoustics (IOA), Vol. 19, 1997, p. 315-330.



**Figure 73** — Lorsqu'on frappe une corde, deux ondes se propagent à partir du point d'impact vers les deux extrémités de la corde où elles se réfléchissent avec inversion de phase. Au bout de deux allers-retours, les deux ondes sont revenues à leur point de départ munies de leurs phases initiales. Si un second impact intervient à ce moment, il se cumule au premier : il y a résonance.

en Newton) et de sa masse par unité de longueur  $\rho$  (exprimée en kg par mètre) :

$$c_f = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

- ▷ Lorsqu'une perturbation atteint le point d'attache de la corde à l'instrument, elle s'y réfléchit en subissant une inversion de phase avant de repartir en sens inverse. Une extrémité fixe (déplacement nul) se comporte en effet pour une onde de vibration dans la corde comme une section ouverte (pression nulle) pour une onde de pression dans un tuyau.

- ▷ Les deux impulsions reviennent à leur point de départ avec leur phase initiale après avoir parcouru deux fois la longueur de la corde soit après un temps  $\tau = 2\ell/c_f$ . Il y a résonance si la période  $\tau'$  avec laquelle le marteau frappe la corde est exactement égal à ce temps de parcours ( $\tau' = \tau$ ).
- ▷ Exactement comme pour les tubes, il y a également résonance si la période d'impact est une fraction entière du temps de parcours ( $\tau' = \tau/n$ ) ; il y a donc plusieurs fréquences propres<sup>10</sup> définies par la formule :

$$f_n = \frac{nc_f}{2\ell} = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

- ▷ On peut encore analyser le phénomène de résonance comme résultant de l'apparition d'ondes stationnaires lorsque la longueur de la corde est égale à un nombre entier de demi-longueur d'ondes. Cela conduit à la même formule.

## Modes de vibration d'une corde

À chaque fréquence propre correspond une forme élémentaire de vibration de la corde qu'on appelle un mode propre de vibration ; les cinq premiers modes sont représentés à la **Figure 74**. **Toute vibration de la corde peut-être représentée comme la superposition des différents modes** ; l'importance de chacun (les *facteurs de participation modaux*) dépend des circonstances exactes qui mettent la corde en vibration.

---

<sup>10</sup> Les *fréquences propres* sont les *fréquences de résonance* en l'absence de tout amortissement. On peut considérer ici que les deux termes sont synonymes.

## 7.2 Conditions initiales et modes d'excitation

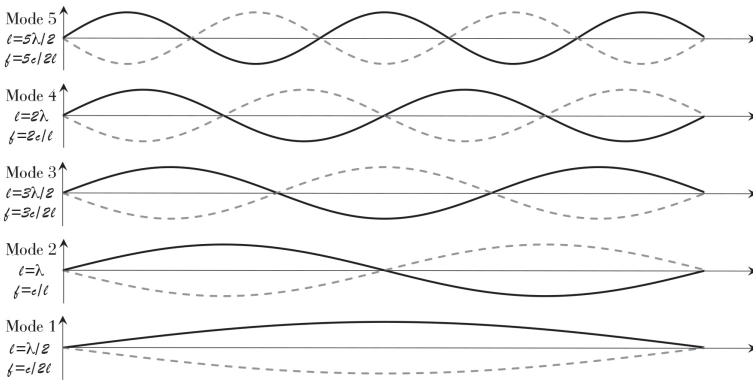
La hauteur tonale associée à une corde de tension, masse linéique et longueur donnée sera celle de son fondamental. L'amplitude des harmoniques, qui est une composante essentielle du timbre, sera déterminée par la manière dont la corde est mise en vibration. Différents modes d'excitation sont mis en œuvre dans les instruments à cordes :

- ▷ pincement par le doigt (guitare, harpe) ou par un plectre (clavecin);
- ▷ frottement par un archet (violon) ou une roue (vielle);
- ▷ frappe par un marteau (piano, cymballum).

### *Cordes pincées*

Les systèmes à cordes pincées imposent à la corde une forme initiale. Le doigt ou le plectre écarte la corde de sa position de repos, l'amène dans une position déterminée puis la relâche et la laisse libre de vibrer à sa guise. C'est cet état déformé initial qui fixe le contenu harmonique de la note; la **Figure 75** montre comment les modes se combinent pour s'adapter à la forme initiale de la corde jouée au milieu ou au cinquième de sa longueur. La **Figure 76** montre l'amplitude des différents modes et donc des différents harmoniques.

Une corde frappée ou pincée à une fraction  $n$  de sa longueur vibre sans exciter les modes de vibration dont les ordres sont multiples de  $n$ . Puisque l'harmonique 7 (fréquence  $7 f_0$ ) n'appartient pas à la gamme (section 6.1), on préfère ne pas le faire sonner; c'est pourquoi les marteaux de piano frappent les cordes au septième de leur longueur.



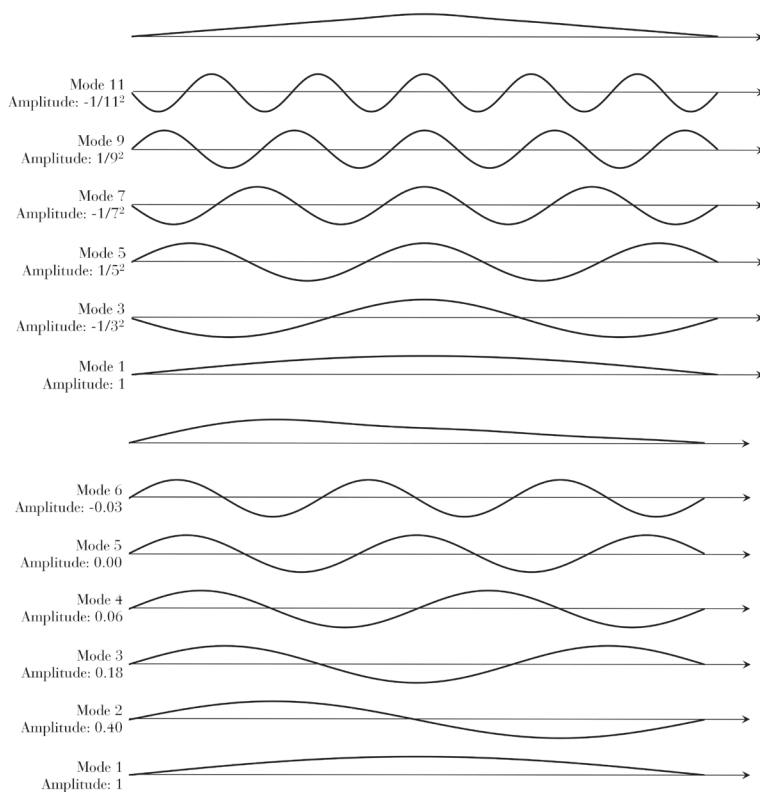
**Figure 74** — Les cinq premiers modes de vibration d'une corde tendue fixée aux deux extrémités.

### *Cordes frappées*

Les instruments à cordes frappées n'imposent pas une déformation initiale mais une certaine vitesse initiale à la corde au point d'impact. Le raisonnement est toutefois le même : les modes vont s'organiser et se superposer afin de correspondre à cette vitesse initiale et l'amplitude relative des modes définira le contenu harmonique du son émis.

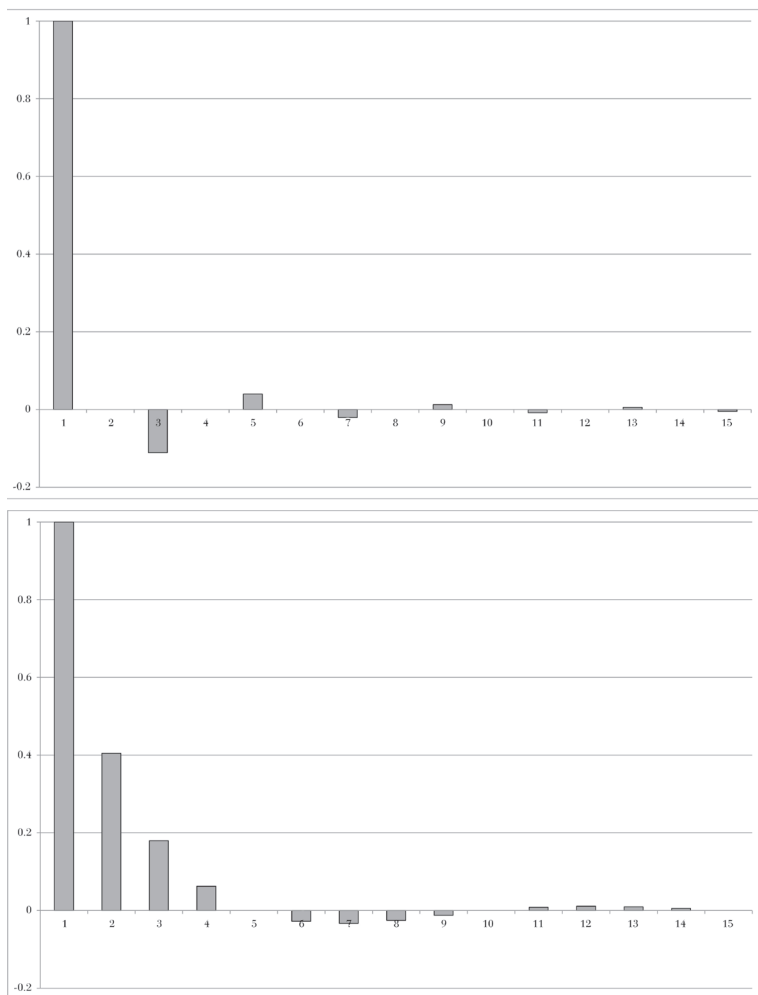
### *Cordes frottées*

Dans un instrument à cordes frottées, l'archet (ou la roue) frotte de manière continue sur la corde, cherchant à l'éloigner de sa position de repos ; la colophane dont on enduit les crins de l'archet augmente le frottement et favorise ce mouvement. La tension dans la corde cherche au contraire à la faire revenir à cette position de repos ; lorsque la corde s'est trop éloignée de sa position d'équilibre, la force de rappel dépasse la force de frottement et la corde revient en arrière avant d'être à nouveau entraînée par l'archet. Il résulte



**Figure 75** — Dans l'exemple du haut la corde est jouée au milieu de sa longueur et les modes impairs se combinent dans des proportions variables pour s'adapter à cette configuration. Dans l'exemple du bas, la corde est jouée au cinquième de sa longueur; tous les modes, sauf ceux dont l'ordre est un multiple de 5, sont excités.

de ces phénomènes un mouvement en dent de scie qu'Helmholtz fut le premier à observer directement. On comprend intuitivement qu'un mouvement aussi complexe conduise à un spectre très riche en harmoniques.



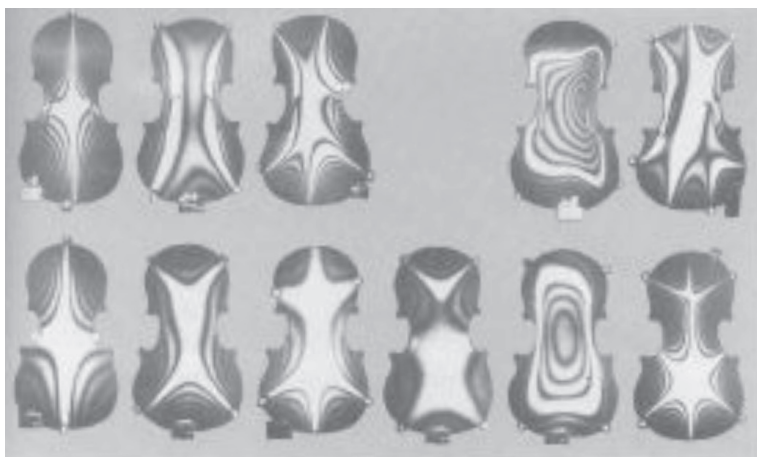
**Figure 76** — Amplitude des modes et des harmoniques dans les deux cas représentés à la Figure 75. On constate, d'une manière générale, qu'une corde jouée à une fraction  $n$  de sa longueur n'excite pas les modes d'ordre  $n$  (ici  $n=2$  dans la figure du haut et  $n=5$  dans la figure du bas).



### 7.3 Sillet, chevalet, corps, cavité et autres subtilités

La corde rayonne très peu d'énergie acoustique en vibrant; sa section est beaucoup trop petite par rapport à la longueur d'onde pour qu'elle soit acoustiquement efficace. C'est en réalité le corps de l'instrument qui produit le son; il est mis en vibration par les cordes au travers du sillet (côté manche) et du chevalet (côté opposé) pour les instruments de type guitare ou violon et au travers du cadre et de la table d'harmonie pour les pianos.

La rigidité et l'amortissement des liaisons entre la corde et le corps de l'instrument déterminent la force transmise et donc les vibrations du corps de l'instrument. Celui-ci est également un système dynamique et vibre préférentiellement à certaines fréquences. Il est par ailleurs couplé (guitares et violons) avec une cavité acoustique qui possède ses propres résonances. Il est enfin



**Figure 77** — Modes propres de vibration de la face arrière d'un violon visualisés par une technique de vibrométrie holographique.

amorti et on pense par exemple que c'est à son vernis qu'un stradivarius doit une partie au moins de ses qualités. Ce système va filtrer le signal émis par les cordes et influencer sur le timbre de l'instrument.

Rien n'est simple en musique et, parmi les nombreux phénomènes que nous n'avons pas encore énumérés et qui affectent sur le son produit, citons :

- ▷ l'interaction marteau-corde ;
- ▷ les cordes d'un piano sont doublées ou triplées et leurs vibrations sont couplées ;
- ▷ lorsqu'on joue une note, les cordes associées aux autres notes qui possèdent des harmoniques communes avec la note jouée vont sonner également ;
- ▷ des effets non-linéaires non négligeables apparaissent dans la dynamique des instruments à cordes.

## 8. INSTRUMENTS À CORDES - APPROCHE MATHÉMATIQUE

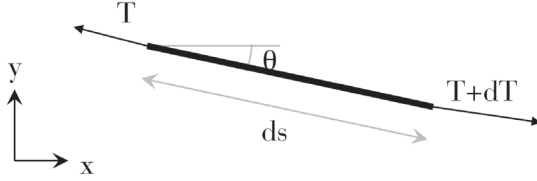
Nous présentons ici la théorie élémentaires des cordes vibrantes suivant deux approches : contemporaine et historique. Ceci demande de faire appel à des outils de mathématiques supérieures. Cette section peut être ignorée sans dommage et sans entraîner de difficultés dans la lecture de la suite du livre.

### 8.1 Approche contemporaine

#### *Équation d'équilibre*

Considérons une corde de masse linéique  $p$  et de longueur  $\ell$ . L'équilibre horizontal d'une section de corde [Figure 78] s'écrit ( $ds$  est l'élément de longueur) :

$$T \cos \theta + \frac{\partial (T \cos \theta)}{\partial x} - T \cos \theta = \rho \ddot{u} ds$$



**Figure 78** — Tronçon de corde : notations utilisées dans l'équation d'équilibre.

Si on considère que  $\theta$  est petit, on peut faire les approximations suivantes :

$$\cos \theta \simeq 1$$

et

$$ds \simeq dx$$

Si, de plus, on néglige les effets dynamiques horizontaux ( $\ddot{u}=0$ ), on trouve que la tension  $T$  dans la corde est constante. L'équilibre dynamique vertical s'écrit :

$$T \sin \theta + \frac{\partial (T \sin \theta)}{\partial x} - T \sin \theta = \rho \ddot{v} ds$$

Mais puisque  $\theta$  est petit, on a :

$$\sin \theta \simeq \tan \theta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

et,  $T$  étant constant, l'équation dynamique régissant le déplacement vertical de la corde (équation de d'Alembert) devient :

$$T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

*Modes propres de vibration de la corde*

Si on considère une corde fixée à ses deux extrémités ( $v(0)=0$  et  $v(\ell)=0$ ) on constate que les fonctions suivantes :

$$v = A \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \cos(\omega t)$$

respectent les conditions aux limites et sont solutions de l'équation de d'Alembert homogène pour autant que  $\omega$  prenne l'une des valeurs suivantes :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

qui sont les *valeurs propres* de l'équation dynamique de la corde. À chaque valeur propre correspond une *fréquence propre* :

$$f_n = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

et un *mode propre* :

$$\phi_n(x, t) = \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \cos(\omega_n t)$$

*Vibrations libres d'une corde*

La déformée d'une corde ne subissant aucune force extérieure peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres :

$$v(x, t) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos(\omega_n t)$$

Les *facteurs de participation modaux*  $A_n$  sont déterminés par la déformée initiale imposée à la corde :

$$v(x, 0) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

soit en multipliant les deux membres par  $\sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)$  et en intégrant sur toute la longueur de la corde :

$$\int_0^\ell v(x, 0) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx = \sum_n A_n \int_0^\ell \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx$$

Mais l'intégrale du second membre est égale à  $\delta_{mn}$  (symbole de Kronecker) et donc :

$$A_m = \int_0^\ell v(x, 0) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx$$

On peut, par exemple, calculer l'amplitude des différents modes excités par la vibration d'une corde pincée en un point de coordonnée  $x=a$  en assimilant la déformée initiale correspondante à deux droites :

$$v(x, 0) = \frac{x}{a} \quad x < a$$

$$v(x, 0) = \frac{\ell - x}{\ell - a} \quad x > a$$

On a alors :

$$A_m = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \frac{x}{a} dx + \int_a^\ell \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \frac{\ell - x}{\ell - a} dx$$

Après quelques calculs, on obtient :

$$A_m = \frac{2\ell}{a(\ell - a)} \left(\frac{\ell}{m\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi a}{\ell}\right)$$

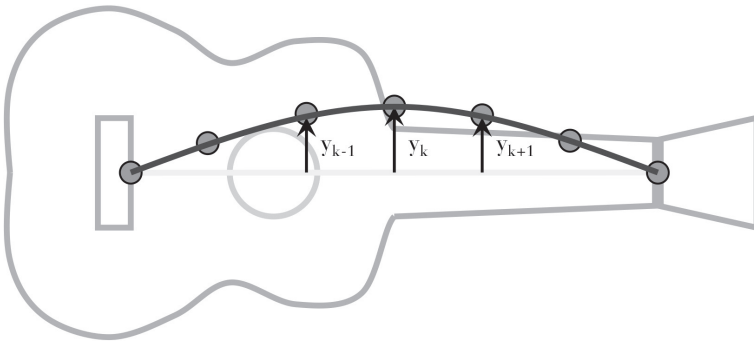
Les valeurs de  $A_m$  sont portées en graphe à la **Figure 76** respectivement pour une corde pincée en son milieu et au cinquième de sa longueur. Si  $a = \ell/m$ , on a bien  $A_m = 0$ .

## 8.2 Approche historique

La représentation de la dynamique d'une corde vibrante sous forme d'une équation aux dérivées partielles constitue une étape décisive de la physique moderne et du processus de *mathématisation du réel* qui la caractérise. Les succès éclatants de la dynamique newtonienne poussent les physiciens et les mathématiciens du dix-huitième siècle à aborder, à l'aide de ses outils, une multitude de problèmes. À une époque où l'unité du savoir est une réalité et où les musiciens sont philosophes et les mathématiciens musiciens, le problème des cordes vibrantes est l'objet de toutes les attentions. Un des membres de la célèbre dynastie de savants suisses, Jean Bernoulli [Figure 79], le frère de Jacques et le père de Daniel,



**Figure 79** — Jean Bernoulli (1667-1748) et Jean le Rond d'Alembert (1717-1783).



**Figure 80** — Dans le modèle proposé par Jean Bernoulli, une corde est représentée par  $n$  masses liées entre elles par les forces de rappel induites par la tension dans la corde.

s'intéresse au problème et décompose la corde en  $n$  tronçons qu'il assimile à une masse ponctuelle [Figure 80]. Si la masse totale de la corde est  $M$ , le tronçon  $k$  a une masse  $M/n$  et subit un déplacement

vertical  $y_k$ ; il est soumis à trois forces :

- ▷ la force d'inertie

$$\frac{M}{n} \frac{d^2 y_k}{dt^2}$$

- ▷ la force de rappel exercée par la masse  $k-1$  sur la masse  $k$  :

$$T \cdot \frac{y_{k-1} - y_k}{\frac{\ell}{n}}$$

- ▷ la force de rappel exercée par la masse  $k+1$  sur la masse  $k$  :

$$T \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{\frac{\ell}{n}}$$

L'équation dynamique associée à la masse  $k$  est alors :

$$\frac{M}{n} \frac{d^2 y_k}{dt^2} = T \cdot \frac{y_{k-1} - y_k}{\frac{\ell}{n}} + T \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{\frac{\ell}{n}}$$

qu'on peut réécrire :

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = \frac{T\ell}{M} \cdot \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\left(\frac{\ell}{n}\right)^2}$$

Chacune de ces équations fait intervenir le déplacement de la masse  $k$  mais également celui des masses  $k-1$  et  $k+1$ . Prises ensemble, les  $n$  équations forment un système d'équations différentielles ordinaires couplées : on ne peut, en effet, les résoudre



séparément car la solution de chacune dépend de la solution de ses voisines. Bernoulli tentera de résoudre le problème mais ne pourra le faire que pour de petites valeurs de  $n$  pour lesquelles le principe de discrétisation est trop imprécis. Pour des valeurs de  $n$  élevées, pour lesquelles la méthode donnerait une bonne précision, le calcul devient trop complexe.

D'Alembert<sup>11</sup> [Figure 79] tentera un pari un peu fou : puisque le problème devient plus compliqué mais aussi plus précis quand  $n$  augmente... que se passerait-il si  $n$  tendait vers l'infini ? Le résultat est remarquable :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^2 y_k}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\left(\frac{\ell}{n}\right)^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

et donc, par passage à la limite, les équations différentielles ordinaires couplées de Bernoulli deviennent l'équation aux dérivées partielles de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T\ell}{M} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

C'est la première apparition historique de cet objet mathématique si central dans la physique mathématique contemporaine.

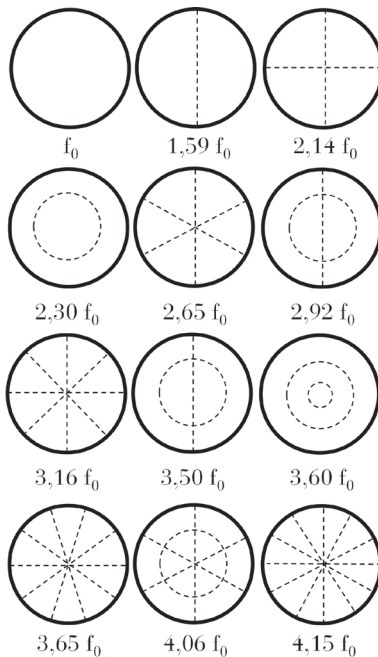
---

<sup>11</sup> **Jean le Rond d'Alembert**, mathématicien, philosophe et encyclopédiste français né le 16 novembre 1717 et mort le 29 octobre 1783 à Paris. Il a dirigé, avec Denis Diderot, l'édition de l'*Encyclopédie*.

## 9. PERCUSSIONS

Une corde tendue vibre suivant des *modes* particuliers [Figure 74] qui apparaissent à des fréquences particulières; celles-ci sont régulièrement espacées. La peau d'un tambour ou d'une timbale [Figure 81], une cymbale, une cloche ou le barreau d'un xylophone vibrent de même suivant des modes de vibration particuliers *mais ceux-ci sont irrégulièrement espacés*: le son d'un instrument à percussion est donc inharmonique.

La proportion des différents modes et fréquences associées dans la réponse de l'instrument dépend de la manière dont les vibrations sont excitées (dureté de la baguette ou du maillet, coup sec ou doux,



**Figure 81** — Modes de vibration d'une membrane circulaire, comme la peau d'un tambour ou d'une timbale. Les traits pointillés représentent les lignes nodales où le déplacement vertical est nul. La vibration est de sens contraire de part et d'autre d'une ligne nodale.

plus ou moins près du bord par exemple).

Si on peut accorder le fondamental (voire le faire varier en activant une pédale comme dans le cas de la timbale) on n'a guère de contrôle sur les autres fréquences de vibration du système qui ne tombent, en règle générale, sur aucun autre degré de la gamme.

## 10. SYNTHÈSE DU CHAPITRE

L'écoulement alterné de l'air de part et d'autre d'un biseau ou la vibration d'une anche engendre des oscillations de pression dans le tuyau d'un l'instrument. Celles-ci se produisent à des fréquences privilégiées, régulièrement espacées, qu'on appelle les partiels de l'instrument. Ces fréquences sont notamment fonction de la forme de la perce et du pavillon. Différents mécanismes de réglage de la longueur réelle ou apparente du tuyau permettent de changer la hauteur de la note jouée : coulisse, piston, trous de jeux et registre.

Les cordes sont également des systèmes résonants à une seule dimension et leurs vibrations apparaissent comme la combinaison de modes propres dont les fréquences sont équidistantes; elles engendrent donc des sons harmoniques.

Les instruments à percussion sont, en général, inharmoniques car leur corps, tridimensionnel, présente des fréquences de résonance qui ne sont pas équidistantes.



## Enveloppe et timbre

Deux sons de même hauteur tonale sont caractérisés par la même fréquence fondamentale; ils posséderont aussi des harmoniques de même hauteur mais dans des proportions différentes [Chapitre 1]. Les instruments de musique (vents, cordes) engendrent naturellement ce genre de sons harmoniques et leur physique (par exemple la position à laquelle une corde de guitare est pincée) explique leur contenu harmonique [Chapitre 8].

Le son musical est toutefois bien plus complexe qu'une simple combinaison d'harmoniques et il nous faut maintenant aller un peu plus loin dans la définition du timbre d'un instrument. Ce chapitre comporte deux grandes parties.

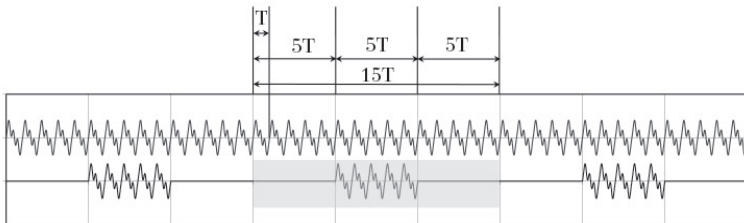
1. Les sons harmoniques ont une extension temporelle infinie alors qu'un son musical (une note de musique) a nécessairement une durée finie; elle doit d'ailleurs sa qualité essentielle au fait qu'elle se détache du silence qui la précède pour se perdre dans le silence qui la suit. Nous ferons apparaître ce silence par la combinaison d'un nombre infini de sons monochromatiques d'amplitudes bien choisies: le silence n'est pas qu'absence de son, il est aussi, en un sens, accumulation pléthorique de sons ! Le silence qui précède et suit une note est à la source d'une part importante de sa richesse harmonique.

2. Un signal de durée finie peut être vu comme un signal de durée infinie observé au travers d'une petite *fenêtre temporelle*. La fenêtre la plus simple qu'on puisse concevoir est rectangulaire: elle

permet de voir le signal d'un instant  $t_1$  à un autre instant  $t_2$ . Il existe d'autres fenêtres, de formes plus complexes, et un modèle assez général de la note musicale est le résultat de la combinaison d'un signal polychromatique harmonique et d'une fenêtre qu'on appelle l'enveloppe du signal et dont l'archétype est la fenêtre «ADSR».

## 1. SON ET SILENCE

Reprenons le signal de la **Figure 9**, dont la période est  $T$  ; nous appellerons ce signal le *signal original*. Considérons des groupes de 3 fois 5 périodes de ce signal et annulons chaque fois le signal dans le premier et le dernier groupe [**Figure 82**].

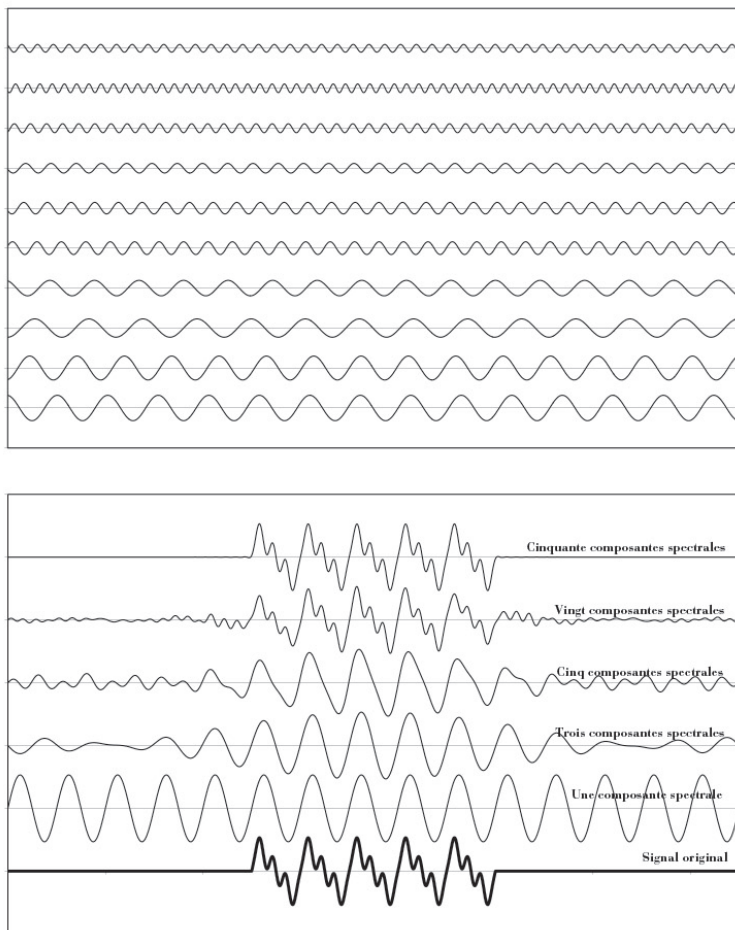


**Figure 82** — Signal harmonique [**Figure 9**] dans lequel on a intercalé des périodes de silence.

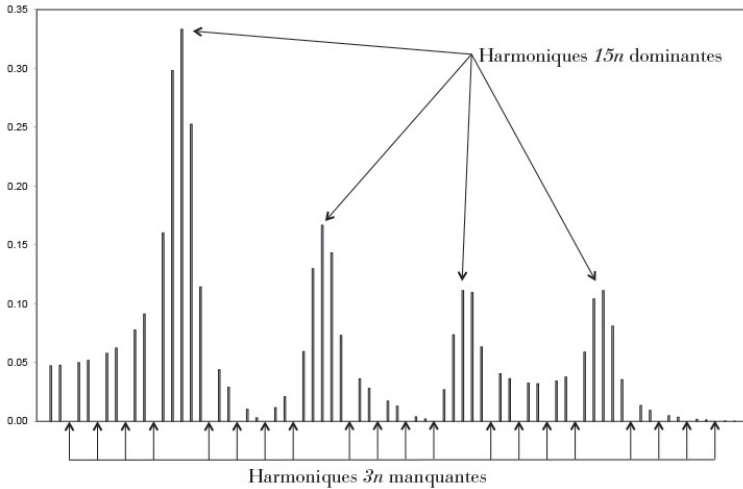
Ce *signal modifié* est toujours périodique mais sa période n'est plus  $T$  mais  $T^* = 15T$  : en effet, ce n'est qu'après quinze périodes du signal original (5 de silence, 5 de son, 5 de signal) qu'on retrouve la même variation du signal.

Puisqu'il est périodique, on peut analyser ce signal modifié, qui combine son et silence, par la superposition de sons monochromatiques dont les fréquences sont des multiples entiers du nouveau fondamental :  $f_0^+ = 1/(15T) = f_0/15$ . La **Figure 83** montre les premières

composantes harmoniques et la recombinaison de ces signaux en un signal complexe qui se rapproche de plus en plus du signal original.



**Figure 83** — Premières composantes harmoniques (diagramme du haut) et signal obtenu par recombinaison de un, trois, cinq, vingt et cinquante harmoniques.



**Figure 84** — Spectre du signal pour une durée de silence de  $10T$ .

Le spectre associé au signal est représenté à la **Figure 84**. Il mérite qu'on s'y attarde pour émettre quelques commentaires.

- ▷ Le spectre fait apparaître le fondamental  $f_0^+$  et ses multiples entiers.
- ▷ Les harmoniques d'ordre 3 ( $3, 6, 9, 12f_0^+$ ) associés à la période  $5T = T/3$  sont nuls. Ceci résulte de notre choix, très particulier, d'un signal construit par alternance de trois intervalles de durée  $5T$  : silence-son-silence.
- ▷ Les harmoniques d'ordre 15 ( $15f_0^+ = f_0$ ) font exception et sont, au contraire, dominants. Le signal original ne possédait que ces harmoniques ; le signal modifié en fait apparaître beaucoup d'autres dont le rôle est, précisément, de garantir le silence avant et après chaque impulsion sonore.

Le silence qui précède et suit un son enrichit donc son empreinte



harmonique. On comprend mieux la citation de Sacha Guitry : « Lorsqu'on vient d'entendre un morceau de Mozart, le silence qui lui succède est encore de lui<sup>1</sup>. »

Le signal ainsi construit reste toutefois de peu d'intérêt : certes, il contient du silence mais celui-ci n'est qu'une pause entre deux bouffées de son qui répètent à l'infini le même motif. Pour nous rapprocher d'une note unique, augmentons progressivement la durée de la période de silence. Les **Figure 85 à 89** montrent comment le spectre (limité à 200 Hz pour des raisons de lisibilité) évolue lorsque la durée du silence prend successivement les valeurs 10T (5-5-5 : 5 périodes de silence, 5 périodes de son, 5 périodes de signal), 20T (10-5-10), 50T (25-5-25) et finalement, par passage à la limite, une valeur infinie ( $\infty$ -5- $\infty$ ).

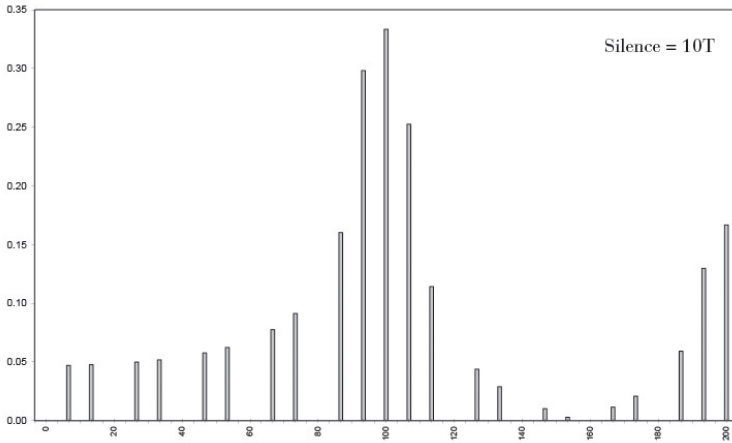
Lorsque  $T^+$  augmente, le nombre d'harmoniques augmente et ils se rapprochent l'un de l'autre (la fréquence qui sépare deux harmoniques est le fondamental  $f_0^+$  dont la valeur diminue quand  $T^+$  augmente). L'amplitude individuelle de chaque harmonique diminue également. Ceci traduit le fait que l'énergie totale du signal reste constante (on n'ajoute qu'une période de plus en plus longue de silence) mais qu'elle se répartit sur un nombre de plus en plus grand d'harmoniques<sup>2</sup>.

Tant que la période  $T^+$  reste finie, le spectre reste *discret*, c'est-à-dire composé d'harmoniques dont les fréquences sont bien distinctes l'une de l'autre, ce dont témoigne le diagramme en bâtonnets. Lorsque  $T^+$  devient infini [**Figure 89**], le fondamental devient nul, les harmoniques sont infiniment voisines l'une de l'autre : le spectre est devenu *continu*. L'amplitude de chaque harmonique est infinitésimale : toutes les fréquences sont présentes mais chacune

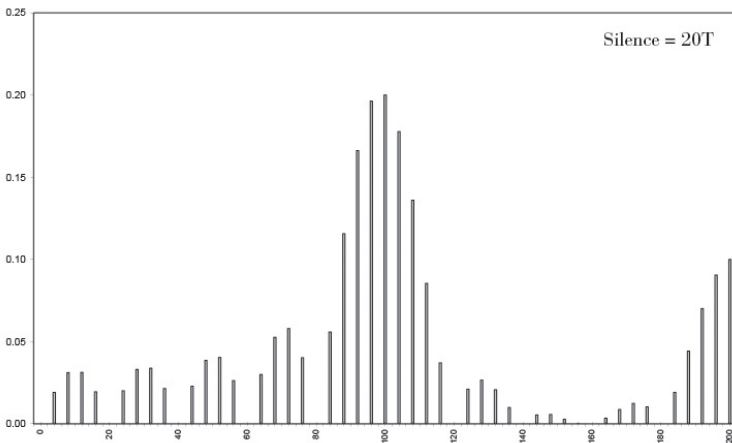
<sup>1</sup> GUITRY S., *Toutes réflexions faites (1947)*, dans Cinquante ans d'occupations, Sacha Guitry, éd. Presses de la Cité, coll. Omnibus, 1993, p. 69.

<sup>2</sup> La propriété mathématique invoquée ici s'appelle l'*égalité de Parseval*.

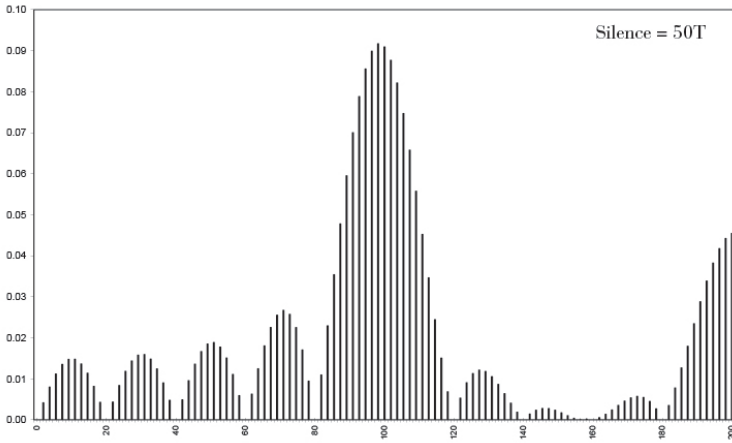
ne contribue que pour une part infiniment petite au signal. La contribution des fréquences centrées sur les harmoniques du signal original (100, 200, 300, 400 Hz) reste dominante.



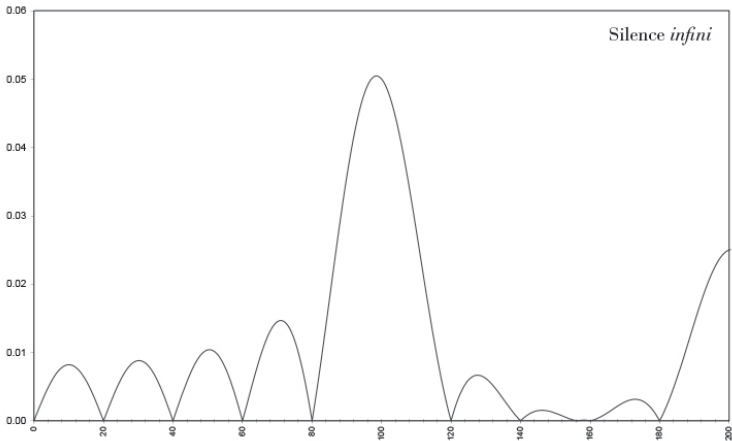
**Figure 85** — Spectre du signal pour une durée de silence de 10T (zoom sur les fréquences inférieures à 200Hz).



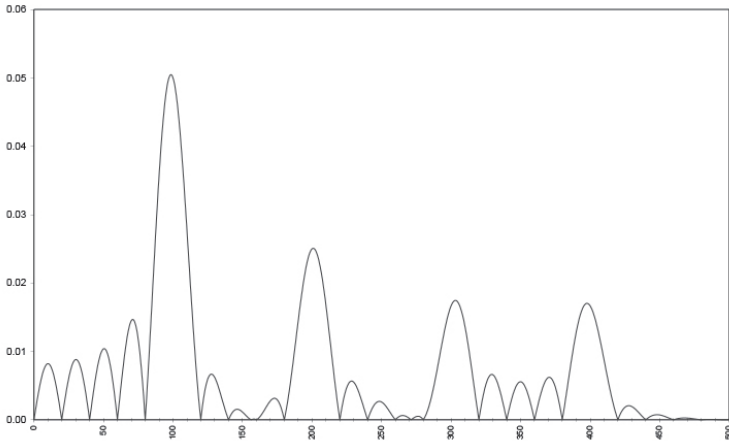
**Figure 86** — Spectre du signal pour une durée de silence de 20T ([0-200] Hz).



**Figure 87** — Spectre du signal pour une durée de silence de  $50T$  ( $[0-200]$  Hz).



**Figure 88** — Spectre du signal pour une durée de silence infinie ( $[0-200]$  Hz).



**Figure 89** — Spectre du signal pour une durée de silence infinie ([0-500] Hz).

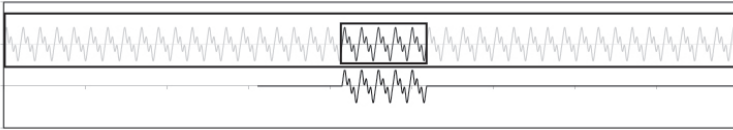
Nous avons choisi d'étudier un signal excessivement court (5 périodes du fondamental du signal original) ; ceci explique l'élargissement très important des raies spectrales autour des harmoniques. Si nous avions pris un signal plus long, une seconde par exemple, soit 100T, nous aurions obtenu un spectre où une plus grande partie de l'énergie apparaîtrait à des fréquences voisines des fréquences harmoniques ; les raies spectrales auraient été plus étroites.

La conclusion que l'on peut tirer de l'observation de la **Figure 89** est cependant générale : le support temporel fini du signal transforme le spectre discret en un spectre continu où les composantes voisines des fréquences harmoniques dominent.

## 2. FENÊTRE ET ENVELOPPE SONORE

Un son éphémère, de durée limitée, précédé et suivi par un silence infini, peut être analysé comme un signal infini vu au travers d'une

fenêtre temporelle rectangulaire [Figure 90]. Tout ce qui n'est pas situé à l'intérieur de la fenêtre est caché, masqué. Nous avons vu que l'effet de ce *fenêtrage* est de transformer le spectre discret de la Figure 11 en celui, continu, de la Figure 89. Le spectre d'un son, et donc son contenu harmonique, dépendent à la fois des harmoniques qu'il contient et de la fenêtre au travers de laquelle on l'observe.



**Figure 90** — Le signal fugitif du diagramme du dessous peut être analysé comme l'observation au travers d'une petite fenêtre du signal infini du diagramme du dessus.

Si on observe à nouveau [Figure 91] le signal du La d'une guitare déjà présenté au chapitre 1, on voit qu'on peut schématiquement le décomposer en quatre zones marquées par les lettres A, D, S et R<sup>3</sup> :

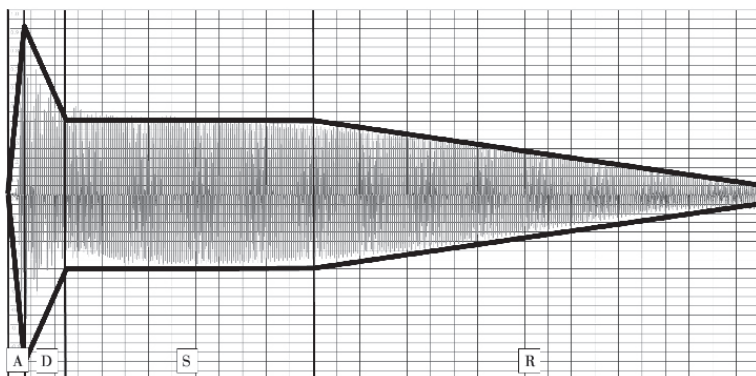
- ▷ La première zone (A pour *attack* ou attaque) est caractérisée par une montée rapide de l'amplitude des fluctuations de pression et par un signal complexe et irrégulier (voir le zoom sur cette zone à la Figure 4).
- ▷ Après une montée rapide du niveau sonore<sup>4</sup>, celui-ci décroît un peu (zone D pour *decay* ou décroissance ; on parle aussi de chute) avant de se stabiliser (zone S pour *sustain* ou stabilisa-

<sup>3</sup> Les initiales ADSR sont très largement utilisées en langue française même si, comme on le verra ci-dessous elles sont les initiales de termes anglais. La terminologie francophone officielle est ACEE pour Attaque, Chute, Entretien, Extinction mais elle est relativement peu utilisée.

<sup>4</sup> Par souci de simplicité nous assimilerons ici le niveau sonore avec l'amplitude des fluctuations de pression.

tion, on parle aussi d'entretien). La partie du signal montrée à la **Figure 3** constitue un fragment de la zone S qu'on appelle en français le *corps* du signal.

- ▷ Après un certain temps, le signal semble s'épuiser et se met à décroître; c'est la zone R, pour *release* ou relâchement; on parle aussi d'*extinction*.



**Figure 91** —Signal et enveloppe sonore. On pourrait définir une enveloppe qui encadrerait au plus près le signal sonore mais nous montrons ici l'enveloppe standardisée ADSR.

Le polygone qui matérialise l'enveloppe est une *fenêtre* au travers de laquelle on voit le signal harmonique. La fenêtre de la **Figure 90** était rectangulaire, elle se contentait de tronquer le signal, ne laissant passer celui-ci qu'entre deux instants donnés sans en modifier l'amplitude. L'enveloppe ADSR a également un début et une fin mais elle *module* aussi le son, augmentant son amplitude pendant la phase A, la faisant décroître pendant les phases D et R, la maintenant au contraire constante pendant la phase S.

**Nous avons maintenant un modèle assez complet d'un son musical**; il est constitué de trois composantes :

- ▷ Au niveau le plus **fondamental**, on trouve un signal sinusoïdal monochromatique dont la fréquence  $f_0$  détermine la hauteur tonale du son.
- ▷ À ce fondamental s'ajoutent, en proportions variables et avec des déphasages variables suivant les instruments, d'autres signaux monochromatiques, appelés les **harmoniques**, dont les fréquences sont des multiples entiers de  $f_0$ .
- ▷ Le signal harmonique infini ainsi défini est tronqué et modulé par une **fenêtre** qui, elle aussi, est propre à l'instrument. L'effet de cette fenêtre est de faire apparaître un ensemble de fréquences qui n'étaient pas dans le signal de départ même si elles tendent à se concentrer autour de la fréquence des harmoniques. La forme de la fenêtre détermine l'élargissement du spectre autour des harmoniques.

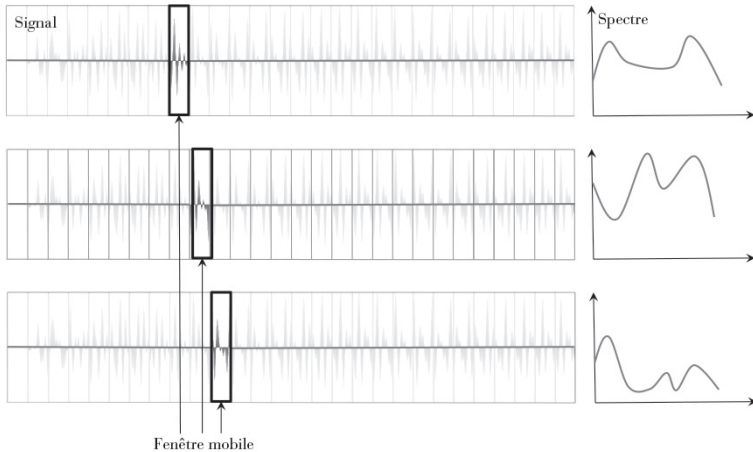
Ce sont ces deux derniers éléments (amplitude des harmoniques et forme de l'enveloppe) qui nous permettent de différencier la même note jouée par deux instruments et qui, inversement, nous font trouver un air de famille à toutes les notes jouées sur un instrument donné.

### 3. ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE

#### 3.1 Spectre dynamique

À une note est associée un spectre qui reflète son contenu harmonique et la forme de son enveloppe. On étudie souvent un son long en observant son spectre *dynamique* [Figure 92]. À un instant  $t$  donné du signal est associé un spectre calculé sur une fraction du signal centré sur cet instant  $t$ . Le spectre dynamique (c'est-à-dire

variant dans le temps) dépend de la forme et de la largeur de la fenêtre utilisée pour extraire chaque tronçon de signal.



**Figure 92** — Spectre dynamique : à chaque instant une fenêtre est appliquée au signal original et le spectre est calculé sur base de ce signal fenêtré. Le spectre change donc en fonction du temps (les spectres représentés sont purement illustratifs).

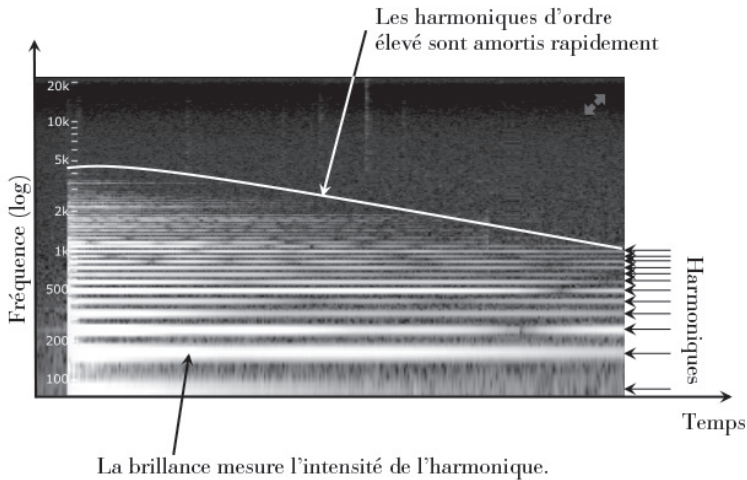
### 3.2 Sonagrammes ou spectrogrammes

Un sonogramme (ou spectrogramme) est une représentation graphique intéressante qui donne une image globale d'un son [Figure 93]. Les lignes horizontales représentent les différents harmoniques et l'épaisseur ou la brillance du trait donne une idée de leur amplitude relative. L'axe vertical représente les fréquences (en échelle logarithmique), l'axe horizontal le temps. Une coupe verticale dans le spectrogramme à un instant donné est une représentation du spectre dynamique à cet instant.

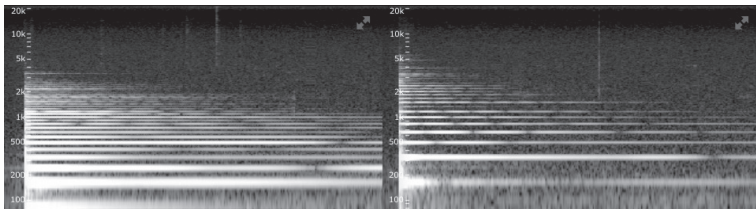


La **Figure 94** compare les spectrogrammes de  $Mi_2$  et  $Mi_3$  jouées au piano. On observe bien le doublement de fréquence attendu.

La **Figure 95** compare les spectrogrammes de deux notes identiques jouées sur deux instruments différents (piano et guitare); les différences se marquent en termes de richesse harmonique ainsi que de temps d'apparition et de disparition des harmoniques.

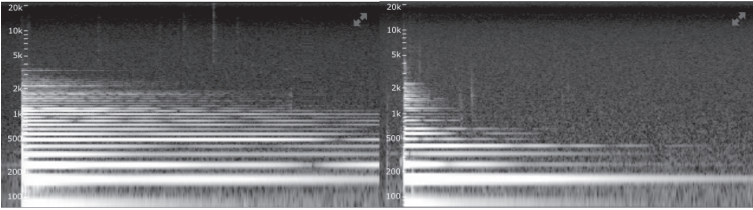


**Figure 93** — Spectrogramme d'un  $Mi_2$  au piano.

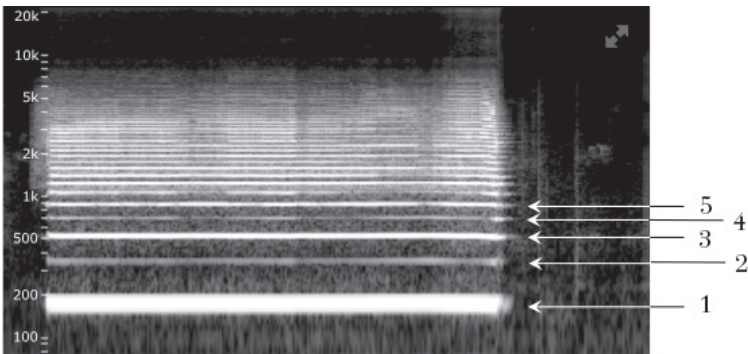


**Figure 94** — Spectrogramme d'un  $Mi_2$  (à gauche) et d'un  $Mi_3$  (à droite) au piano; on voit bien le doublement de fréquence lié à l'octaviation.

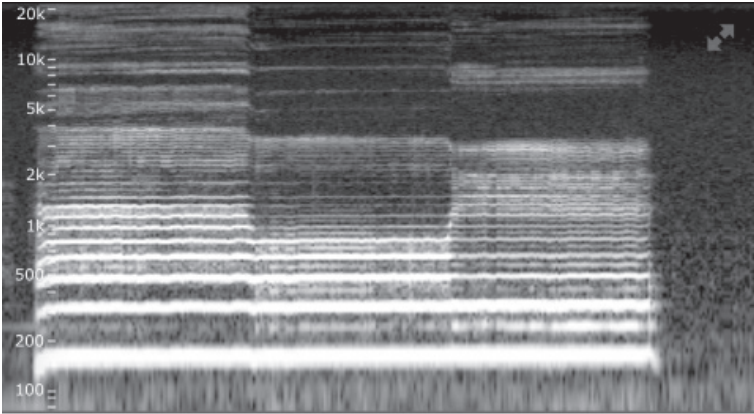
La **Figure 96** montre le spectrogramme d'un Do joué à la clarinette ; comme expliqué au **chapitre 8**, les harmoniques impairs sont largement dominants. La **Figure 97** donne le spectrogramme de différentes voyelles chantées sur Mi2.



**Figure 95** — Comparaison d'un Mi2 joué au piano et à la guitare. Le piano a un spectre plus riche et les harmoniques élevés y résonnent plus longtemps.



**Figure 96** — Sonogramme d'un Do2 joué à la clarinette. Les harmoniques impairs sont très présents, les harmoniques pairs presque absents.

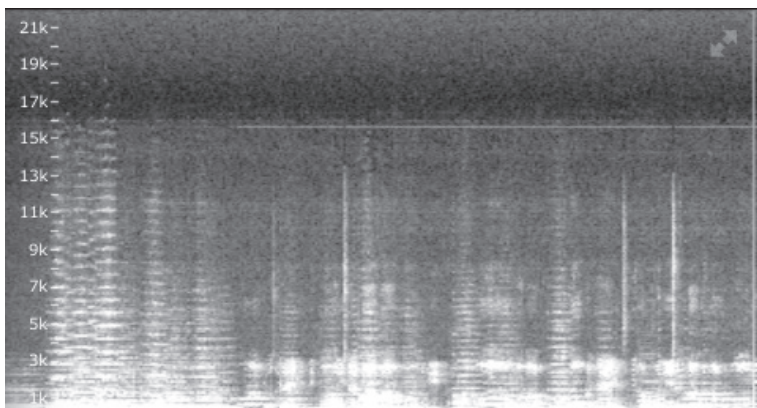


**Figure 97** — Voyelles a-o-u chantées sur  $Mi_2$ . La voix chantée est caractérisée par une fluctuation (modulation) de la fréquence des harmoniques.

### 3.3 De la note au morceau

Nous avons maintenant une vision assez claire de ce qui définit une note et nous disposons de deux descripteurs de celle-ci : le signal (domaine temporel) et le spectre (domaine fréquentiel). Une pièce musicale est une série de notes jouées par un ou plusieurs instruments, simultanément et/ou consécutivement. Le signal associé au morceau complet est simplement la somme des signaux associés à chaque note, chaque signal élémentaire étant placé à l'endroit idoine le long de l'axe du temps. Le spectre correspondant est également, à un détail près, la somme des spectres de chaque note<sup>5</sup>. Il n'y a donc pas de différence de nature entre une note unique et une symphonie : les deux ont un signal et un spectre. Le signal de

<sup>5</sup> En fait le spectre de chaque note est multiplié par un terme de modulation qui est l'équivalent, dans le domaine des fréquences, du décalage temporel qui positionne chaque note à son point de départ.



**Figure 98** — Spectrogramme d'une courte séquence tirée de la *Messe des morts* d'André Campra (1660-1744).

la symphonie est simplement plus long et plus complexe et son spectre plus dense et plus *chahuté* que celui de la note isolée. Sa représentation sous forme de spectrogramme est par ailleurs peu lisible [Figure 98].

C'est pourquoi on l'analyse souvent en termes de spectres dynamiques, ce qui pose d'ailleurs un problème intéressant à l'analyste. Pour avoir une bonne résolution fréquentielle, c'est-à-dire identifier et distinguer clairement toutes les composantes harmoniques présentes, il faut une fenêtre large (la taille de la fenêtre fixe la plus grande période et donc la plus petite fréquence identifiable). Par contre, pour avoir une bonne résolution temporelle, c'est-à-dire produire un spectre caractéristique d'un instant précis donné, il faut avoir la fenêtre la plus étroite possible. On doit donc toujours trouver un compromis acceptable entre la résolution temporelle et fréquentielle. Meilleure sera la résolution temporelle, plus il y aura d'incertitude sur les fréquences constitutives du signal à cet instant. Plus la résolution spectrale sera

fine, moins l'instant où ces fréquences apparaissent sera connu avec précision<sup>6</sup>.

Cette relation d'incertitude entre temps et fréquence (quand l'incertitude sur un terme augmente, l'autre diminue et réciproquement) fait écho à la fameuse relation d'incertitude de Heisenberg qui précise que, dans le domaine quantique, le produit de l'incertitude sur la position d'une particule et sur sa vitesse est constant : quand l'une augmente, l'autre diminue.

#### 4. RETOUR SUR HARMONIQUES ET DEGRÉS DE LA GAMME

On a vu que la durée finie du signal transforme le spectre discret du signal original en un spectre continu dominé par les mêmes harmoniques. L'enveloppe transforme en fait les lignes horizontales des **Figure 37** et **Figure 40** en bandes plus ou moins larges centrées sur les harmoniques et s'estompant lorsqu'on s'en éloigne. Ce qui compte donc, dans un contexte de sons musicaux réels, c'est que les intersections entre les lignes verticales représentant les degrés de la gamme et la bisectrice se situent à l'intérieur de ces bandes. Ceci augmente considérablement le nombre d'harmoniques qui tombent approximativement dans la gamme, qu'elle soit tempérée ou non. En densifiant le spectre autour des harmoniques, l'enveloppe joue donc un rôle fondamental dans l'harmonie en permettant à tous les harmoniques importants de sonner à l'unison d'un degré de la gamme.

---

<sup>6</sup> La théorie des ondelettes, mise au point notamment par la mathématicienne belge Ingrid Daubechies, résout (sans le supprimer) ce paradoxe en juxtaposant plusieurs représentations spectrales obtenues avec des largeurs de fenêtres différentes.

## 5. SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Une note de musique est un signal harmonique modulé et tronqué par une enveloppe. Le fenêtrage du signal convertit le spectre discret associé aux sons harmoniques en un spectre continu où dominent certes les fréquences harmoniques mais où toutes les autres fréquences sont également présentes. L'enveloppe sonore et ses quatre phases caractéristiques (attaque, décroissance, stabilisation et relâchement – ADSR) est un élément déterminant du timbre de l'instrument.

## De la note au cerveau

Les chapitres précédents nous ont permis de comprendre la nature du son produit par les instruments de musique. Ce dernier chapitre<sup>1</sup> expliquera les dernières étapes à franchir :

- ▷ comment le son produit par les instruments remplit-il la salle de concert ;
- ▷ comment notre oreille transforme-t-elle la pression agissant sur le tympan en un signal électrique ;
- ▷ comment notre cerveau convertit-il ce signal en perception ?

Ce chapitre, complément et conclusion des précédents, se veut simple et concis. Il ne s'agit que d'une introduction aux trois thématiques. Le traitement ne se revendique par ailleurs d'aucune originalité.

### 1. ACOUSTIQUE DES SALLES

#### 1.1 Temps de réverbération

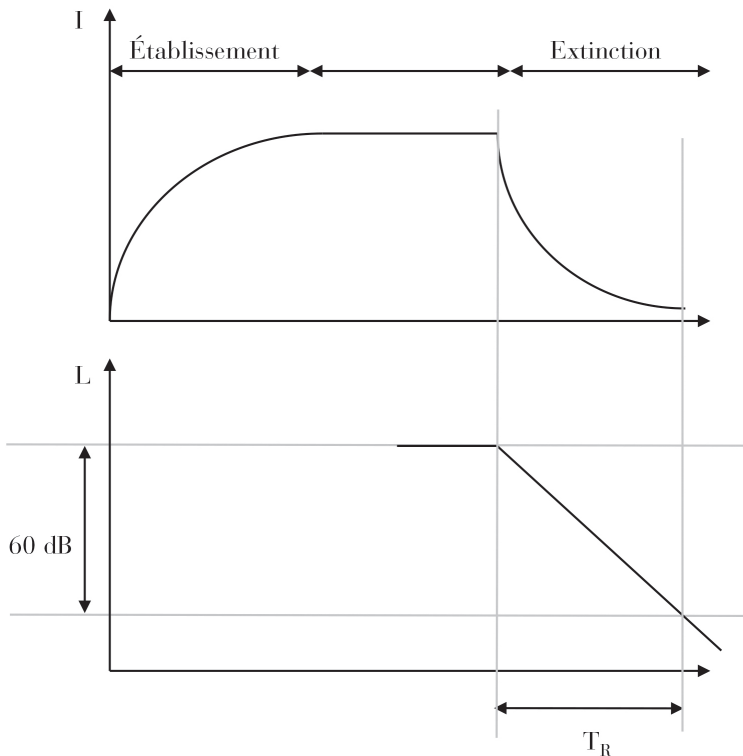
Lorsqu'on émet dans une salle un son continu (une note soutenue), il met un certain temps à occuper tout l'espace, mais ce *temps d'éta-*

---

<sup>1</sup> J'ai choisi ce titre *De la note au cerveau* en reprenant inconsciemment le titre de la traduction française d'un livre de LEVITIN D., *This is Your Brain on Music*, Dutton Penguin, 2006. J'ai décidé, après réflexion, de le conserver, rendant ainsi hommage à un excellent et très accessible livre de psychologie de l'audition.

*blissement* est tellement court qu'on n'en a guère conscience [Figure 101, graphe du haut]. Quand ce son cesse d'être émis, en revanche, nous avons bien conscience qu'il persiste un certain temps avant de devenir imperceptible et de disparaître (extinction).

Cette rémanence du son dépend considérablement de la salle ; il peut être très long dans une cathédrale et très court dans un salon richement meublé d'épaisses moquettes et de lourds rideaux. On le caractérise par le *temps de réverbération* qui est le temps nécessaire



**Figure 99** — Établissement, extinction et temps de réverbération



à ce que le niveau sonore dans la salle décroisse de 60 décibels<sup>2</sup> après arrêt de la source [Figure 99, graphe du bas]. Ce temps, caractéristique de la salle, peut être calculé par la formule de Sabine<sup>3</sup>:

$$T_R = 0.16 \frac{V}{A}$$

où  $V$  est le volume de la salle (plus ce volume est grand, plus le temps de réverbération est important) et  $A$  est la *surface d'absorption* de la salle, c'est-à-dire sa surface totale, mais où chaque portion de surface est pondérée par un *coefficient d'absorption* compris entre 0 et 1. Un matériau parfaitement réfléchissant (dalles, marbre, béton brut) aura un coefficient proche de 0 alors qu'un matériau très absorbant (un épais tapis en laine, une couche épaisse de laine de roche) aura un coefficient d'absorption proche de 1. Plus la surface d'absorption est grande, plus le temps de réverbération est faible.

On comprend bien que le temps de réverbération d'une salle influence profondément le rendu d'une œuvre musicale. Si le temps de réverbération est très long, une note continue longtemps à résonner et interagit donc avec les notes suivantes ; si le compositeur n'a pas pris cet effet en compte, des harmonies malheureuses et involontaires peuvent apparaître. Si le temps de réverbération est trop court, les notes mourront trop vite et le rendu sera sec, dépourvu de chaleur, et une partie de sa richesse sera perdue.

Il n'est pas surprenant, par exemple, que le chant grégorien soit apparu dans des monastères aux vastes églises au sol nu ; il perdrait beaucoup de sa beauté sans la réverbération de la salle. À l'inverse, des pièces plus contemporaines, au rythme plus rapide et à la sonorité

---

<sup>2</sup> Voir la définition du décibel dans l'appendice 3, en fin de volume.

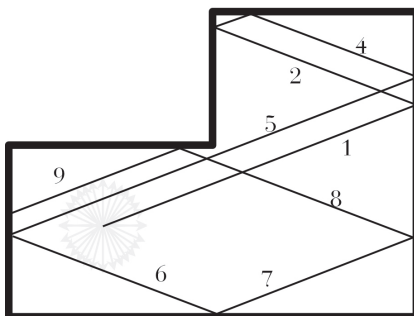
<sup>3</sup> **Wallace Sabine** (1868-1919), acousticien américain.

plus dense, deviendraient une cacophonie si elles étaient jouées dans une cathédrale. Il n'y a pas, du point de vue du temps de réverbération, dans l'absolu, de bonnes et de mauvaises salles : à chaque type de musique correspond un type de salle idéal. Le concept de salle de concert polyvalente n'a, d'un point de vue musical, pas de sens.

## 1.2 Distribution du son dans une salle

Le temps de réverbération est une grandeur globale : elle ne dit rien sur la répartition plus ou moins égale du son dans la salle. Pour comprendre cette distribution inégale, on a recours à la méthode des tirs de rayons. L'idée en est simple [Figure 100] ; elle consiste à répartir la totalité de l'énergie d'une source sur un ensemble de rayons partant dans toutes les directions puis de suivre le chemin de chacun des rayons au fil de ses réflexions sur chaque mur. Chaque rayon perd progressivement une part de son énergie par les trois mécanismes suivants :

- ▷ en s'éloignant de la source le rayon répartit son énergie sur une surface de plus en plus grande ce qui conduit à une perte de 6 décibels pour chaque doublement de la distance ;
- ▷ à chaque réflexion sur une paroi le rayon perd une fraction de son énergie proportionnelle au coefficient d'absorption de la paroi ;



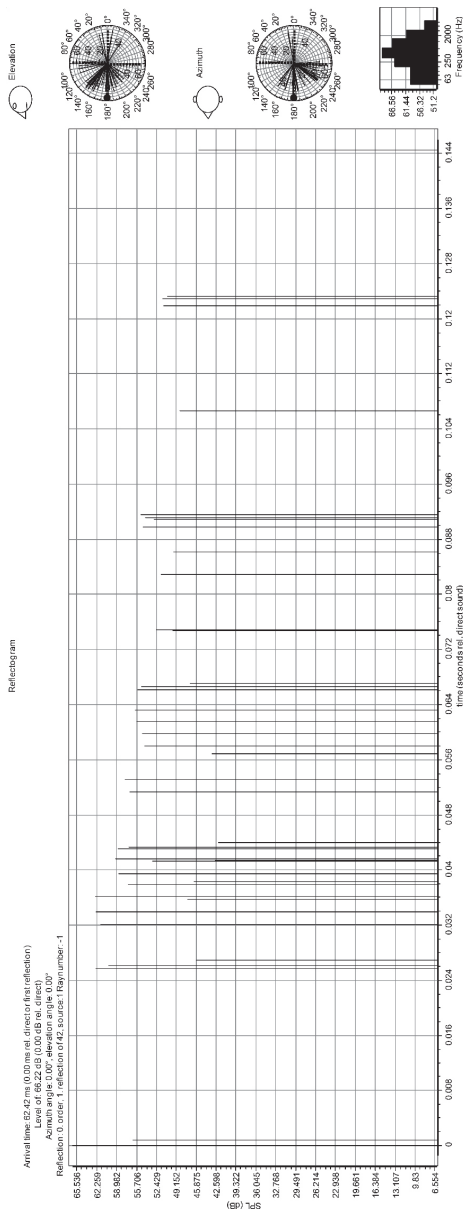
**Figure 100** — Principe de la méthode des tirs de rayons.

- ▷ la viscosité de l'air, aussi faible soit-elle, engendre une perte additionnelle dépendant du trajet total du rayon.

Lorsqu'on a calculé le trajet de tous les rayons on peut, en un endroit donné de la salle, analyser quels rayons passent par celui-ci, à quel moment et en portant quelle énergie résiduelle ; cette analyse produit un réflectogramme [Figure 101]. À partir des réflectogrammes obtenus en différents points répartis sur une surface, on peut aussi tracer des cartes de distribution sonore comme celle de la Figure 102.

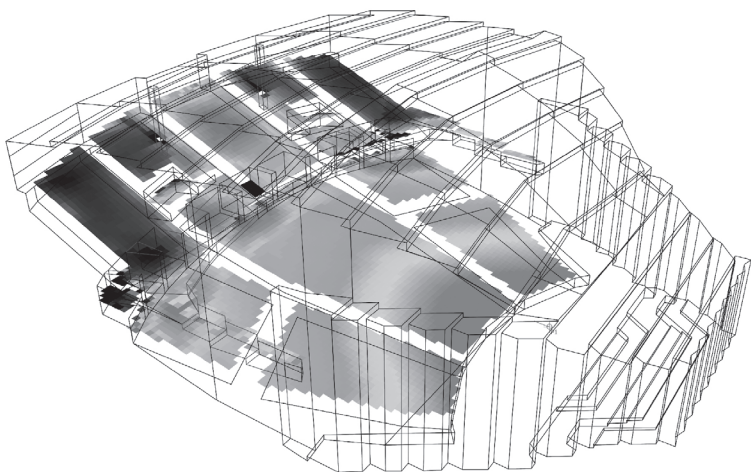
L'idéal est évidemment d'obtenir une distribution aussi homogène que possible du niveau sonore dans la salle, mais il convient aussi, par exemple :

- ▷ d'éviter les échos francs c'est-à-dire des réflexions d'intensités importantes séparées par un intervalle de temps trop long ;
- ▷ d'équilibrer le son provenant, pour un auditeur donné, de différentes directions : le son provenant par le côté, qui est perçu avec un léger décalage par les deux oreilles, favorise par exemple la localisation par le cerveau de la source de ce son ;
- ▷ de favoriser les réflexions diffuses par rapport aux réflexions spéculaires. Une réflexion spéculaire est une réflexion similaire à celle de la lumière sur un miroir : un rayon arrivant sur une surface depuis une direction déterminée est réfléchi dans une seule direction, en un rayon unique. La réflexion est diffuse lorsque, à cause d'irrégularités volontaires ou accidentelles de la surface, l'énergie portée par un rayon est réfléchiée dans une multitude de directions : elle est diffusée par la surface. De nombreuses salles de concert sont pourvues, à des endroits stratégiques, de diffuseurs pour mieux homogénéiser le son dans la salle.



**Figure 101** — Chaque barre verticale du réflectogramme représente l'intersection entre un rayon et un récepteur; l'abscisse donne le temps d'arrivée alors que l'ordonnée donne l'énergie résiduelle portée par le rayon à cet instant de son parcours dans la salle. Les petits diagrammes à côté du réflectogramme montrent la distribution angulaire des rayons frappant le récepteur, en élévation et en azimuth. Reproduit avec l'aimable autorisation de Odeon Room Acoustics Software.

La méthode des tirs de rayons permet d'analyser, vérifier, améliorer, optimiser tous ces éléments de la qualité sonore d'une salle.



**Figure 102** — Application de la méthode des tirs de rayons à une salle réelle : les niveaux de gris indiquent le niveau sonore.

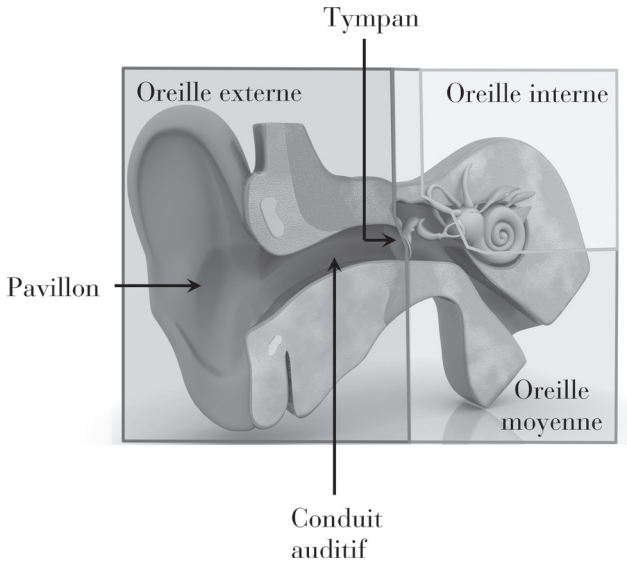
Reproduit avec l'aimable autorisation de Odeon Room Acoustics Software

## 2. PHYSIOLOGIE DE L'AUDITION

Le son musical est enfin parvenu à nos oreilles; comment va-t-il passer du pavillon de celles-ci au cerveau ?

### 2.1 Les trois parties de l'oreille humaine

Les organes de l'audition, appelés globalement *l'oreille*, sont divisés en deux grands ensembles : l'oreille *périphérique* mettant en œuvre des phénomènes de nature mécanique entrant dans le domaine de



**Figure 103** — Schéma général de l'oreille et éléments de l'oreille externe.

la physiologie générale et l'oreille *centrale* mettant en œuvre des phénomènes de nature électro-chimique du ressort de la neurologie.

L'oreille périphérique se décompose en trois parties [Figure 103] :

- ▷ l'oreille externe qui comprend le *pavillon* et le *conduit auditif* fermé par le *tympan* [Figure 103] ;
- ▷ l'oreille *moyenne* [Figure 104] comprise entre le tympan et la *fenêtre ovale*, ces deux membranes étant reliées entre elles par trois osselets (le *marteau*, l'*enclume* et l'*étrier*) ;
- ▷ l'oreille *interne* qui inclut la *cochlée* et l'*organe de l'équilibre* constitué des *canaux semi-circulaires* [Figure 104].

Les oreilles moyenne et interne sont encore reliées entre elles par une troisième membrane : la *fenêtre ronde*.

L'oreille externe et l'oreille moyenne constituent la partie

*conductive* de l'appareil auditif dont la fonction est d'amener les sons jusqu'aux oreilles interne et centrale qui en constituent la partie *perceptive*.

## 2.2 L'oreille externe

Le *pavillon* est la partie visible de l'oreille; il est constitué de cartilage recouvert de peau. Chez de nombreux mammifères le pavillon est pourvu de son propre système musculaire qui permet une écoute directive. Chez l'homme, il joue au mieux un rôle de coupe-vent et n'a guère le rôle d'entonnoir qu'on lui attribue souvent.

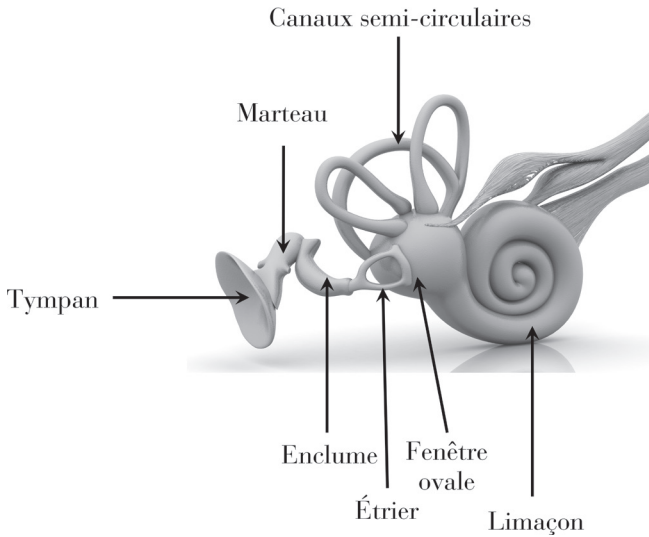
Le conduit auditif est un canal dont la section décroît au fur et à mesure qu'on se rapproche du tympan. Les parois du conduit sont d'abord cartilagineuses (partie externe) puis osseuses (partie interne). La longueur du conduit est de l'ordre de 2.5 cm; il réagit un peu comme une flûte de Pan et présente une résonance de type quart d'onde (voir chapitre 8) à la fréquence :

$$f_{res} = \frac{340}{4 \times 0.025} \sim 3400 \text{ Hz}$$

qui explique le pic de sensibilité de l'oreille humaine à cette fréquence.

## 2.3 L'oreille moyenne

L'oreille moyenne [Figure 104] est une cavité remplie d'air communiquant avec le *naso-pharynx* par la trompe d'Eustache. Un premier osselet, le marteau ou *malleus* est fusionné d'un côté avec le tympan et vient s'articuler de l'autre à l'enclume ou *incus*. L'enclume est elle-même connectée par un tendon à l'étrier ou *stapes* qui vient très exactement se fixer sur la fenêtre ovale. Un muscle (le tenseur du



**Figure 104** — Éléments de l'oreille moyenne (chaîne des osselets) et de l'oreille externe (canaux semi-circulaires et limaçon).

tympan) précontraint la membrane et assure la rigidité de la chaîne des osselets. L'étrier est également fixé au crâne par un muscle qui lui est propre. Ces trois osselets sont de très petite taille; leur histoire passionnante est une grande leçon de biologie évolutive<sup>4</sup>.

La chaîne des osselets assure une *adaptation d'impédance* entre l'air de l'oreille externe et le milieu aqueux occupant l'oreille interne. Sans ce délicat mécanisme, une part importante de l'énergie pénétrant dans le conduit auditif externe serait réfléchi à l'interface entre les deux milieux. Cette adaptation d'impédance est le résultat de deux effets :

<sup>4</sup> Voir GOULD J.S., *An Earful of Jaw* dans *Eight Little Piggies : Reflections in Natural History*, Norton & Co, 1993. Traduction française publiée sous le titre *Comme les huit doigts de la main*.



- ▷ le rapport des surfaces entre le tympan et la fenêtre ovale est de l'ordre de 20 ; le rapport des pressions entre les parties externe et interne de l'oreille est donc amplifié du même facteur ;
- ▷ l'articulation des trois osselets est telle que le déplacement de la base de l'étrier est légèrement supérieur à celui du marteau ce qui produit une amplification complémentaire (facteur 1,3) de la force appliquée à la fenêtre ovale.

Ensemble, ces deux effets compensent presque parfaitement (+28 dB) la perte correspondant à la différence de milieu (-29 dB).

Les muscles qui rigidifient la chaîne des osselets sont des éléments *actifs* qui modifient la fonction de transfert de ce système articulé déformable. Confronté à des niveaux sonores élevés le système peut, dans une certaine mesure, réduire la transmission du son à l'oreille interne (*réflexe stapédien*). Inversement on peut *tendre l'oreille* afin de maximiser le transfert et entendre des sons très ténus.

Les oreilles externe et moyenne ne traitent pas toutes les fréquences de la même manière et constituent ainsi, conjointement, un filtre qui modifie le signal.

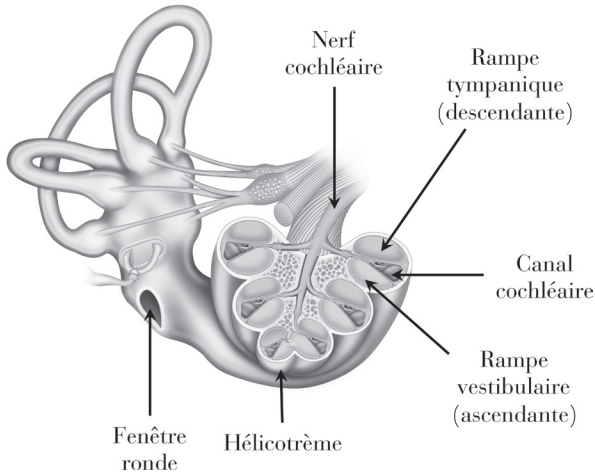
## 2.4 L'oreille interne

L'oreille interne [Figure 104 et 105] est constituée de deux éléments principaux : les canaux semi-circulaires, qui sont le principal organe de l'équilibre et que nous ne considérerons pas ici<sup>5</sup>, et le *limaçon* creusé dans l'os du rocher. L'oreille interne est remplie d'un liquide aqueux, la *périlymphe*.

La cavité du limaçon est divisée en deux rampes : la *rampe vesti-*

---

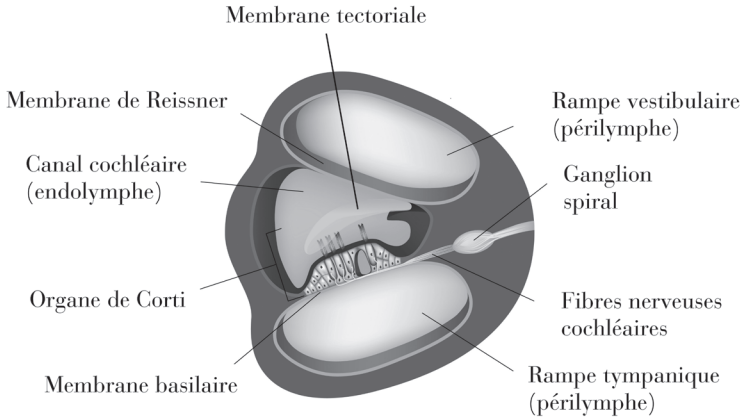
<sup>5</sup> Bien qu'ils jouent également un rôle dans l'audition, principalement pour les sons de très basse fréquence.



**Figure 105** — Schéma détaillé de l'oreille interne.

*bulaire* connectée à la fenêtre ovale et la *rampe tympanique* connectée à la fenêtre ronde. Les deux rampes communiquent à leur apex par une petite ouverture : l'*hélicotrème*. L'onde de pression engendrée dans l'oreille interne par le micro-mouvement de l'étrier agissant sur la fenêtre ovale voyage donc dans la rampe vestibulaire puis, passant par l'hélicotrème, dans la rampe tympanique avant de heurter la *fenêtre ronde*. La fenêtre ronde facilite les vibrations de la périlymphe sous l'action des oscillations de l'étrier ; sans cette terminaison flexible, le mouvement du fluide, qui est pratiquement incompressible, serait d'une amplitude bien moins grande.

Le *canal cochléaire* [Figure 106] est une cavité distincte délimitée par deux membranes : la membrane de *Reissner* la sépare de la rampe vestibulaire alors que la membrane *basilaire* la sépare de la rampe tympanique. Le canal cochléaire est rempli d'*endolymphe*, un liquide légèrement plus épais que la périlymphe et de constitution ionique différente : la périlymphe, comme le plasma, est riche en sodium et



**Figure 106** — Section de la cochlée.

pauvre en potassium alors que l'endolymphe, qui s'apparente aux liquides intracellulaires, est riche en potassium et pauvre en sodium.

L'*organe de Corti* est fixé à la membrane basilaire sur toute sa longueur ; c'est réellement l'organe de l'ouïe, car c'est lui qui convertit le signal mécanique (pression dans la lymphe) en un signal électro-chimique, qui sera porté au cerveau par le nerf auditif. L'organe de Corti comporte des cellules ciliées protégées par la *membrane tectoriale* qui se déplace sous l'effet de la pression transmise au travers de la membrane de Reissner.

La déformation d'une cellule ciliée sous l'effet combiné du mouvement des membranes basilaire et tectoriale induit des variations dans sa polarisation. Ceci affecte la quantité de neurotransmetteurs libérés par la cellule sur les neurones primaires situés à sa base (*transduction chimique*) et modifie en conséquence la fréquence de décharge du potentiel d'action de ce neurone dans les fibres du nerf vestibulo-cochléaire<sup>6</sup>. La fréquence de vibration des ondes est ainsi convertie

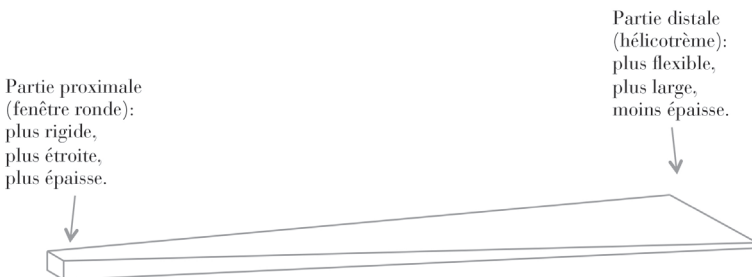
<sup>6</sup> Aussi appelé nerf *auditif* ou huitième nerf cranien.

en séquence de décharge de potentiel d'action (*transduction électrique*).

L'oreille interne est un système vibro-acoustique complexe constitué de trois cavités (rampes vestibulaire et tympanique et canal cochléaire) remplies de deux fluides différents (périlymphe et endolymphe) connectées entre elles par diverses membranes (Reissner, basilaire, tectoriale) aux propriétés élastiques différentes. Les membranes basilaires et de Reissner ont, par ailleurs, une forme trapézoïdale qui les rend rigides dans leurs parties *proximales* et plus flexibles dans leurs parties *distales* [Figure 107].

L'ensemble possède une propriété remarquable qui est à l'origine de notre capacité à distinguer avec précision le contenu spectral des sons : la *tonotopie*. En effet, on observe qu'un son de fréquence donnée engendre un déplacement maximal en une zone bien déterminée de la membrane basilaire. C'est donc un groupe de cellules donné qui, dans l'organe de Corti, réagit de manière maximale à un son de hauteur donnée. L'information *fréquence* est convertie par ce système en information *localisation du maximum d'activité électro-chimique* et transmise au cerveau par le nerf auditif.

La tonotopie se préserve jusqu'au cortex auditif car les neurones reliés aux cellules ciliées se projettent sur des zones distinctes de ce cortex.



**Figure 107** — Allure déroulée de la membrane basilaire.

## 2.5 Le cerveau auditif

La remontée du signal sonore des cellules de Corti vers le cortex auditif, partie du cerveau située dans la partie supérieure du lobe temporal, se produit suivant deux voies. La voie primaire, dédiée à la fonction auditive, et des voies non-primaires communes à tous les stimuli sensoriels.

La perception du son se déroule à différents niveaux de la chaîne qui le conduit des organes de Corti au cortex auditif. Ainsi, par exemple, le *réflexe stapédien*, qui réduit la sensibilité de l'oreille à des sons de trop grande intensité en rigidifiant la chaîne des osselets grâce à la contraction de deux muscles, est contrôlée très en amont du cortex auditif par le noyau cochléaire.

Les émotions générées par la musique activent des zones du vermis cérébelleux (partie médiane du cervelet) et des amygdales (noyaux du cortex temporal impliqué dans la reconnaissance et l'évaluation de la portée émotionnelle des stimuli sensoriels).

La perception du son musical fait également largement appel au centre de la mémoire (*hippocampe*); c'est en effet, en partie du moins, par rapprochement entre la musique qu'on écoute et celle que nous avons en mémoire que naît le plaisir musical, que celui-ci résulte de la répétition de motifs connus et de la satisfaction de nos attentes intuitives, ou qu'il résulte au contraire de la découverte de nouvelles formes et de l'effet de surprise engendré lorsque le compositeur se plaît à trahir nos attentes par une modulation ou un changement de timbre inattendu.

Il semble évident que notre capacité à percevoir et apprécier la musique fasse appel, tout au long de la vie, à la plasticité neuronale, c'est-à-dire à la capacité des réseaux de neurones de notre cortex à se réorganiser de manière continue: nous sommes le fruit de la musique que nous écoutons et nous n'écoutons, en un sens, jamais

deux fois le même morceau car notre cerveau est, à chaque écoute, légèrement différent.

### 3. SYNTHÈSE DU CHAPITRE

La note jouée remplit la pièce dans laquelle elle est jouée. Les réflexions multiples sur les parois lui permettent de durer et de se fondre avec les notes suivantes. Chaque salle est différente, chaque position dans la salle conduit à une expérience auditive différente.

L'onde de pression sonore qui entre dans nos oreilles franchit de nombreuses étapes (tympan, marteau, enclume, osselet, fenêtre ovale, rampe vestibulaire, hélicotreme, rampe tympanique, fenêtre ronde) avant que l'excitation qu'elle induit dans la membrane basilaire ne permette une transduction chimique puis électrique et, enfin une remontée vers le cortex auditif où elle se muera en perception par un mécanisme... que nous ne prendrons pas le risque de tenter d'élucider !

## Conclusions

J'ai voulu montrer l'origine arithmétique de notre gamme occidentale et mettre en évidence la cohérence de la théorie qui sous-tend tout notre patrimoine musical. J'ai, par ailleurs, tenté de faire comprendre ce qui donne son identité propre à chaque instrument et cherché à montrer le lien entre les deux questions. Le problème de la propagation du son de l'instrument à l'oreille puis de l'oreille au cerveau a été brièvement abordé.

Au moment de conclure, il me paraît important de souligner que je ne prétends, en aucune manière, réduire la musique à un jeu mathématique. L'arithmétique, mobilisée pour expliquer les règles du solfège, la physique, appelée à l'aide pour comprendre le contenu harmonique et les timbres des différents instruments, la physiologie, invoquée pour rendre compte de l'expérience musicale subjective, peuvent éclairer l'art musical, expliquer sa cohérence, révéler certains sous-jacents mais la science ne peut que fournir un cadre dans lequel l'art est libre de s'épanouir et qu'il doit transcender pour atteindre son but.

La dimension sensible de la musique, celle qui porte la véritable émotion, est irréductible aux nombres : la musique ne se réduit pas au solfège de même que la poésie ne se réduit pas à la métrique choisie pour rythmer ses vers.



Je finirai par une citation de Georges Bernard Shaw (1856-1950) dont l'ironie cache une grande profondeur :

« Le meilleur moyen de se familiariser avec un sujet, c'est de lui consacrer un livre. »

Écrire un livre est un long voyage solitaire où chaque réponse appelle de nouvelles questions; tout questionnement est inépuisable et là réside la beauté du monde.

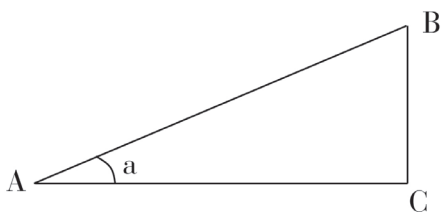


# Appendices et compléments

## 1. SINUSOÏDE

### 1.1 Sinus et triangle

Par définition, dans un triangle rectangle [Figure 108], le sinus d'un des angles non-droits  $a$  ( $B\hat{A}C$ ) est égal au rapport de la longueur du côté opposé  $|BC|$  à la longueur de l'hypothénuse  $|AB|$ . Si  $AB$  tourne autour de  $A$ , l'angle  $a$  varie régulièrement au cours du temps et ce rapport de longueur varie également ( $BC$  varie,  $AB$  reste inchangé). Sa variation est représentée par une courbe qu'on appelle *sinusoïde*. La période est le temps mis par l'hypothénuse pour réaliser un tour complet.

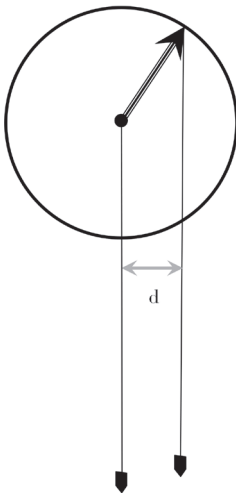


**Figure 108** —  
Triangle rectangle et  
sinus.

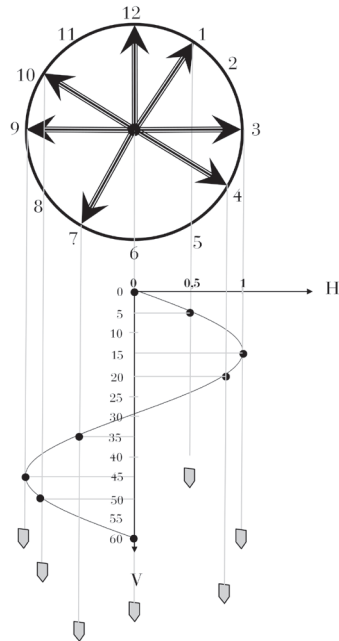
### 1.2 Le modèle de l'horloge

Il est difficile, voire impossible, d'étudier mathématiquement des phénomènes périodiques sans introduire la notion de sinusoïde. Mais, on peut introduire cette courbe de manière très intuitive.

Considérons [Figure 109] une horloge dont la grande aiguille aurait une longueur d'un mètre. À l'extrémité de l'aiguille pend un long fil à plomb. Un autre fil à plomb est fixé au centre de l'horloge. Ce que nous voulons connaître, c'est la variation de la distance  $d$  qui sépare les deux fils à plomb au cours des soixante minutes que dure une rotation de l'aiguille. On construit aisément cette courbe point par point [Figure 110] : à chaque position de l'aiguille (1 à 12) correspond une distance  $d$  que l'on porte sur un axe horizontal  $H$  en regard d'une abscisse qui mesure sur un axe vertical  $V$  le temps correspondant



**Figure 109** — Modèle de l'horloge avec ses deux fils à plomb.

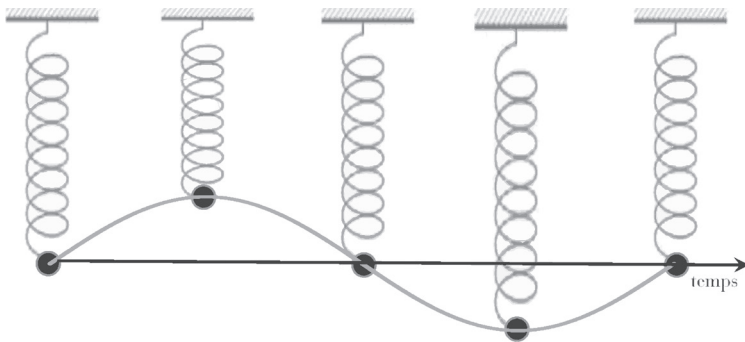


**Figure 110** — Modèle de l'horloge : construction de la sinusoïde.

(0 à 60 minutes). La courbe qui relie ces points est, *par définition*, une sinusoïde. Si l'aiguille continue sa rotation pendant plusieurs heures, la courbe se prolonge à l'identique et, en fait, d'un point de vue mathématique, une sinusoïde n'a ni début ni fin, répétant indéfiniment la même oscillation avec les mêmes *amplitude*  $A$  et *période*  $T$  [Figure 5]. Dans le modèle de l'horloge, l'amplitude  $A$  vaut 1 (nous avons supposé que l'aiguille a une longueur d'un mètre) et la période est d'une heure (3.600 secondes). Si nous avons choisi l'aiguille des heures, l'amplitude aurait été moindre (égale à la longueur de l'aiguille des heures) et la période de 12 heures (43.200 secondes).

### 1.3 Sinusoïde et oscillateur

La fonction sinus joue un rôle central en musique parce qu'elle est naturellement associée à la notion d'oscillation et de vibration. La **Figure 111** montre par exemple que l'amplitude de la vibration verticale d'une masse suspendue à un ressort est décrite par une sinusoïde.



**Figure 111** — Oscillation d'une masse suspendue à un ressort. Le déplacement vertical de la masse par rapport à sa position d'équilibre décrit une sinusoïde.

## 2. ANALYSE DE FOURIER

Un signal  $p(t)$  est périodique s'il existe une constante  $T$  telle que :

$$\forall t : p(t + T) = p(t)$$

Un tel signal<sup>1</sup> peut être représenté par sa série de Fourier qu'on écrit sous la forme :

$$p(t) = \sum_{n=1,\infty} A_n \cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) + B_n \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right)$$

Pour trouver la valeur du coefficient  $A_m$ , il suffit de multiplier les deux membres de l'expression ci-dessus par :

$$\cos\left(2m\pi \frac{t}{T}\right)$$

puis d'intégrer sur une période  $T$  :

$$\begin{aligned} \int_0^T p(t) \cos\left(2m\pi \frac{t}{T}\right) dt &= \sum_{n=1,\infty} A_n \int_0^T \cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) \cos\left(2m\pi \frac{t}{T}\right) dt \\ &+ \sum_{n=1,\infty} B_n \int_0^T \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) \cos\left(2m\pi \frac{t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

Mais toutes les intégrales du terme de droite sont nulles sauf le produit de cosinus lorsque  $m=n$  :

$$\int_0^T \cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) \cos\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) dt = \frac{T}{2}$$

On en déduit :

---

<sup>1</sup> On le suppose de moyenne nulle ici.

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos \left( 2n\pi \frac{t}{T} \right) dt$$

Par un processus similaire, on trouve :

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin \left( 2n\pi \frac{t}{T} \right) dt$$

Si on introduit les constantes  $C_n$  et  $\phi_n$  :

$$\begin{aligned} C_n &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \tan \phi_n &= \frac{A_n}{B_n} \end{aligned}$$

on peut réécrire  $A_n$  et  $B_n$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{n=0,\infty} C_n \left( \sin \phi_n \cos \left( 2n\pi \frac{t}{T} \right) + \cos \phi_n \sin \left( 2n\pi \frac{t}{T} \right) \right) \\ &= \sum_{n=0,\infty} C_n \sin \left( 2n\pi \frac{t}{T} + \phi_n \right) \end{aligned}$$

Ce qui montre que toute fonction de période  $T$  peut être représentée par la somme de sinusoïdes, éventuellement déphasées l'une par rapport à l'autre et dont les périodes sont des sous-multiples de  $T$ . La généralisation des séries de Fourier au cas d'un signal non-périodique permet d'introduire la transformée de Fourier  $P(f)$  du signal  $p(t)$  :

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$P(f)$  est un nombre complexe et c'est son amplitude qui est représentée à la Figure 89.

### 3. L'ÉCHELLE DES DÉCIBELS

Au dix-neuvième siècle, deux physiologistes allemands, Weber<sup>2</sup> et Fechner<sup>3</sup>, s'intéressent à la psychologie de la perception et font les observations suivantes :

- ▷ Weber s'intéresse au plus petit niveau  $L_2$  qu'un individu est capable de discerner d'un niveau de référence  $L_1$ . Il observe que la plus petite variation perceptible  $L_2 - L_1$  n'est pas fixe mais au contraire proportionnelle à  $L_1$ . Un tel comportement est courant dès qu'il s'agit de perception subjective. Un revenu additionnel d'un million d'euros représente par exemple un changement radical pour un individu normal mais ne change pas la donne pour une multinationale dont le chiffre d'affaires se chiffre en milliards.
- ▷ Fechner, pour sa part, fait l'hypothèse que l'individu estime inconsciemment le niveau perçu en sommant les plus petites différences perceptibles relatives soit en intégrant la grandeur  $\Delta L/L$ .

Ces observations conduisent à prédire que le niveau sonore *perçu* est proportionnel au logarithme<sup>4</sup> de l'intensité<sup>5</sup>, c'est-à-dire que

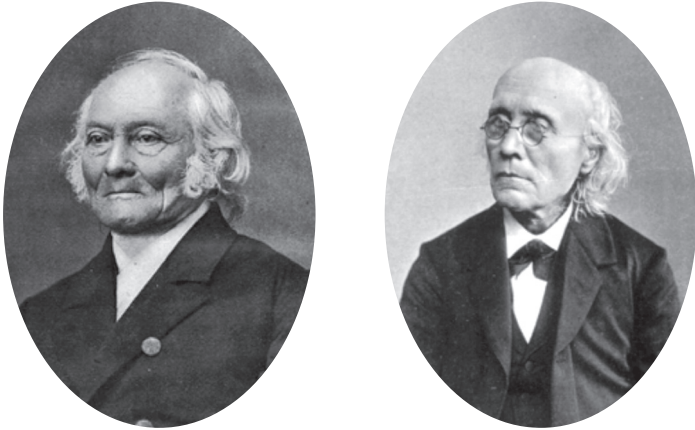
<sup>2</sup> **Ernst Heinrich Weber** (1795-1878), physiologiste et psychologue allemand, père de la psychologie expérimentale, fut professeur à l'université de Leipzig de 1821 à 1871.

<sup>3</sup> **Gustav Fechner** (1801-1887), philosophe et physicien allemand.

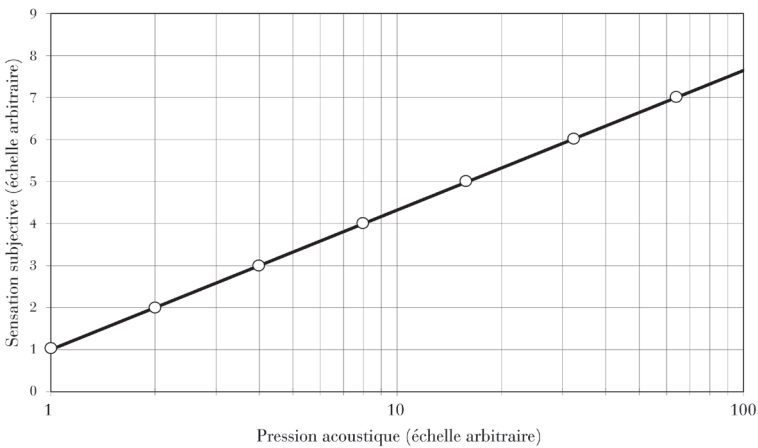
<sup>4</sup> Pour un mathématicien il est en effet évident que, par passage à la limite :

$$\sum \frac{\Delta I}{I} \rightarrow \int \frac{dI}{I} = \ln I$$

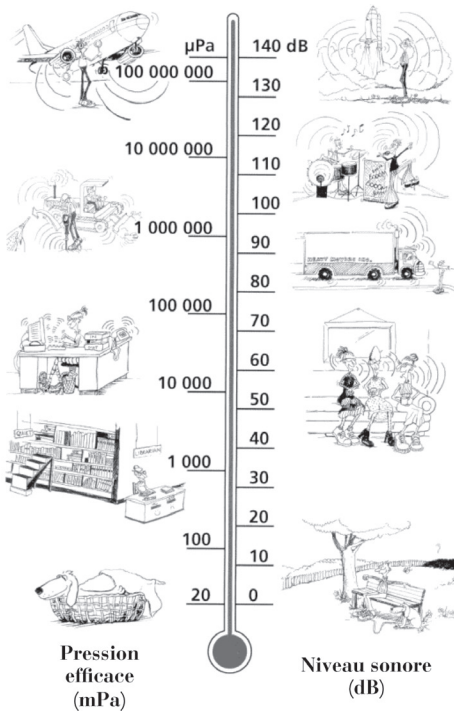
<sup>5</sup> L'intensité sonore est une mesure de la puissance portée par un signal sonore et est proportionnelle au carré de la fluctuation de pression acoustique associée au signal.



**Figure 112** — Ernst Heinrich Weber et Gustav Fechner.



**Figure 113** — Représentation schématique de la loi de Weber-Fechner: si les amplitudes de fluctuation de pression associées à différents sons forment les termes d'une suite géométrique ( $p_0, p_1=p_0 \cdot \delta, \dots, p_n=p_0 \cdot \delta^n$ ), les niveaux sonores perçus forment les termes d'une suite arithmétique ( $L_0, L_1=L_0 + \Delta, \dots, L_n=L_0 + n\Delta$ ).



**Figure 114** — Relation entre pression acoustique et niveau sonore et exemples de niveaux caractéristiques.

Avec l'aimable autorisation de la société Bruel & Kjaer.

si les intensités de différents sons forment une suite géométrique, alors les niveaux sonores perçus forment une suite arithmétique [Figure 113]. Le niveau sonore  $L$  (exprimé en décibels [dB]) associé à une fluctuation de pression acoustique d'amplitude  $p$  (exprimée en Pascals [Pa]) est donné par la formule :

$$L = 20 \log \frac{p}{\sqrt{2} \times p_{ref}}$$

où  $p_{ref}$  est une fluctuation de pression acoustique de référence correspondant approximativement au seuil d'audition ( $p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa).



#### 4. INTERVALLE ET QUINTE

Il est parfois pratique de désigner les intervalles par le nombre de quintes qui permet de les parcourir. Un intervalle de sixte (Do-La) est ainsi, dans ce système, désigné par le nombre 3 :

$$Do \xrightarrow{1} Sol \xrightarrow{2} Ré \xrightarrow{3} La$$

La fréquence de l'intervalle associé est alors simplement égale à :

$$f_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 2^m$$

où  $n$  est le nombre qui désigne l'intervalle et où  $m$  est choisi tel que  $1 < f_n < 2$  pour les intervalles ascendants et  $1/2 < f_n < 1$  pour les intervalles descendants. Le contenu de l'intervalle est de :

- ▷  $(4n + 7m)$  demi-tons diatoniques ;
- ▷  $(3n + 5m)$  demi-tons chromatiques.

En parcourant les nombres entiers, on peut construire le tableau à la page suivante :

DES CHIFFRES ET DES NOTES

$n$ quintes	$m$ octaves	Nom	Exemple	$4n + 7m$ diatoniques	$3n + 5m$ chromatiques	Contenu
-11	7	$6m^-$	Mi-Do <sup>b</sup>	5	2	2T, 3d
-10	6	$3m^-$	Si-Ré <sup>b</sup>	2	0	2d
-9	6	$7m^-$	Mi-Ré <sup>b</sup>	6	3	3T, 3d
-8	5	$4^-$	Mi-La <sup>b</sup>	3	1	1T, 2d
-7	5	$8^-$	Do-Do <sup>b</sup>	7	4	4T, 3d
-6	4	$5m$	Si-Fa	4	2	2T, 2d
-5	3	$2m$	Mi-Fa	1	0	1d
-4	3	$6m$	Mi-Do	5	3	3T, 2d
-3	2	$3m$	Si-Ré	2	1	1T, 1d
-2	2	$7m$	Ré-Do	6	4	4T, 2d
-1	1	4	Do-Fa	3	2	2T, 1d
0	0	Unison	Do-Do	0	0	-
1	0	5	Do-Sol	4	3	3T, 1d
2	-1	$2M$	Do-Ré	1	1	1T
3	-1	$6M$	Do-La	5	4	4T, 1d
4	-2	$3M$	Do-Mi	2	2	2T
5	-2	$7M$	Do-Si	6	5	5T, 1d
6	-3	$4^+$	Fa-Si	3	3	3T
7	-4	-	Do-Do <sup>#</sup>	0	1	1c
8	-4	$5^+$	Do-Sol <sup>#</sup>	4	4	4T
9	-5	$2^+$	Do-Ré <sup>#</sup>	1	2	1T 1c
10	-5	$6^+$	Do-La <sup>#</sup>	5	5	5T
11	-6	$3^+$	Do-Mi <sup>#</sup>	2	3	2T, 1c

**Figure 115** — Numérotation des intervalles.

# Table des matières

<b>PRÉFACE</b>	9
<b>CHAPITRE 1 / QU'EST-CE QU'UN SON ?</b>	15
1. Signal sonore	17
2. Sinusoïde et signal monochromatique	21
3. Synthèse sonore additive	23
4. Spectre	28
5. Synthèse du chapitre	31
<b>CHAPITRE 2 / LE B-A-BA DU SOLFÈGE</b>	33
<b>CHAPITRE 3 / LA GAMME DE PYTHAGORE</b>	39
1. Intervalles naturels	40
1.1 Octave (2 :1)	41
1.2 Quinte (3 :2)	42
1.3 Quarte (4 :3) et tierce juste (5 :4)	42
2. Les expériences de Pythagore et Philolaos	43
3. Séquences et gammes	47
4. Fa, Sol, La, Si, Do, Ré, Mi, Fa	49
5. Dièses et gamme chromatique ascendante	51
6. Bémols et gamme chromatique descendante	52

7. Symétries de la gamme	55
8. Intervalles et fréquences	56
9. Fréquences réelles et fréquences réduites	57
10. Enharmonie, coma et feintes brisées	57
11. La gamme pentatonique	59
12. Notes mathématiques	61
12.1 <i>Exposants et notation exponentielle</i>	61
12.2 <i>Logarithmes</i>	63
13. Synthèse du chapitre	65
<b>CHAPITRE 4 / MODES, TRANSPOSITIONS, ARMURES</b>	67
1. Modes musicaux	67
2. Transpositions	72
3. Armures à dièses	73
4. Armures à bémols	78
5. Synthèse du chapitre	80
<b>CHAPITRE 5 / PYTHAGORE EN DIFFICULTÉ</b>	83
1. Découpe de l'octave en intervalles égaux	84
2. Acyclisme irréductible de la gamme de Pythagore	85
3. Transposition et enharmonie	85
4. La quinte du loup	86
5. Quand n quintes recouvrent presque m octaves	87
6. Découpe de l'octave en deux intervalles inégaux	91
7. Synthèse du chapitre	94

<b>CHAPITRE 6 / AU-DELÀ DE PYTHAGORE</b>	<b>95</b>
1. Harmoniques et degrés de la gamme	95
2. La gamme de Zarlino	98
3. Tempéraments mésotoniques	103
4. Le tempérament égal	105
4.1 Harmoniques et tempérament égal	106
4.2 Gammes tempérées généralisées	107
5. Gamme à 53 comas	108
6. Comparaison des trois tempéraments	108
7. Synthèse du chapitre	110
 <b>CHAPITRE 7 / ACCORDS, PÉRIODE, HARMONIE</b>	 <b>113</b>
1. Période d'une note unique	113
2. Accord de deux sons	115
2.1 Période associée à deux notes jouées conjointement	115
2.2 Période et intervalles	116
3. Fréquences fantômes...	120
3.1 Battements	120
3.2 Sons résultants	124
4. Accords de trois sons	126
4.1 Renversements	129
4.2 Accords enrichis	130
4.3 Accords du tempérament égal	130
5. Notes mathématiques	131

5.1 Nombres rationnels et irrationnels	131
5.2 Non-linéarité	131
6. Synthèse du chapitre	133
<b>CHAPITRE 8 / PHYSIQUE DES INSTRUMENTS DE MUSIQUE</b>	<b>135</b>
1. Propagation du son dans l'air	137
2. Longueur d'onde	141
3. Réflexions	142
4. Résonances	145
4.1 Oscillations d'une balançoire	145
4.2 Résonances acoustiques d'un tube	146
4.3 Résonance et longueur d'onde	149
4.4 Conclusions préliminaires sur les résonances	150
5. Typologie des instruments à vents	152
5.1 Système excitateur : anche ou biseau	152
5.2 Harmoniques paires et impaires	153
5.3 Perce, pavillon, couplage et partiels	159
6. Réglage de hauteur	161
7. Instruments à cordes – Approche intuitive	165
7.1 Résonance vibratoire d'une corde	165
7.2 Conditions initiales et modes d'excitation	169
7.3 Sillet, chevalet, corps, cavité et autres subtilités	173
8. Instruments à cordes — Approche mathématique	174
8.1 Approche contemporaine	175

## TABLE DES MATIÈRES

8.2 <i>Approche historique</i>	178
9. Percussions	182
10. Synthèse du chapitre	183
<b>CHAPITRE 9 / ENVELOPPE ET TIMBRE</b>	185
1. Son et silence	186
2. Fenêtre et enveloppe sonore	192
3. Analyse temps-fréquence	195
3.1 <i>Spectre dynamique</i>	195
3.2 <i>Sonagrammes ou spectrogrammes</i>	196
3.3 <i>De la note au morceau</i>	199
4. Retour sur harmoniques et degrés de la gamme	202
5. Synthèse du chapitre	203
<b>CHAPITRE 10 / DE LA NOTE AU CERVEAU</b>	205
1. Acoustique des salles	205
1.1 <i>Temps de réverbération</i>	205
1.2 <i>Distribution du son dans une salle</i>	208
2. Physiologie de l'audition	211
2.1 <i>Les trois parties de l'oreille humaine</i>	211
2.2 <i>L'oreille externe</i>	213
2.3 <i>L'oreille moyenne</i>	213
2.4 <i>L'oreille interne</i>	215
3. Le cerveau auditif	219
4. Synthèse du chapitre	220

<b>CONCLUSIONS</b>	221
<b>APPENDICES ET COMPLÉMENTS</b>	223
1. Sinusoïde	223
1.1 <i>Sinus et triangle</i>	223
1.2 <i>Le modèle de l'horloge</i>	223
1.3 <i>Sinusoïde et oscillateur</i>	225
2. Analyse de Fourier	226
3. L'échelle des décibels	228
4. Intervalle et quinte	229







## L'AUTEUR

Jean-Louis Migeot enseigne à l'Université libre de Bruxelles et au Conservatoire royal de musique de Liège. La société Free Field Technologies qu'il a créée est un des leaders mondiaux dans le domaine de la modélisation des phénomènes acoustiques.

Autre publication :

MIGEOT J.-L., COYETTE J.-P., LIELENS G., *Phénomènes fondamentaux de l'acoustique linéaire*, Cachan, Lavoisier, 2015.

