

Jean-Louis **Migeot**

Jean-Pierre **Coyette**

Grégory **Lielens**

ACOUSTIQUE

Concepts, théories et modèles de l'acoustique linéaire

*À Coline et Gaspard.
À Jean Rénier, Jean Kestens et Jacques Reisse.
J-L.M.*

*À Brigitte, Olivier et Julie.
J-P.C.*

*À Jacques, Odette et Yannick.
G.L.*

*À tout ceux qui sont avec nous sur le pont de Free Field Technologies
ou ont, à un moment donné, fait partie de l'équipage :*

*Raphaël, Rami, Chris, Thibaut, Nagisa, Clément, Zbigniew, Benoît, Bernard, Isabelle, Mickaël, Fabien, Yoshiyuki,
Thomas, Danisa, Alexis, Gai, Yves, Joël, Thaïssa, Mehdi, Erwan, Prateek, Joe, Alain, Claire, Aurélien, Julie, Ken,
Jonathan, Vincent, Lou, Benjamin, Laurent, Barthélémy, Fayçal, Olivier, Romain, Xavier, Marie-Laure, Valérie,
Boris, Dave, Alexandra, Marie, Nicolas, Eberhard, Elias, Steve, Mathieu, Masatake, Morgan, Toon, Shriram, Bastien,
Julien, Jean-David, Paul, Pierre-Charles, César, François, Eveline, Debbie, Dimitri, Stéphane, Christophe, Françoise,
Yuru Bai, Nancy, Eloi, Karl, Cécile, Karim, Diego.*

J-L.M., J-P.C. et G.L.

Ou la matière à enseigner est claire et dans ce cas elle n'a pas besoin d'être enseignée, ou elle est obscure et dans ce cas elle ne peut pas être enseignée.

Sextus Empiricus *in* Hypotyposes pyrrhoniennes.

cité par Jean Brun *in* Socrate (PUF, 1960).

Muad'Dib apprit aussi rapidement parce que le premier enseignement qu'il eût reçu était de savoir apprendre. Et la leçon première de cet enseignement était la certitude qu'il pouvait apprendre.

Frank Herbert *in* Dune (Chilton Books, 1965).

Le pouvoir de l'enseignement est rarement d'une grande efficacité, si ce n'est face à ces heureuses dispositions où il est pratiquement superflu.

Edward Gibbon

in The Decline and Fall of The Roman Empire (1788).

cité par Richard Feynman *in* Lectures on Physics (Basic Books, 1963).

C'est un homme honnête et scrupuleux dont la science m'inspire confiance dans la mesure où lui-même s'en méfie.

Michel Tournier (1924-) *in* Gaspard, Melchior & Balthazar (Gallimard, 1980).

TABLE DES MATIÈRES

Table of Contents	VII
1 Introduction	1
2 Définition et cadre de l'acoustique	3
2.1 Définitions	4
2.2 Branches de l'acoustique	6
2.3 Étendue spectrale des sons	12
2.4 Actualité de l'acoustique	13
I Governing equations and fundamental concepts	17
3 Équations de la mécanique des milieux continus	19
3.1 Équation de continuité	20
3.2 Rappels sur la notation indicielle	23
3.3 Équation de la quantité de mouvement	26
3.4 Équation d'état	32
3.5 Équation de conservation de l'énergie	32
4 Équation d'onde	33
4.1 Équation d'onde	34
4.2 Linéarité et non-linéarité en acoustique	40
4.3 Solution générale à une dimension	42
4.4 Mécanique de la propagation	44
4.5 Propagations dispersive et non dispersive	47
4.5.1 Équation d'onde générale	47
4.5.2 Propagation non dispersive	49
4.5.3 Propagation dispersive	50
4.5.4 Paquet d'onde et vitesse de groupe	50
4.6 Vitesse du son	51
4.6.1 Gaz parfaits	52
4.6.2 Liquides	53
4.6.3 Solides	56
4.7 Synthèse du chapitre	56

5	Analyse de Fourier	59
5.1	Combinaison de signaux simples	61
5.1.1	Signaux de même fréquence	61
5.1.2	Signaux de fréquences différentes	63
5.2	Séries de Fourier	73
5.2.1	Calcul des coefficients	75
5.2.2	Onde carrée et phénomène de Gibbs	76
5.2.3	Spectres	78
5.2.4	Note sur les amplitudes complexes	83
5.3	Transformée de Fourier	83
5.3.1	Caractère hermitien du spectre	84
5.3.2	Spectre à <i>droite</i>	85
5.3.3	Glissement temporel	87
5.3.4	Distortion de l'échelle temporelle	89
5.3.5	Dérivées	89
5.4	Produit de convolution	91
5.4.1	Fenêtrage d'un signal	92
5.4.2	Largeurs du signal et du spectre	93
5.4.3	Filtrage d'un signal	95
5.5	Synthèse du chapitre	95
6	Équations de l'acoustique en régime harmonique	97
6.1	Équation de Helmholtz	98
6.2	Relation pression-vitesse	99
6.3	Impédance acoustique	99
6.4	Intensité sonore	100
6.4.1	Signal monochromatique	101
6.4.2	Signal périodique général	103
6.4.3	Signal quelconque	104
6.5	Ondes planes	106
6.5.1	Solution générale à une dimension	106
6.5.2	Impédance caractéristique	107
6.5.3	Intensité	107
6.5.4	Atténuation	108
6.5.5	Onde plane d'incidence quelconque	108
6.6	Ondes sphériques	110
6.6.1	Monopôles	110

6.6.2	Débit volumique d'une source	114
7	Niveaux sonores	115
7.1	Échelle des décibels	116
7.1.1	Définition	116
7.1.2	Lois de Weber et de Fechner	120
7.2	Addition de niveaux	122
7.2.1	Principe général	122
7.2.2	Phénomène de masquage	124
7.3	Octaves et tiers d'octave	125
7.3.1	Niveau par bande	126
7.3.2	Bruits blanc, rose et brun	127
7.4	Niveaux corrigés et agrégés	131
7.4.1	Courbes de Fletcher et Munson	132
7.4.2	Filtres	132
7.4.3	Niveaux équivalents et niveaux statistiques	135
7.4.4	L_{den}	137
7.4.5	EPNdB	138
7.4.6	<i>Noise Rating (NR)</i>	139
II	Fundamental phenomena of linear acoustics	141
8	Réflexion et absorption	143
8.1	Réflexion sous incidence normale	144
8.1.1	Surface à vitesse nulle	144
8.1.2	Surface à pression nulle	148
8.1.3	Surface absorbante	149
8.2	Réflexion sous incidence oblique	153
8.2.1	Surface rigide - Loi de Descartes	153
8.2.2	Surface absorbante	154
8.3	Réflexion d'une source monopolaire	158
8.3.1	Source image	158
8.3.2	Réfectogramme	161
8.3.3	Méthode des tirs de rayons	166
8.4	Notes sur la notion d'impédance	174
8.4.1	Signe de l'impédance	174
8.4.2	Dépendance fréquentielle de l'impédance	176

8.4.3	Paroi vibrante et absorbante	177
8.4.4	Réaction locale et non locale	178
8.4.5	Mesure d'impédance au tube de Kundt	180
8.5	Temps de réverbération	183
8.5.1	Établissement du son	185
8.5.2	Extinction du son	186
8.5.3	Loi de Sabine	186
8.5.4	Chambres anéchoïques et réverbérantes	190
8.5.5	Formule d'Eyring et de Millington	191
8.5.6	Mesure du coefficient d'absorption	193
9	Résonances	197
9.1	Résonances d'un tube fermé	198
9.1.1	Source de vitesse	198
9.1.2	Source de pression	199
9.1.3	Comparaison des deux cas	200
9.2	Analyse modale	203
9.2.1	Modes et fréquences propres	203
9.2.2	Superposition modale	205
9.3	Cavité parallélépipédique	209
9.4	Résonances d'une cavité quelconque	211
10	Propagation guidée	213
10.1	Fréquence de coupure	214
10.2	Matrices de transfert	216
10.2.1	Conduit de section constante	216
10.2.2	Assemblage de trois tubes	218
10.2.3	Connexion en T	220
10.2.4	Résonateur quart d'onde	223
10.2.5	Résonateur de Helmholtz	224
10.2.6	Autres formes des matrices de transfert	226
10.2.7	Mesure d'une matrice de transfert	227
10.3	<i>Transmission Loss</i> (TL)	229
10.3.1	TL d'une chambre d'expansion	230
10.3.2	TL d'un tube muni d'un résonateur	232
10.4	<i>Insertion Loss</i> (IL)	234
10.4.1	Impédance de source	234

10.4.2	Adaptation d'impédance	234
10.4.3	Source généralisée débitant dans un silencieux	235
10.4.4	<i>Insertion Loss</i> (IL)	236
10.4.5	Comparaison de l' <i>IL</i> et du <i>TL</i>	236
10.5	Fréquences de coupure de conduits circulaires	238
10.5.1	Équation de Bessel	238
10.5.2	Fonctions de Bessel	239
10.5.3	Fréquence de coupure	240
10.6	Rôle des modes évanescents	242
10.7	Silencieux réactifs et dissipatifs	250
11	Rayonnement	251
11.1	Dipôles et quadrupôles	252
11.1.1	Dipôles	253
11.1.2	Quadrupôle aligné	257
11.1.3	Quadrupôle croisé	258
11.2	Analyse multipolaire	261
11.3	Équation intégrale de Helmholtz	271
11.3.1	Domaine borné	271
11.3.2	Domaine non borné	276
11.3.3	Forme indirecte de l'équation intégrale	277
11.3.4	Rayonnement d'une plaque plane	279
11.4	Puissance rayonnée	283
11.5	Impédance de rayonnement	284
12	Diffraction	287
13	Réfraction	289
14	Propagation avec dissipation	295
14.1	Propagation en milieu dissipatif	296
14.2	Fluide équivalent à un poreux	298
14.2.1	Modèle de Delany et Bazley	298
14.2.2	Modèle de Miki	299
14.3	Théorie de Biot	300
14.3.1	Porosité (Ω)	302
14.3.2	Résistivité (R)	303
14.3.3	Tortuosité (α_∞)	305

14.3.4	Équations d'équilibre	307
14.3.5	Relations constitutives	311
14.3.6	Modèle $u-p$ pour les poro-élastiques	314
14.3.7	Ondes en milieu poro-élastique	315
14.3.8	Micro-modèles	322
14.4	Mise en œuvre des matériaux poro-élastiques	323
14.4.1	Effet limité des poreux ouverts	323
14.4.2	Sandwichs poro-élastiques	324
15	Propagation convectée	329
15.1	Propagation du son en écoulement constant	330
15.1.1	Équation d'onde convectée	330
15.1.2	Résonance acoustique d'un pneu	332
15.1.3	Transformation de Prandtl-Glauert	334
15.1.4	Source monopolaire en écoulement constant	336
15.1.5	Effet Doppler	337
15.2	Propagation du son en écoulement potentiel	342
15.2.1	Introduction du potentiel de vitesse	342
15.2.2	Équation de continuité	343
15.2.3	Équation d'Euler	343
15.2.4	Équation potentielle non linéaire	345
15.2.5	Décomposition acoustique	346
15.3	Propagation du son en écoulement quelconque	347
15.3.1	Équation de continuité	347
15.3.2	Équation de la quantité de mouvement	348
15.3.3	Entropie et gaz parfait	349
15.3.4	Équation de l'énergie	350
15.3.5	Équations d'Euler linéarisées	352
15.4	Application à un moteur d'avion	353
16	Propagation atmosphérique	357
16.1	Introduction	358
16.2	Mécanismes mis en jeu	359
16.2.1	Atténuation géométrique	360
16.2.2	Absorption atmosphérique	360
16.2.3	Réfraction atmosphérique	361
16.2.4	Turbulence	362

16.3	Formulation axisymétrique de l'équation de Helmholtz	364
16.4	Dérivation de l'équation parabolique	365
16.4.1	Approximation du champ lointain	365
16.4.2	Ondes sortantes	366
16.4.3	Approximation <i>angle étroit</i>	367
16.5	Différences finies	368
16.5.1	Forme discrète	368
16.5.2	Conditions frontières discrètes	369
16.5.3	Système d'équations algébriques	372
16.6	Évaluation de Ψ en $r = 0$	373
16.7	Performances numériques	376
16.7.1	Formulation du problème	376
16.7.2	Examen des résultats numériques	378
16.8	Conclusion	380
17	Interaction fluide-structure	385
17.1	Masse-ressort et colonne de fluide	386
17.1.1	Cas général	386
17.1.2	Colonne de longueur infinie	388
17.1.3	Colonne de longueur finie	389
17.2	Interaction fluide-structure	395
17.2.1	Origine du couplage	395
17.2.2	Couplage faible et couplage fort	397
17.2.3	Approches modales	398
17.2.4	Impédance de rayonnement	399
17.2.5	Analyse d'un système à couplages multiples	399
17.3	Cadre général d'analyse vibro-acoustiques	404
18	Transmission et isolation	407
18.1	Paroi rigide sur supports élastiques	409
18.2	Paroi flexible infinie	414
18.2.1	Calcul de l'atténuation	414
18.2.2	Phénomène de coïncidence	416
18.2.3	Atténuation sous champ diffus	420
18.3	Parois doubles	423
18.3.1	Résonance masse-air-masse	423
18.3.2	TL d'une paroi double	423

18.4 TL de plaques finies	427
18.5 Mesure du TL en chambres associées	429
18.5.1 Principe de la mesure	429
18.5.2 TL en tiers d'octave de panneaux réels	430
Table des figures	435
Index	443
List of symbols	447

1

INTRODUCTION

Je ne sais pas, mais je devine que je vais avoir su.

Vladimir Jankélévitch *in* Henri Bergson (1930).

Ce livre introduit les concepts fondamentaux de l'acoustique et de la vibro-acoustique. Une **première partie** pose les équations de l'acoustique linéaire. Partant des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus Chapter 3, différentes hypothèses sont faites conduisant à une équation d'onde pour la fluctuation de pression acoustique Chapter 4. Un rappel de quelques résultats de l'analyse de Fourier Chapter 5 permet d'introduire l'équation de Helmholtz Chapter 6 et les solutions canoniques associées (ondes planes, ondes sphériques, dipôles, quadripôles) puis la notion de niveau sonore Chapter 7.

La **seconde partie** présente les mécanismes physiques fondamentaux de l'acoustique linéaire en abordant d'abord les phénomènes de réflexion et d'absorption Chapter 8 puis l'étude des résonances Chapter 9. La propagation guidée et son application aux systèmes d'échappement ou d'admission et, plus généralement, à tout système de conduits est présentée au chapitre 10. Le chapitre 11 porte sur les phénomènes de rayonnement. Les chapitres 12 et 13 introduisent très brièvement les phénomènes de diffraction, présentés sous la forme d'un problème de rayonnement à conditions aux limites modifiées, et la théorie élémentaire de la réfraction. La propagation du son en milieu dissipatif et dans un fluide en mouvement sont présentées respectivement aux chapitres 14 et 15. La problématique de la propagation atmosphérique est couverte au chapitre 16. Le concept de couplage fluide-structure est enfin introduit Chapter 17 avant d'être mis en œuvre dans le chapitre 18 qui traite de la transmission du son au travers de parois élastiques.

La démarche suivie est indiscutablement très mathématique ; c'est bien sûr une conséquence de la formation et de l'expérience professionnelle des auteurs qui ont essentiellement travaillé dans le domaine de la modélisation. C'est cependant également lié à l'idée qu'un ingénieur doit pouvoir quantifier les phénomènes qu'il étudie ce qui est impossible si l'on ne dispose pas de modèles, simples ou complexes. Les nombreuses équations sont toujours là pour révéler et quantifier les phénomènes acoustiques, pas pour les masquer. Enfin, même si les calculs sont parfois longs, les mathématiques mises en jeu devraient être accessibles sans difficultés particulières aux ingénieurs diplômés comme aux étudiants.

2

DÉFINITION ET CADRE DE L'ACOUSTIQUE

Bien, commençons cette histoire ; lorsque nous arriverons à la fin nous en saurons plus que nous n'en savons maintenant. Hans Christian Andersen (1805-1875) *in* La reine des neiges (1845)

Contents

2.1	Définitions	4
2.2	Branches de l'acoustique	6
2.3	Étendue spectrale des sons	12
2.4	Actualité de l'acoustique	13

2.1 Définitions

L'acoustique est la science des sons et des bruits :

- *un son est une sensation auditive causée par les perturbations d'un milieu matériel élastique fluide ou solide*¹ ;
- *un bruit est un phénomène acoustique produisant une sensation auditive considérée comme désagréable ou gênante. Cette sensation est liée à l'intensité sonore mais aussi à des facteurs culturels et psychologiques*².

D'un point de vue physique, un son est une variation temporelle *rapide* de la pression autour d'une valeur de référence (pression atmosphérique dans l'air, pression hydrostatique dans l'eau) ; l'amplitude de cette variation est en outre *petite* par rapport à cette valeur de référence :

$$p_{tot}(t) = p_{atm} + p_{ac}(t) \quad (2.1)$$

avec :

$$p_{atm} \gg p_{ac}(t) \quad (2.2)$$

et :

$$p_{atm} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p_{tot}(t) dt \quad (2.3)$$

où T est supposé grand par rapport à l'échelle temporelle des fluctuations de $p_{ac}(t)$. Dans la suite, afin d'alléger la notation, on écrira souvent $p(t)$ pour $p_{ac}(t)$; il s'agira toutefois toujours de la partie acoustique de la pression, déduction faite du niveau local de la pression de référence. Comme les pressions totale et de référence, la fluctuation de pression acoustique se mesure en Pascal (Pa)³.

L'acoustique est devenue plus généralement, au fil du temps, la science qui étudie la propagation d'ondes de pression dans un milieu continu élastique quelconque : ondes P en géodynamique ou acoustique sous-marine par exemple. L'acoustique s'intéresse en fait à quatre problèmes distincts Figure 2.1 :

1. la génération du son ;

1. Petit Robert.

2. Norme NFS 3001.

3. Pour rappel : 1 atm = 101.325 Pa.

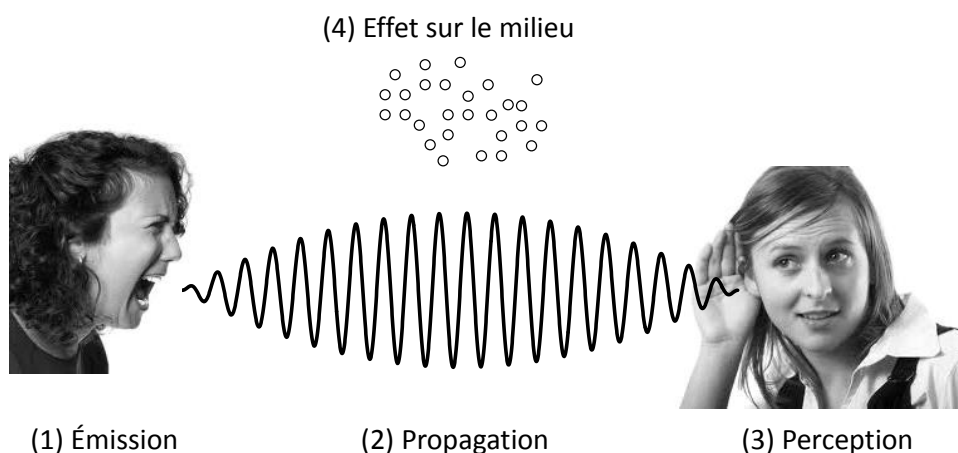


Figure 2.1: Les quatre dimensions de l’acoustique : émission, propagation, perception et effets sur le milieu.

2. sa propagation de la source à un ou plusieurs récepteurs ;
3. la mesure, l’enregistrement ou la perception du son par ce récepteur (microphone ou oreille) ;
4. les effets physiques éventuels du son sur le milieu traversé : dans le cadre de l’acoustique linéaire que nous étudions ici ces effets sont nuls.

Étymologie

- **Son** : du latin *sonum*, son, bruit ; on retrouve en sanskrit un mot de même origine *svanáh*⁴.
- **Bruit** : d’un latin populaire *brugire* employé en parlant du cerf qui brâme, par combinaison de *rugire* → rugir et *bragere* → brailler, braire qui a donné bruire puis bruit⁵.
- **Acoustique** : le mot acoustique dérive du grec *ακουειν*, entendre, suivi de la désinence -tique qu’on retrouve dans un grand nombre de noms de disciplines (informatique, numismatique, propédeutique, esthétique, herméneutique, casuistique, maïeutique, poïétique). Le mot a été proposé en 1700 par

4. **Alain Rey**, *Dictionnaire historique de la langue française* (1992).

5. **Alain Rey**, *op. cit.*

le savant français Joseph Sauveur⁶ et s'est imposé depuis dans un grand nombre d'autres langues (*acoustics* en anglais, *akoestiek* en néerlandais, *akustik* en allemand, danois et suédois, *acustica* en italien).

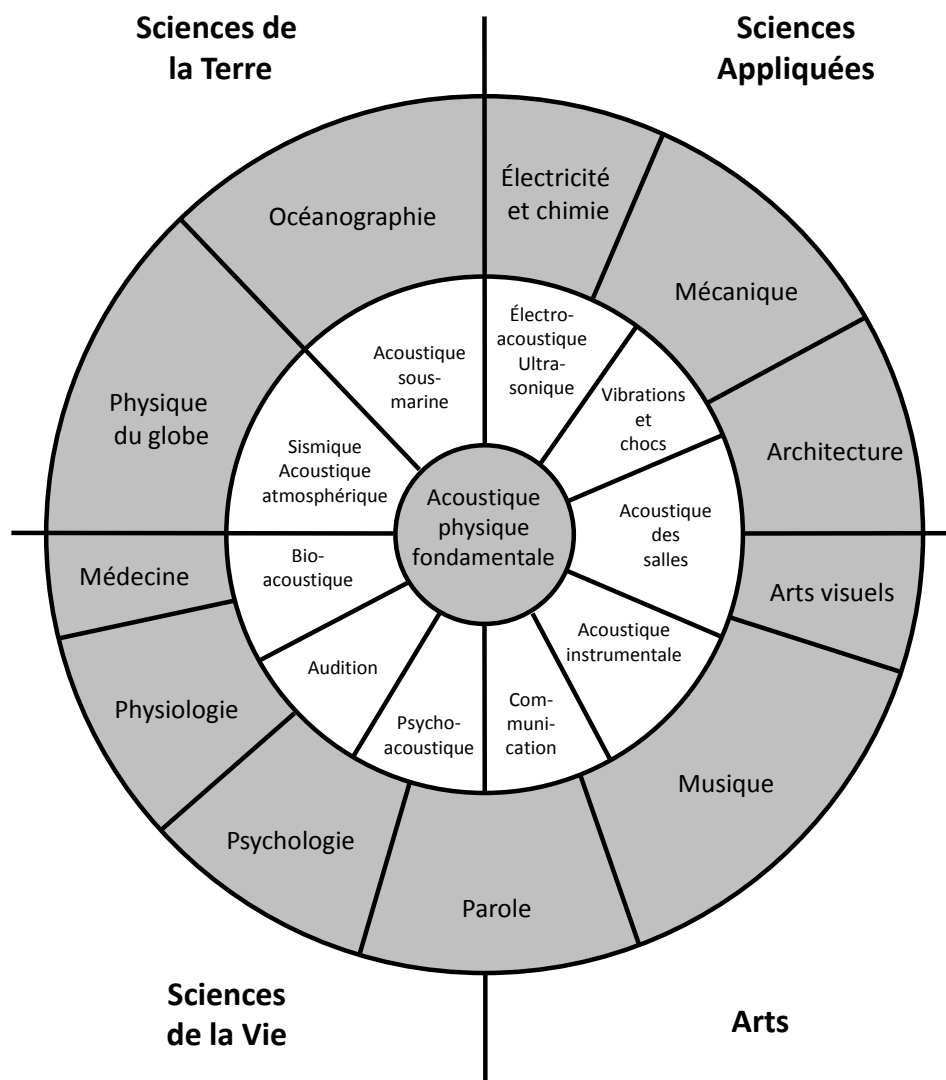
2.2 Branches de l'acoustique

La figure 2.2 montre comment différentes branches de l'acoustique (acoustique sous-marine, électro-acoustique, vibrations et chocs, ...) s'articulent autour de l'acoustique physique fondamentale et sont liées à différents domaines des arts et des sciences.

Le Journal de la société américaine d'acoustique (JASA, *Journal of the Acoustical Society of America*) regroupe par ailleurs ses articles dans les catégories suivantes qui constituent, *de facto*, une classification de l'acoustique :

- ***General linear acoustics*** (acoustique linéaire générale) : voir la section 4.2 pour une discussion sur la linéarité et la non-linéarité en acoustique.
- ***Aeroacoustics and atmospheric sound*** (aéro-acoustique et propagation du son dans l'atmosphère) : l'aéro-acoustique étudie les bruits produits par les écoulements et leur propagation dans le fluide en mouvement (voir le chapitre 15 consacré à la propagation convectée) y compris dans l'atmosphère (voir le chapitre 16 consacré à la propagation atmosphérique). Plus généralement, on peut regrouper sous ce vocable tous les phénomènes où il existe une interaction entre un champ acoustique et un écoulement.
- ***Structural acoustics, Vibrations*** (vibro-acoustique et vibrations) : la vibro-acoustique étudie la génération du bruit par les structures vibrantes ou la mise en vibration des structures par un champ acoustique. C'est, avec l'aéro-acoustique, la branche de l'acoustique la plus importante pour les ingénieurs qui doivent concevoir des machines silencieuses et, pour ce faire, prédire le bruit généré et trouver les moyens de le contrôler, de le confiner ou de l'absorber.

6. **Joseph Sauveur**, né à La Flèche le 24 mars 1653 et mort à Paris le 9 juillet 1716, physicien français, membre de l'Académie et professeur de mathématiques au Collège de France. Il est connu comme le fondateur de l'acoustique musicale, dans la lignée de René Descartes et de Marin Mersenne.



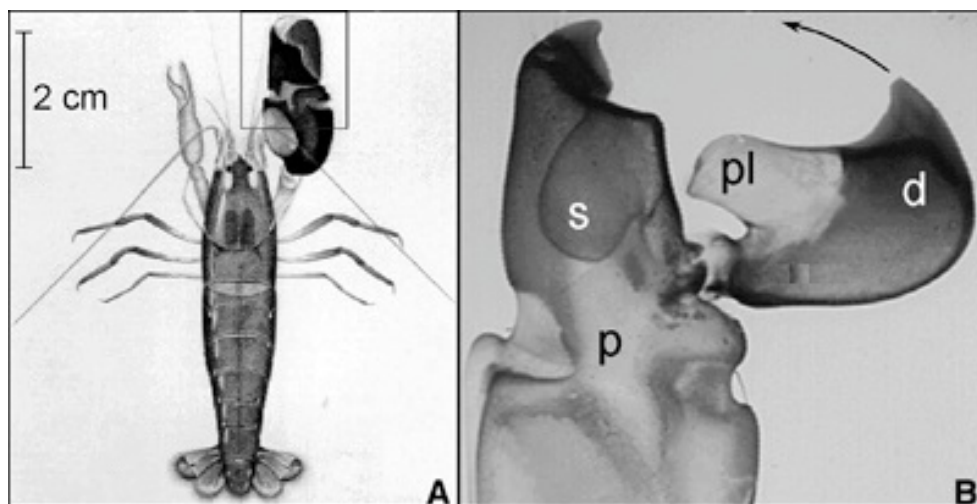
Adapté de Lindsay R.B., JASA 36 :2242 (1964) reproduit par Pierce A.D., Acoustics, ASA and AIP (1994).

Figure 2.2: Domaines de l'acoustique.

- **Architectural acoustics** (acoustique architecturale) : voir le chapitre 8 qui traite de l'acoustique des salles.
- **Ultrasonics, quantum acoustics and physical effects of sound** (ultrasons, hypersons et effets physiques du son) : les ultrasons ont des fréquences comprises entre 20 kHz et 1 GHz alors que l'acoustique quantique ou *hypersonique* s'intéresse aux sons dont la fréquence est supérieure à 1GhZ (voir la section 2.3).
- **Physiological acoustics** (acoustique physiologique) : cette discipline s'intéresse à l'oreille humaine et, plus généralement, à la réaction du corps humain à un champ sonore.
- **Speech-Production** (production de la voix parlée) et **Speech Perception** (perception de la voix parlée) : ce domaine couvre l'étude des mécanismes de génération de la voix parlée et chantée ainsi que des mécanismes par lesquels l'oreille (ou un système artificiel) décrypte le signal émis. L'analyse des pathologies des organes de production de la parole (phonation) rentre aussi dans ce cadre. On pourrait également y rattacher le problème de l'auralisation, néologisme désignant l'équivalent auditif de la visualisation c'est-à-dire les techniques permettant de faire entendre de manière réaliste un signal sonore synthétique, résultat par exemple d'une simulation numérique.
- **Bioacoustics** (bio-acoustique) : il s'agit de l'étude des mécanismes physiologiques de génération des sons et de la communication par voie sonore (et ultrasonore) chez les animaux. Ce domaine peut paraître exotique et dépourvu d'applications mais l'article de Löhse *et al.* paru dans *Nature* en 2001⁷ et décrivant le mécanisme de génération de bruits surpuissants par une crevette tropicale dite *crevette pistolet* (*snapping shrimp*) démontre cependant :
 - que le monde du vivant est le siège de phénomènes physiques extrêmement remarquables⁸ ;
 - que l'ingéniosité des chercheurs en matière de métrologie l'est tout autant ;
 - que la nature fait preuve, en matière d'armes d'attaque ou de défense, d'une inventivité sans limite.

7. Löhse, D., Schmitz, B. and Versluis, M., *Snapping shrimp make flashing bubbles*, Nature 413(6855) :477-478, 2001. Voir aussi sur YouTube la vidéo qu'ils ont réalisé (mot clé : snapping shrimp).

8. *If it's amazement you want, the real world has it all* comme le dit si justement **Richard Dawkins** dans *The ancestor's tale* (2004).



From Versluis, Schmitz, von der Heydt, Löhse, *How Snapping Shrimp Snap : Through Cavitating Bubbles*, Science, Vol. 289 no. 5487 pp. 2114-2117. Reprinted with permission from AAAS.

Figure 2.3: La fameuse *crevette pistolet* (snapping shrimp).

De quoi s'agit-il ? D'une crevette Figure 2.3 capable de générer un niveau sonore très élevé en refermant brutalement sa pince. Le bruit n'est pas généré par le claquement proprement dit mais par le fait que, en se refermant, une excroissance de la partie mobile de la pince rentre dans un logement de la partie fixe et en éjecte l'eau sous forme d'un jet à plus de 100 km/h. La dépression à l'arrière du jet induit une bulle de cavitation instable dont l'implosion génère le bruit élevé mesuré. Cette implosion violente, et les pics de pression et de température qui l'accompagnent, est capable de tuer sa proie à distance ! Löhse et ses collègues ont également identifié l'émission d'un flash lumineux par un mécanisme semblable à celui de la sono-luminescence et qu'ils ont baptisé avec humour *shrimpluminescence* !

- **Non-linear acoustics** (acoustique non linéaire) : la section 4.2 analyse les notions de linéarité et de non-linéarité en acoustique.
- **Underwater sound** (propagation sous-marine du son) : l'acoustique sous-marine constitue un domaine spécifique, non tant par la nature des phénomènes mis en jeu qui, à beaucoup d'égards, sont identiques à ceux observés en acoustique aérienne⁹ que par l'importance et la spécificité des appli-

9. Citons quand même, comme phénomènes spécifiques, l'effet de guide d'onde résultant de la dimension verticale finie du domaine étudié et de la variation de la vitesse du son avec la profondeur liée aux gradients de température, de salinité et de pression hydrostatique

cations visées. L'acoustique sous-marine est d'abord un sujet de recherche important pour les militaires :

- conception d'émetteurs ultrasonores puissants et de récepteurs sensibles pour la détection de cibles potentielles ;
- traitement du signal dans le but d'identifier soit la source d'un bruit intercepté (bateau, sous-marin) soit la nature de l'objet ayant réfléchi un signal originellement émis par le sonar.

Mais il existe évidemment aussi de vastes applications civiles des sonars et autres techniques liées à l'acoustique sous-marine :

- bathymétrie et, plus généralement, imagerie des fonds marins, y compris la recherche d'épaves ou de sites archéologiques immergés ;
- halieutique : identification et comptage des bancs de poisson ;
- analyse de la flore sous-marine ;
- mesure de l'épaisseur, de la composition et du degré de saturation de couches sédimentaires.

L'océanographie, l'océanologie, la climatologie et la météorologie font également appel aux techniques de l'acoustique sous-marine.

- ***Transduction and Acoustical measurements*** (transduction et mesures acoustiques) : dans le contexte de l'acoustique, la transduction est l'étude de la production d'ondes sonores à partir de sources d'énergie variées (électrique, magnétique, mécanique) et, de manière similaire, des techniques de conversion des ondes sonores en une autre énergie, principalement à des fins métrologiques. En termes de sources sonores, on distingue notamment :
 - les haut-parleurs constitués d'un aimant permanent monté à la base d'un cône et entourés d'une bobine fixe dans laquelle circule un courant électrique variable. La circulation du courant induit une force électromagnétique qui fait vibrer le cône, engendrant, de ce fait, des ondes de pression dans l'air ;
 - les matériaux actifs (piézo-électriques, magnéto-strictifs) dans lesquels un couplage existe entre les champs élastiques ($\bar{\sigma}$ et $\bar{\epsilon}$) et les champs électriques (\vec{E} et \vec{D}) ou magnétiques (\vec{B} et \vec{H}) de telle sorte qu'un courant électrique alternatif traversant par exemple un cristal piézo-électrique induit une vibration de ce cristal qui se transmet au fluide environnant. On retrouve ces mêmes mécanismes, inversés, dans les dispositifs de mesure :
 - un courant électrique apparaît dans un cristal piézo-électrique lorsque

(voir la formule de Mackenzie à la section 4.6.2).

- celui-ci est mis en vibration sous l'effet des ondes de pression se propageant dans le fluide environnant ;
- les vibrations du fluide se transmettent à la membrane d'un microphone ce qui fait varier son impédance électrique et modifie l'intensité du courant traversant le circuit.
 - **Noise, its effects and control** (le bruit, ses effets, son contrôle) : il s'agit de la partie *règlementaire* de l'acoustique :
 - procédures de mesure du bruit adaptées à différentes situations : bruit routier, nuisances sonores sur le lieu de travail, cartographie sonore autour d'un aéroport ou d'une usine ;
 - interprétation des mesures, recherche de corrélations entre ces mesures et des enquêtes d'opinion réalisées auprès des personnes subissant les nuisances ;
 - standardisation, normes ;
 - résolution concrète des problèmes posés par le bruit dans un environnement donné : placement optimal des machines et des opérateurs dans un atelier, choix des matériaux pour les sols, plafonds, cloisons.
 - **Acoustic signal processing** (traitement du signal acoustique) : il s'agit ici des techniques spécifiques de traitement du signal utilisées en acoustique (voir le chapitre 5 consacré à l'analyse de Fourier).
 - **Psychological acoustics** (psycho-acoustique) : il est souvent difficile de corréler les indicateurs objectifs classiques de niveau sonore (dB par exemple, voir le chapitre 7) avec la nuisance perçue par un auditeur. La psycho-acoustique à notamment pour vocation :
 - la recherche et la définition d'indices décrivant la nuisance telle qu'elle est perçue par le sujet ;
 - l'analyse des couplages perceptifs expliquant la nuisance sonore par la combinaison de différents stimuli (acoustique, vibratoire, visuel) et plus généralement par l'état psychologique et sensoriel de la personne et par l'histoire de son exposition au bruit ;
 - l'élucidation des aspects parfois paradoxaux de la perception du bruit ou de la musique.
 - **Music and musical instruments** (acoustique musicale) : il s'agit de l'étude mathématique et physique de la musique dans toutes ses dimensions.

À ces thèmes s'ajoute l'**électro-acoustique** qui est traitée dans une revue séparée : le journal de l'*Audio Engineering Society* (AES).

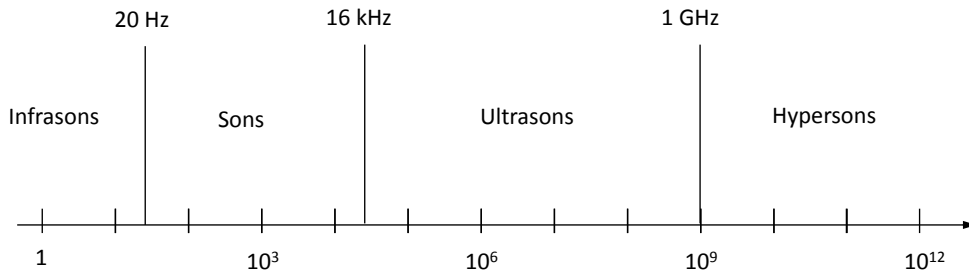


Figure 2.4: Étendue spectrale des sons.

2.3 Étendue spectrale des sons

Un son est caractérisé par sa fréquence ou ses fréquences constituantes qui s'expriment en Hertz ¹⁰ (Hz, s^{-1}). L'acoustique peut être découpée en quatre domaines Figure 2.4 suivant l'étendue spectrale des sons considérés :

- les infrasons, qui couvrent la partie du spectre comprise entre 0 et 20 Hz ;
- les sons auxquels l'oreille humaine est sensible sont caractérisés par des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 000 Hz ¹¹ (20 kHz) avec bien entendu des variations dans l'étendue perceptive d'un sujet à l'autre et un maximum de sensibilité entre 20 et 4 000 Hz Figure 2.5 ;
- la gamme spectrale des ultrasons débute là où finit celle des sons (20 kHz) et s'arrête conventionnellement à 1 GHz (10^9 Hz) ; on y distingue les ultrasons de puissance (20 à 1 000 kHz) et les ultrasons de diagnostic (1 à 10 MHz) ;
- les hypersons occupent le reste du spectre au-delà de 1 GHz.

Dans ce livre, nous nous intéresserons exclusivement aux sons audibles, même si la plupart des concepts et développements théoriques s'appliquent aussi aux ultrasons et, dans une moindre mesure, aux infrasons.

10. **Heinrich Rudolf Hertz** est né le 22 février 1857 à Berlin et est décédé le 1^{er} janvier 1894 à Bonn. Élève de Helmholtz, il fut le premier à confirmer expérimentalement en 1887 l'existence des ondes électro-magnétiques prédites par la théorie proposée par James Clerk Maxwell (1831-1879).

11. On trouve aussi souvent les valeurs de 16 Hz et 16 kHz comme limite entre les infrasons et les sons d'une part et les sons et les ultrasons d'autre part.

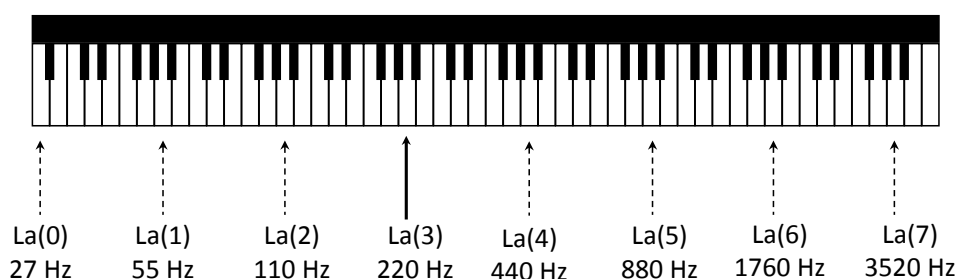


Figure 2.5: La gamme de fréquence couverte par un piano correspond à la zone de sensibilité maximum de l'oreille humaine.

2.4 Actualité de l'acoustique

L'acoustique a connu un développement remarquable au cours des dernières décennies sous l'effet de plusieurs évolutions étroitement liées :

- la perception du bruit comme une nuisance majeure devant être combattue Figure 2.6 ;
- l'apparition de normes acoustiques exigeantes ;
- le désir des producteurs de biens et d'équipements de fournir des produits acoustiquement satisfaisants et d'utiliser leurs qualités acoustiques comme élément différenciateur par rapport à la concurrence.

La prise de conscience générale du fait que le bruit est une nuisance majeure est une des causes principales de ce développement. De nombreuses études ont été consacrées à l'analyse des effets nocifs du bruit sur l'activité humaine et notamment sur :

- la communication verbale : le bruit interfère avec les messages que nous nous échangeons et en dégrade le contenu ;
- la concentration et l'exécution des tâches : le bruit réduit l'attention, augmente le nombre d'interruptions dans l'exécution de la tâche en cours et réduit la qualité du travail.

Le bruit est la plus importante des formes d'interruption. C'est non seulement une interruption mais aussi une rupture de la pen-

sée.

Arthur Schopenhauer (1788-1860) *in* Sur le bruit.

- les troubles de l'audition : l'exposition répétée à des bruits de niveau suffisamment important induit des troubles temporaires ou permanents allant de la perte sélective et limitée d'acuité auditive à la surdité complète ;
- les autres troubles physiologiques : l'impact du bruit sur les naissances prématurées, les accidents cardio-vasculaires et les troubles psychiatriques est également largement documenté ;
- le sommeil enfin est clairement affecté, dans chacune de ses phases, par le bruit dès que celui-ci dépasse un certain niveau.

Les mouvements de protestations des riverains d'aéroports montrent notamment l'importance des nuisances sonores pour le citoyen.

Conscients de l'étendue du problème, les états, et des entités supra-nationales comme la Commission européenne, ont cherché à imposer des niveaux sonores maximaux par le biais de normes et de recommandations. On a vu ainsi fleurir toute une réglementation fixant le bruit admissible pour les avions, les voitures, les trains, les machines. Cette démarche normative a été un moteur important de la recherche en acoustique.

Les producteurs de biens et d'équipements bruyants ont bien entendu été contraints de s'adapter aux normes imposées mais ont aussi pris conscience de l'importance grandissante de la qualité acoustique comme critère de choix de leurs clients. Prenons l'exemple de l'automobile : avant 1973, les critères essentiels étaient l'esthétique du véhicule, la puissance du moteur, son accélération maximale et le plaisir de conduite (reprises, couple). La crise du pétrole a mis l'accent sur l'économie de la voiture, c'est-à-dire sa consommation et sa longévité. Plus près de nous, ce sont la sécurité (résistance au crash, viabilité en cas d'accident) et le confort (sièges, suspension, conditionnement d'air/ventilation) qui constituent désormais les critères de choix. Plus récemment, le confort acoustique a pris une importance déterminante et le choix des consommateurs se portera volontiers sur les voitures les plus silencieuses de leur gamme. Dans les nouveaux véhicules électriques et hybrides, nous sommes confrontés au problème inverse. Le bruit produit est, d'une part, trop faible pour alerter les piétons et doit être artificiellement augmenté, et, d'autre part, il n'offre pas un *feedback* cohérent par rapport aux manœuvres du pilote et le signal doit être filtré et modifié pour ne pas être mal interprété ; il est même, dans certains cas, totalement synthétique.

Plusieurs campagnes de publicité récentes, dans différents domaines, sont révélatrices de ce changement d'attitude du consommateur et mettent le bruit au centre de la communication sur le produit. Un autre exemple : le niveau de bruit produit par un lave-vaisselle, un aspirateur ou une machine à laver est désormais affiché dans les magasins de nombreux pays et, toujours à prix comparable, l'acheteur donnera la priorité aux appareils silencieux avant tout autre critère.



Figure 2.6: New York, mai 2008 : un coup de klaxon qui peut coûter cher !

Part I

GOVERNING EQUATIONS AND
FUNDAMENTAL CONCEPTS OF LINEAR ACOUSTICS

3

ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

*Tous les effets de la nature ne sont que résultats mathématiques
d'un petit nombre de lois immuables.*

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) *in* Théorie analytique des
probabilités (1812)

Contents

3.1	Équation de continuité	20
3.2	Rappels sur la notation indicielle	23
3.3	Équation de la quantité de mouvement	26
3.4	Équation d'état	32
3.5	Équation de conservation de l'énergie	32

Les équations de Navier¹-Stokes² expriment localement deux principes fondamentaux de la mécanique : la conservation de la masse d'une part et la seconde loi de Newton³ ($\vec{F} = m\vec{a}$) d'autre part. Les variables d'état choisies pour décrire le fluide sont la pression p , la masse volumique ρ et le champ de vitesse \vec{v} .

3.1 Équation de continuité

La loi de conservation de la masse peut être exprimée localement en considérant un volume infinitésimal de fluide de dimensions dx , dy et dz Figure 3.1 et en exprimant que, dans ce volume, l'accroissement de la masse au cours d'un intervalle de temps dt induit un accroissement de la masse volumique du fluide.

Flux de masse

Considérons par exemple la facette $dx.dz$ perpendiculaire à l'axe de coordonnée y . Le flux de matière entrant dans le volume par cette face pendant le

1. **Claude Louis Marie Henri Navier**, né le 10 février 1785 à Dijon, mort le 21 août 1836 à Paris. Élève de Fourier, il travailla sur de nombreux sujets de mathématiques appliquées, notamment l'élasticité et la dynamique des fluides. Dans ce dernier domaine il formula les équations pour un fluide incompressible en 1821 puis pour un fluide visqueux en 1822.

2. **Sir George Gabriel Stokes** (1819-1903) est connu par ses études sur la viscosité et la mécanique des fluides d'une part et par son fameux théorème d'analyse vectorielle d'autre part. Ce théorème exprime que le flux du rotationnel d'une grandeur vectorielle \vec{F} au travers d'une surface S est égal à l'intégrale de ce vecteur sur la bordure Γ de S :

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) dS = \int_{\Gamma} \vec{F} d\Gamma \quad (3.1)$$

3. **Isaac Newton**, mathématicien, physicien et astronome anglais, né en 1642 à Woolsthorpe et mort en 1727 à Kensington. Son traité *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, publié en 1687, est considéré comme le livre le plus influent de l'histoire de la physique. Newton y décrit la gravitation universelle et les lois du mouvement qui forment les bases de la mécanique classique. Newton est aussi, avec Leibniz, à l'origine du calcul différentiel et intégral même si nous n'utilisons plus aujourd'hui que le formalisme de Leibniz.

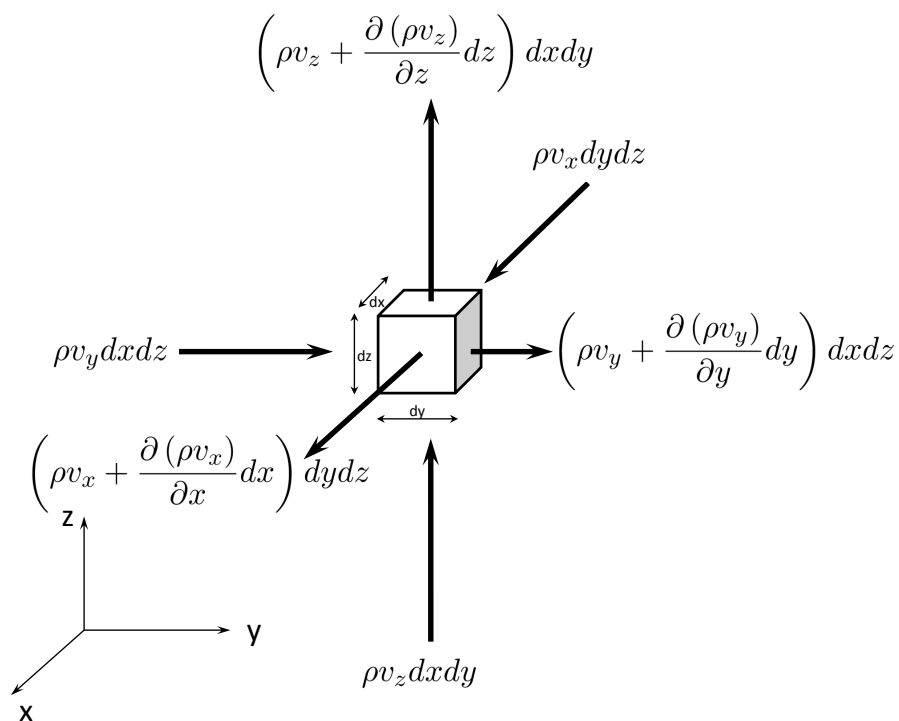


Figure 3.1: Équation de continuité.

temps dt est égal à :

$$\rho v_y dx dz dt \quad (3.2)$$

Si nous prenons en compte la variation de masse volumique et de vitesse entre les deux faces parallèles du volume de contrôle, le flux de matière sortant de la boîte par cette même face pendant le même temps est égal à :

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy \right) \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx dz dt \quad (3.3)$$

En se limitant au premier ordre il apparaît que le flux net de matière au travers de ces deux faces est égal à :

$$-\frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz dt \quad (3.4)$$

Si on fait le même calcul pour les deux autres couples de faces, on voit que le flux net de matière au travers du volume de contrôle élémentaire pendant le temps dt est donné par :

$$-\left(\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad (3.5)$$

Sources de masse

Considérons par ailleurs une source de masse distribuée $q(x, y, z, t)$. La masse totale produite par cette source au sein du volume élémentaire pendant le temps dt est égale à :

$$q dx dy dz dt \quad (3.6)$$

Accroissement de la masse volumique

On peut également évaluer l'accroissement de masse dans le volume en considérant la variation de la masse volumique :

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \quad (3.7)$$

Équation de continuité

En égalant la somme des termes 3.5 et 3.6 au terme 3.7, on obtient une relation qui exprime la conservation de la masse ; c'est l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = q - \left(\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} \right) \quad (3.8)$$

soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} \right) = q \quad (3.9)$$

3.2 Rappels sur la notation indicielle

La notation indicielle sera utilisée systématiquement dans la suite de ce chapitre et dans certains chapitres suivants. Cette notation est très compacte et très cohérente. Utilisons l'équation 3.9 comme exemple pour présenter la notation indicielle.

Coordonnées et composantes

Plutôt que d'utiliser les trois lettres x , y et z pour les trois coordonnées spatiales d'un repère cartésien, utilisons les symboles x_1 , x_2 et x_3 . Plus généralement, tout vecteur sera caractérisé par ses trois composantes (u_1, u_2, u_3) . L'équation 3.9 peut alors être réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1,3} \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = q \quad (3.10)$$

Dérivées

La dérivée d'une fonction f par rapport au temps sera désormais notée $\partial_t f$ et sa dérivée par rapport à la coordonnée x_i sera notée $\partial_i f$. Avec ces conventions

supplémentaires, l'équation de continuité s'écrit :

$$\partial_t \rho + \sum_{i=1,3} \partial_i (\rho v_i) = q \quad (3.11)$$

Sommation implicite

La notation peut encore être allégée en utilisant la convention de sommation implicite ou convention d'Einstein⁴ qui précise qu'il y a implicitement sommation sur les valeurs d'un indice lorsque celui-ci est répété deux fois dans un même terme. Le second terme du membre de gauche de l'équation de continuité voyant se répéter l'indice i , il n'y a plus lieu de conserver le symbole de sommation et l'équation prend sa forme la plus compacte :

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i) = q \quad (3.12)$$

Un indice répété est appelé un indice muet. La convention d'Einstein implique que deux règles importantes soient satisfaites :

1. aucun indice ne peut apparaître plus de deux fois dans un même terme ;
2. les différents termes d'une équation doivent contenir les mêmes indices non muets (homogénéité indicielle). De ce point de vue, les expressions suivantes sont cohérentes :

$$c_{ik} = a_{ij} b_{jk} \quad (3.13)$$

$$e_{ikl} \delta_{kl} = a_i + b_{ij} c_j + d_{ik} c_k \quad (3.14)$$

alors que celles-ci ne le sont pas :

$$c_{ij} = a_{ij} b_{ij} \quad (3.15)$$

4. **Albert Einstein**, physicien allemand né à Ulm en 1879, mort à Princeton (États-Unis) en 1955. La même année 1905, alors qu'il est ingénieur à l'office des brevets de Berne, il publie trois mémoires qui marquent la physique du vingtième siècle. Dans le premier, il élucide l'effet photo-électrique et introduit le photon. Dans le deuxième, il établit la théorie statistique du mouvement brownien. Dans le troisième, il remet en cause les bases fondamentales de la physique en proposant sa théorie de la relativité restreinte. Il travaillera ensuite de nombreuses années à la généralisation de cette dernière théorie qui aboutira à la théorie de la relativité générale (1916). C'est dans ce dernier cadre, qui utilise largement le calcul tensoriel et la notation indicielle, qu'il introduit cette convention de sommation implicite sur les indices répétés.

$$a_i + b_k + c_{ik} \quad (3.16)$$

Autres exemples

$$\left(\vec{\nabla} f\right)_i = \partial_i f \quad (3.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_i u_i \quad (3.18)$$

$$\Delta f = \partial_{ii} f \quad (3.19)$$

Symboles de Kronecker et de Levi-Civita

De nombreuses expressions utilisant la notation indicielle font usage des symboles de Kronecker et de Levi-Civita. Le symbole de Kronecker⁵, δ_{ij} , est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 & \text{si } i &= j \\ \delta_{ij} &= 0 & \text{si } i &\neq j \end{aligned} \quad (3.20)$$

Voici quelques relations usant de ce symbole :

$$u_i \delta_{ij} = u_j \quad (3.21)$$

$$\sigma_{ij} \delta_{ij} = \sigma_{ii} \quad (3.22)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{se note} \quad a_{ij} + b\delta_{ij} \quad (3.23)$$

Le symbole de Levi-Civita⁶, δ_{ijk} , est égal à :

– 1 si $i - j - k$ définissent une permutation paire de 1 – 2 – 3 ;

5. **Leopold Kronecker**, mathématicien allemand, père de la théorie des nombres algébriques, né à Liegnitz en 1823, mort en 1891.

6. **Tullio Levi-Civita**, mathématicien italien, né le 29 mars 1873 à Padoue et décédé le 29 décembre 1941 à Rome. Il est connu principalement pour son travail sur le calcul tensoriel et ses applications en théorie de la relativité. Ce symbole est parfois appelé improprement *second symbole de Kronecker*.

- -1 si ces trois indices définissent une permutation impaire de $1 - 2 - 3$;
- 0 si le triplet $i - j - k$ ne constitue pas une permutation de $1 - 2 - 3$.

Par exemple :

$$\delta_{123} = 1, \delta_{113} = 0, \delta_{222} = 0, \delta_{132} = -1, \delta_{231} = 1, \delta_{321} = -1 \quad (3.24)$$

Ce symbole est notamment utile dans l'expression du produit vectoriel :

$$(\vec{u} \times \vec{v})_i = \delta_{ijk} u_j v_k \quad (3.25)$$

et en particulier dans l'écriture du rotationnel :

$$(\vec{\nabla} \times \vec{u})_i = \delta_{ijk} \partial_j u_k \quad (3.26)$$

3.3 Équation de la quantité de mouvement

Sous sa forme la plus connue, la seconde loi de Newton exprime qu'une force \vec{F} agissant sur un corps de masse m transmet à ce corps une accélération \vec{a} , ces trois grandeurs étant liées par la relation suivante :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (3.27)$$

Sous cette forme, on suppose en fait que la masse du corps ne varie pas dans le temps. Dans un contexte plus général, la loi de Newton s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (3.28)$$

où \vec{v} est la vitesse du corps et où la grandeur $m\vec{v}$ est appelée quantité de mouvement. Appliquons ce principe au même volume de contrôle infinitésimal utilisé pour dériver l'équation de continuité. La variation de quantité de mouvement du volume élémentaire pendant le temps dt est donnée par :

$$\left(\rho\vec{v} + \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} dt \right) dxdydz - \rho\vec{v} dxdydz = \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} dxdydz dt \quad (3.29)$$

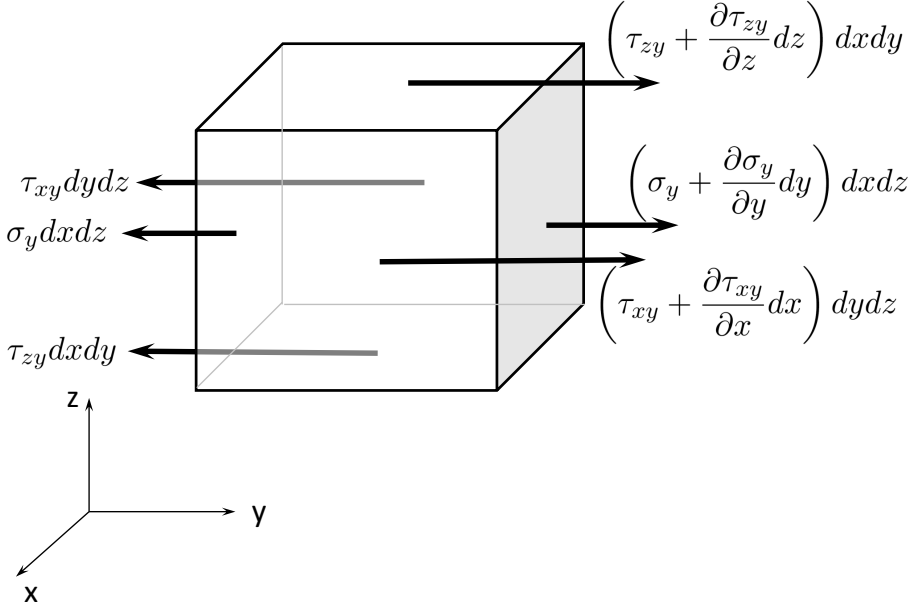


Figure 3.2: Forces agissant sur le volume (fluide visqueux).

elle est due à deux effets : le flux net de quantité de mouvement au travers des parois du volume et l'action des forces extérieures sur le volume.

Forces agissant sur le volume

Si on exclut la gravité, les forces agissant sur le volume élémentaire sont la résultante des différentes composantes du tenseur des contraintes agissant sur les faces du volume Figure 3.2. Si nous choisissons à nouveau d'étudier la composante y , nous trouvons une force résultante donnée par :

$$\begin{aligned}
 F_y &= \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dxdz - \sigma_y dxdz \\
 &+ \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{xy} dydz \\
 &+ \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dxdy - \tau_{zy} dxdy \\
 &= \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dxdydz
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

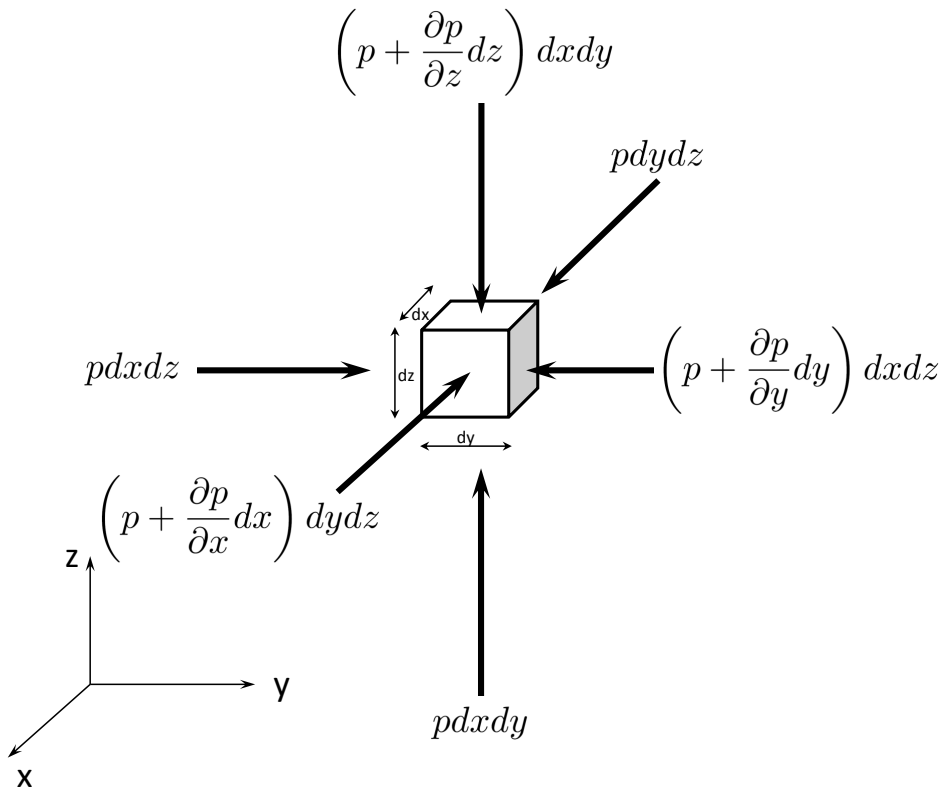


Figure 3.3: Forces agissant sur le volume (fluide non visqueux).

De même, pour les autres directions on obtient :

$$F_x = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (3.31)$$

$$F_z = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (3.32)$$

Ces trois relations peuvent être écrites de manière particulièrement compacte en notation indicielle (en tenant compte de la symétrie de $\tau_{ij} = \tau_{ji}$) :

$$F_i = \partial_j \tau_{ij} dx dy dz \quad (3.33)$$

Dans un fluide newtonien, le tenseur des contraintes est lié à la pression et au vecteur vitesse par la relation suivante :

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\partial_k u_k + \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (3.34)$$

où λ est la viscosité cinématique et μ la viscosité dynamique du fluide. Pour un fluide non visqueux on a :

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (3.35)$$

et les seules forces agissant sur le volume élémentaire sont les forces de pression Figure 3.3.

Flux de quantité de mouvement

Voyons à présent quel est le flux net de quantité de mouvement pénétrant dans le volume par unité de temps. Considérons d'abord la facette $dx.dz$ Figure 3.4 :

$$\rho \vec{v} v_y dx dz - \left(\rho \vec{v} + \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial y} dy \right) \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx dz \quad (3.36)$$

soit en se limitant au premier ordre :

$$-\frac{\partial(\rho \vec{v} v_y)}{\partial y} dx dy dz \quad (3.37)$$

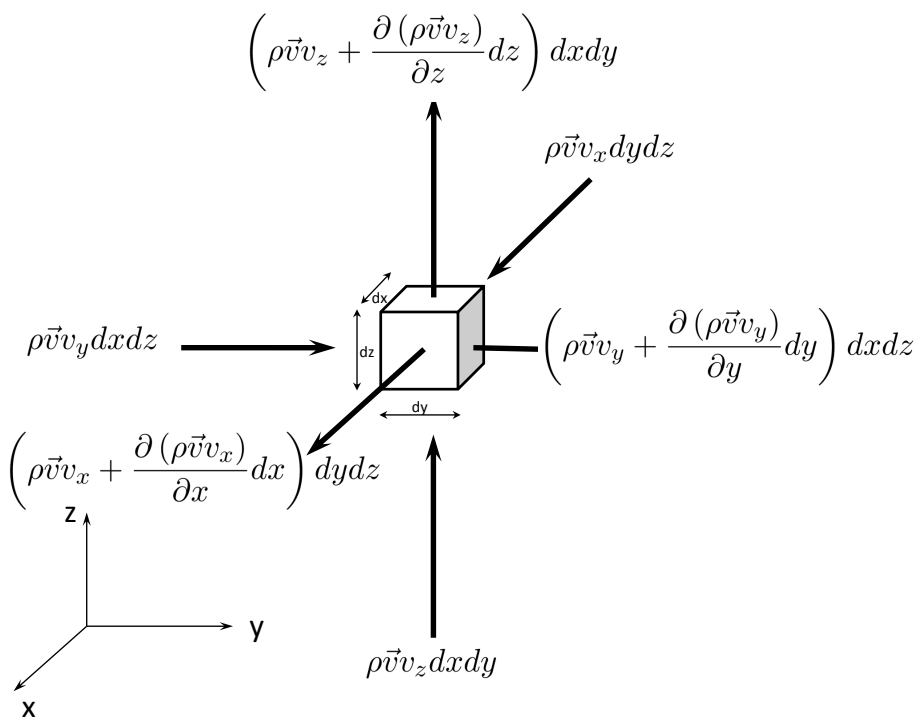


Figure 3.4: Flux net de quantité de mouvement dans le volume élémentaire.

Si nous ajoutons les contributions au travers des différentes facettes nous obtenons :

$$-\left(\frac{\partial(\rho \vec{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \vec{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \vec{v}_z)}{\partial z}\right) dx dy dz \quad (3.38)$$

soit, en utilisant la notation indicielle :

$$-\partial_j (\rho v_i v_j) dx dy dz \quad (3.39)$$

Équation de la quantité de mouvement

Si nous égalons l'expression 3.29 à la somme des termes des expressions 3.33 et 3.39, on obtient l'équation de la quantité de mouvement :

$$\partial_t (\rho v_i) = \partial_i \tau_{ij} - \partial_j (\rho v_i v_j) \quad (3.40)$$

soit :

$$\partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_i v_j) - \partial_i \tau_{ij} = 0 \quad (3.41)$$

Les deux premiers termes peuvent encore être développés :

$$v_i \partial_t \rho + \rho \partial_t v_i + v_i \partial_j (\rho v_j) + \rho v_j \partial_j v_i - \partial_i \tau_{ij} = 0 \quad (3.42)$$

ou :

$$v_i (\partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j)) + \rho (\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) - \partial_i \tau_{ij} = 0 \quad (3.43)$$

L'équation de continuité 3.9 permet de remplacer la première parenthèse par la source de masse q , d'où :

$$\rho (\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) - \partial_i \tau_{ij} = -q v_i \quad (3.44)$$

Les équations 3.41 et 3.44 sont équivalentes. La forme 3.41 sera en général préférée lorsque $q \neq 0$ alors que la forme 3.44 sera préférée lorsque $q = 0$ auquel cas elle s'écrit :

$$\rho (\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) - \partial_i \tau_{ij} = 0 \quad (3.45)$$

3.4 Équation d'état

Les équations de continuité et d'Euler fournissent quatre équations aux dérivées partielles faisant intervenir cinq inconnues : la masse volumique ρ , la pression p et les trois composantes de vitesse v_i . Il manque donc une équation pour fermer le système, c'est l'équation d'état (loi de Hooke, loi des gaz parfaits, etc.).

3.5 Équation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie n'est pas présentée ici car les phénomènes acoustiques étudiés plus loin seront en général considérés comme adiabatiques. Voir toutefois la section 15.3 qui traite de la propagation en présence d'un écoulement quelconque et où l'équation de l'énergie est présentée.

4

ÉQUATION D'ONDE

Que ne coûtent point les premiers pas en tout genre ? Le mérite de les faire dispense de celui d'en faire de grands. Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) *in* Extrait du Discours préliminaire à l'Encyclopédie (1763)

Contents

4.1	Équation d'onde	34
4.2	Linéarité et non-linéarité en acoustique	40
4.3	Solution générale à une dimension	42
4.4	Mécanique de la propagation	44
4.5	Propagations dispersive et non dispersive	47
4.6	Vitesse du son	51
4.7	Synthèse du chapitre	56

Le bruit a été défini au chapitre 2 comme une petite variation de la pression autour de sa valeur moyenne. Voyons à quelle équation doit obéir l'amplitude d'une telle variation de pression au sein d'un milieu continu.

4.1 Équation d'onde

Les équations de Navier-Stokes Chapter 3 expriment la conservation de la masse (équation de continuité) :

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i) = q \quad (4.1)$$

et la seconde loi de Newton (équation de la quantité de mouvement) :

$$\rho (\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) - \partial_i \tau_{ij} = -q v_i \quad (4.2)$$

Nous allons maintenant successivement introduire les hypothèses suivantes dans ces équations afin d'aboutir à une équation pour la fluctuation de pression acoustique :

1. fluide non visqueux ;
2. hypothèse des petites perturbations ;
3. introduction d'une loi constitutive linéarisée ;
4. fluide globalement au repos ;
5. linéarisation des équations.

Fluide non visqueux

La première hypothèse sera que le fluide dans lequel se propagent les ondes sonores est non visqueux ; le tenseur des contraintes est alors donné par :

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (4.3)$$

et l'équation de la quantité de mouvement devient l'équation d'Euler¹ :

$$\rho (\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) + \partial_i p = -q v_i \quad (4.4)$$

Un fluide n'est jamais totalement dépourvu de viscosité mais celle de l'air ou de l'eau est très faible et, si nécessaire, son effet peut être réintroduit *a posteriori* dans les modèles de manière *ad hoc* Section 6.5.4.

Petites perturbations

La seconde hypothèse consiste à séparer les champs de pression et de masse volumique en deux composantes : une première composante constante dans le temps et dans l'espace et une deuxième composante variable dans le temps et l'espace mais supposée sensiblement plus petite que la première :

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \quad \text{avec} \quad p_a \ll p_0 \\ \rho &= \rho_0 + \rho_a \quad \text{avec} \quad \rho_a \ll \rho_0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Fluide barotrope

Les quatre équations aux dérivées partielles couplent cinq grandeurs : les trois composantes de vitesse v_i , la pression p et la masse volumique ρ . Pour clore le système on introduit une relation constitutive liant pression et masse volumique Figure 4.1 :

$$p = f(\rho) \quad (4.6)$$

Un fluide décrit par une telle relation constitutive est dit *barotrope*. La relation ci-dessus peut être développée en série de Taylor² autour du point (p_0, ρ_0) Figure 4.1 :

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{df}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_0} + o((\rho - \rho_0)^2) \quad (4.7)$$

1. **Leonhard Euler** est un mathématicien et physicien suisse, né le 15 avril 1707 à Bâle et décédé le 18 septembre 1783 à Saint-Petersbourg. Euler est l'un des mathématiciens les plus prolifiques et les plus influents du dix-huitième siècle ; on ne compte pas ses contributions à l'analyse mathématique, à la mécanique classique, la mécanique des fluides, l'optique et l'astronomie.

2. **Brook Taylor** (1685-1731), mathématicien anglais.

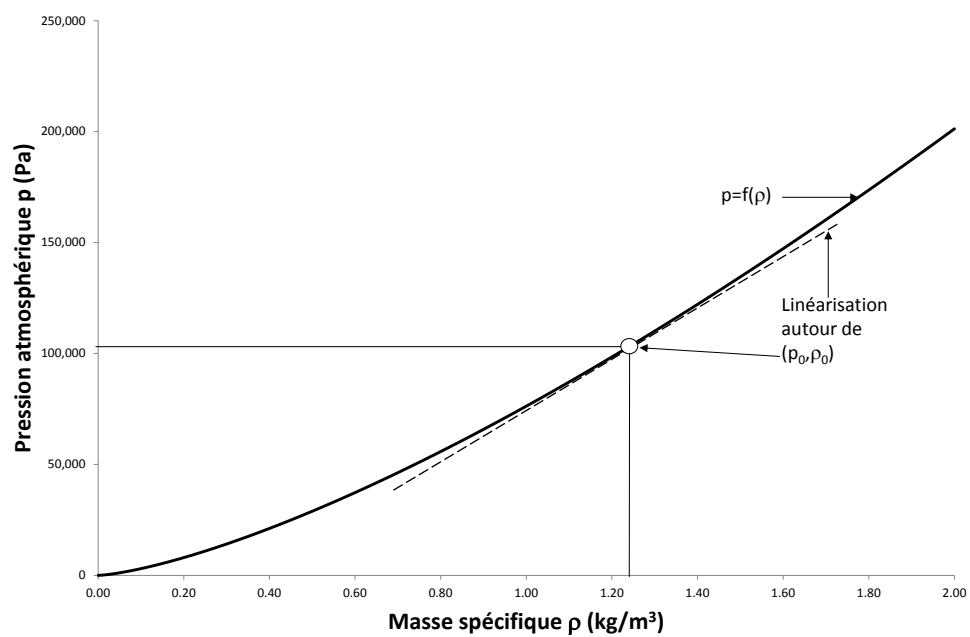


Figure 4.1: Relation pression-masse volumique pour un gaz parfait. Linéarisation autour de l'état de référence.

Si on se limite au premier ordre, ce qui est compatible avec le fait que la pression et la masse volumique ne varient que peu autour de leur valeur moyenne, on trouve la relation constitutive linéarisée :

$$p_a = c^2 \rho_a \quad (4.8)$$

en posant :

$$c^2 = \left(\frac{df}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_0} \quad (4.9)$$

On verra plus loin que c désigne la vitesse de propagation de la perturbation de pression dans le fluide. c^2 est nécessairement positif, en effet, un fluide dans lequel la pression décroîtrait lorsque la masse volumique augmente serait intrinsèquement instable et s'écroulerait sous l'effet de sa propre masse.

Fluide *globalement* au repos

On supposera en outre, quatrième hypothèse, que **le fluide est globalement au repos** et que le mouvement du fluide se limite aux petits mouvements alternatifs dus à la perturbation de pression ; il n'y a donc pas de vitesse moyenne v_{i0} mais seulement une composante acoustique v_{ia} que l'on suppose par ailleurs significativement plus faible que la célérité c . Cette hypothèse ($v_0 = 0$) n'est pas strictement nécessaire mais elle correspond à une très large classe de problèmes³ ; le cas de la propagation convectée sera traité au chapitre 15.

Linéarisation

Introduisons la décomposition 4.5 dans l'équation de continuité et l'équation d'Euler :

$$\partial_t (\rho_0 + \rho_a) + \partial_i ((\rho_0 + \rho_a) v_{ia}) = q \quad (4.10)$$

$$(\rho_0 + \rho_a) (\partial_t v_{ia} + v_{ja} \partial_j v_{ia}) + \partial_i (p_0 + p_a) = -q v_{ia} \quad (4.11)$$

3. Quelques exceptions : la propagation à grande distance du bruit est influencée par le vent, la propagation du bruit du moteur dans le système d'échappement est influencée par la vitesse d'écoulement des gaz, le rayonnement acoustique d'un moteur d'avion dépend du débit d'air au travers du réacteur, etc.

En tenant compte du fait que $\rho_a \ll \rho_0$ et du fait que p_0 et ρ_0 sont constants nous pouvons réécrire ces équations sous la forme :

$$\partial_t \rho_a + \rho_0 \partial_i v_{ia} + \partial_i (\rho_a v_{ia}) = q \quad (4.12)$$

$$\rho_0 (\partial_t v_{ia} + v_{ja} \partial_j v_{ia}) + \partial_i p_a = -q v_{ia} \quad (4.13)$$

Nous allons linéariser ces équations en faisant deux hypothèses.

- Dans l'équation de continuité, on néglige le terme :

$$\partial_i (\rho_a v_{ia}) = \frac{p_0}{c} \partial_i \left(\frac{p_a}{p_0} \frac{v_{ia}}{c} \right) \quad (4.14)$$

Il est clair que le terme dont on calcule la divergence est petit car il est le produit de deux quantités petites ($p_a \ll p_0$ et $v_{ia} < c$) ; il n'est pas pour autant évident que :

$$\partial_i \left(\frac{p_a}{p_0} \frac{v_{ia}}{c} \right) \ll \partial_i \left(\frac{v_{ia}}{c} \right) \quad (4.15)$$

C'est pourtant l'hypothèse que nous ferons en considérant que les grandeurs varient relativement lentement et régulièrement (typiquement de manière sinusoïdale). Nous verrons plus loin que le produit $p_a v_{ia}$ mesure l'intensité (puissance par unité de surface) propagée par le champ acoustique ; négliger ce terme revient donc à admettre que l'intensité varie plus lentement que la vitesse. Cette hypothèse devra être validée *a posteriori*.

- Dans l'équation d'Euler, on veut négliger le terme du second ordre, c'est-à-dire faire l'hypothèse que :

$$v_{ja} \partial_j v_{ia} \ll \partial_t v_{ia} \quad (4.16)$$

ce qu'on peut réécrire en divisant par c^2 :

$$\frac{v_{ja}}{c} \partial_j \left(\frac{v_{ia}}{c} \right) \ll \frac{\partial \frac{v_{ia}}{c}}{\partial (ct)} \quad (4.17)$$

ce qui est admissible si :

$$\frac{\partial \frac{v_{ia}}{c}}{\partial (ct)} \sim \partial_j \left(\frac{v_{ia}}{c} \right) \sim \frac{v_{ja}}{c} \quad (4.18)$$

Cette hypothèse, elle aussi, mériterait d'être validée *a posteriori*.

On ne garde donc finalement que les termes du premier ordre⁴ :

$$\frac{1}{c^2} \partial_t p_a + \rho_0 \partial_i v_{ia} = q \quad (4.19)$$

$$\rho_0 \partial_t v_{ia} + \partial_i p_a = -q v_{ia} \quad (4.20)$$

Élimination de la vitesse

On peut alors éliminer la vitesse entre ces équations en dérivant la première par rapport au temps et en prenant la divergence de la deuxième :

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} p_a + \rho_0 \partial_{ti} v_{ia} = \partial_t q \quad (4.21)$$

$$\rho_0 \partial_{it} v_{ia} + \partial_{ii} p_a = -\partial_i (q v_{ia}) \quad (4.22)$$

puis en les soustrayant :

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} p_a - \partial_{ii} p_a = \partial_t q + \partial_i (q v_{ia}) \quad (4.23)$$

Cette équation décrit la variation spatiale et temporelle de la fluctuation de pression acoustique.

Relation pression-vitesse

Retenons encore l'équation d'Euler linéarisée :

$$\partial_t v_{ia} = \frac{1}{\rho_0} (-\partial_i p_a - q v_{ia}) \quad (4.24)$$

qui permet de calculer l'accélération du fluide en fonction du gradient de pression et du terme de source de volume.

4. Dans la plupart des cours d'acoustique, l'auteur élimine sans commentaire tous les termes du second ordre en invoquant le fait qu'il s'agit de produits de perturbations *mais* sans relever par rapport à quoi v_{ia} serait petit puisqu'on fait l'hypothèse que $v_0 = 0$. Il est en outre incorrect de dire sans réserve que si une grandeur physique est petite son gradient ou sa dérivée temporelle l'est aussi.

Version homogène des équations

En l'absence de sources de masse distribuées en volume ($q = 0$) les deux dernières équations s'écrivent :

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} p_a - \partial_{ii} p_a = 0 \quad (4.25)$$

$$\partial_t v_{ia} = -\frac{1}{\rho_0} \partial_i p_a \quad (4.26)$$

Soit encore en utilisant une autre notation :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p_a \quad (4.28)$$

La première équation est appelée équation d'onde ou équation de d'Alembert⁵. La seconde équation montre que, en l'absence de sources de volume ($q = 0$), l'accélération du fluide est proportionnelle au gradient de la pression. Réécrite autrement :

$$\rho_0 \vec{a}_a = -\text{grad} p_a \quad (4.29)$$

elle exprime simplement localement la seconde loi de Newton : la force nette agissant sur le fluide par unité de surface (le gradient de pression changé de signe) est égale au produit de la masse (masse volumique) par l'accélération.

Linéarité et non-linéarité

4.2 en acoustique

Nous avons linéarisé les équations de Navier-Stokes pour aboutir à une équation de d'Alembert pour la perturbation acoustique. La plupart des phéno-

5. **Jean le Rond d'Alembert**, mathématicien, philosophe et encyclopédiste français né le 16 novembre 1717 et mort le 29 octobre 1783 à Paris. Il est connu pour avoir co-dirigé, avec Denis Diderot, l'édition de l'*Encyclopédie* et pour avoir, le premier, introduit une équation aux dérivées partielles dans le cadre de la théorie des cordes vibrantes.

mènes acoustiques courants sont en effet linéaires c'est-à-dire qu'on considère que :

- les effets sont proportionnels aux causes ;
- le principe de superposition est d'application.

Il existe pourtant un certain nombre de phénomènes où la propagation des ondes sonores se fait de manière **non linéaire**. C'est notamment le cas dans les situations énumérées ci-après.

1. Lorsque l'amplitude de la variation de pression devient importante par rapport à la pression de référence on ne peut plus négliger les produits de perturbation et l'équation ne peut plus être linéarisée. Ceci se produit notamment dans les cas suivants :
 - Le champ sonore émis à proximité du réacteur d'un lanceur spatial est assez intense pour que des effets non linéaires soient observés.
 - Les ultrasons de puissance sont utilisés dans un grand nombre de processus industriels et les niveaux sont souvent assez intenses pour mettre en jeu des effets non linéaires. C'est notamment le cas des processus utilisant les ultrasons pour induire de la cavitation dans le fluide (sonochimie, cautérisation).
 - Le mur du son ou bang sonique est le résultat d'une accumulation de perturbations de nature acoustique mais en un nombre tel que le phénomène devient fortement non linéaire.
 - Les ultrasons peuvent être utilisés en médecine pour détruire des caillots sanguins obstruant des artères ou des calculs bloquant le fonctionnement d'un rein ou de la vessie (*lithotripsie*) ; cette technique fait appel, bien entendu, à des effets non linéaires.
2. Lorsque les propriétés du milieu traversé changent en fonction du niveau de pression, la célérité c devient dépendante de la pression p ce qui rend l'équation non linéaire. C'est par exemple le cas lorsque le fluide cavite sous l'effet des ultrasons : la masse volumique du fluide et la vitesse du son dépendent alors du taux de cavitation c'est-à-dire de la fraction gazeuse locale qui, elle-même, dépend de l'intensité du champ sonore.
3. Lorsque l'amplitude de la source de bruit dépend elle-même du champ sonore engendré (*feedback*). C'est notamment le cas dans le bruit de combustion où l'amplitude de la source est influencée par le champ sonore engendré.

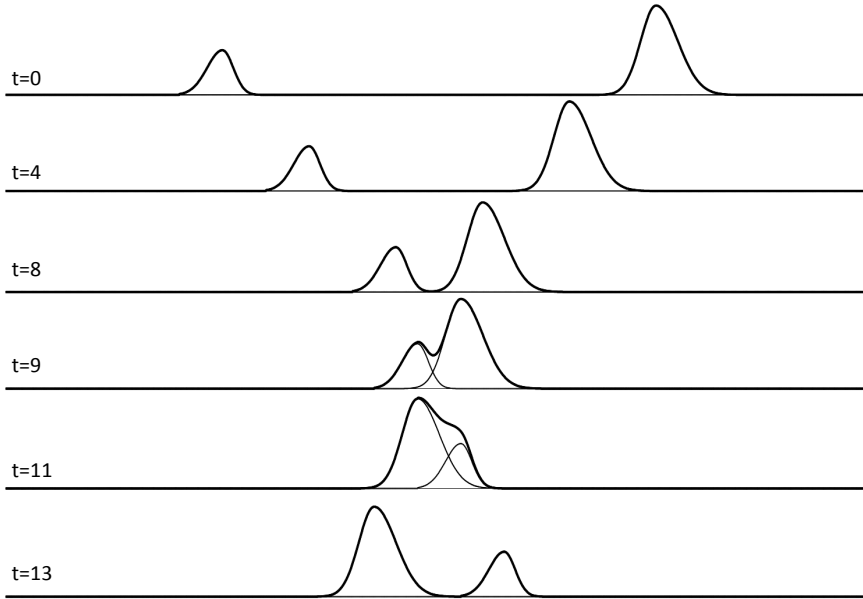


Figure 4.2: La solution générale de l'équation d'onde comprend deux termes représentant deux perturbations se propageant en sens inverse à la vitesse c .

4.3 Solution générale à une dimension

L'équation d'onde à une dimension s'écrit, en abandonnant temporairement la notation indicelle :

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.30)$$

On démontre aisément que toute fonction de la forme :

$$p(x, t) = p^+ \left(t - \frac{x}{c} \right) + p^- \left(t + \frac{x}{c} \right) \quad (4.31)$$

est solution de cette équation. Cette solution générale est la somme de deux termes (figures 4.2 et 4.3). Le premier représente une distribution de pression

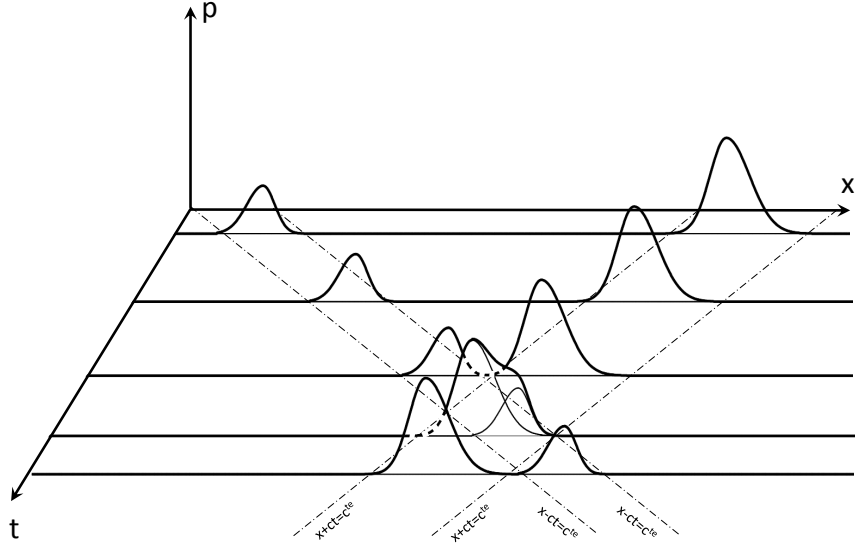


Figure 4.3: La solution générale de l'équation d'onde comprend deux termes représentant deux perturbations se propageant en sens inverse à la vitesse c (représentation alternative).

se propageant, sans se déformer, de la gauche vers la droite, à la vitesse c . On constate en effet que la fonction $p^+ \left(t - \frac{x}{c} \right)$ prend la même valeur aux points de coordonnées x et $x + \Delta$ mais avec un retard Δ/c :

$$p^+ \left(t - \frac{x}{c} \right) = p^+ \left(\left(t + \frac{\Delta}{c} \right) - \frac{x + \Delta}{c} \right) \quad (4.32)$$

Le second terme correspond à une distribution de pression se propageant de la droite vers la gauche à la même vitesse c sans se déformer :

$$p^- \left(t + \frac{x}{c} \right) = p^- \left(\left(t + \frac{\Delta}{c} \right) + \frac{x - \Delta}{c} \right) \quad (4.33)$$

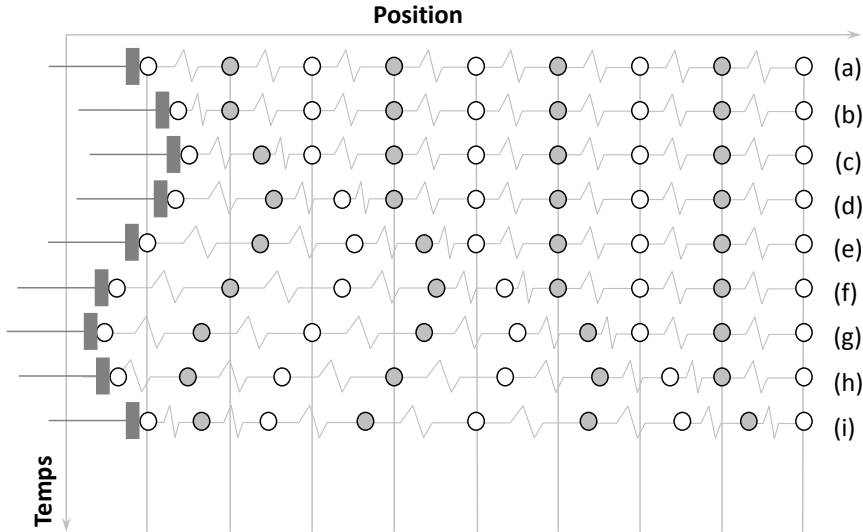


Figure 4.4: Evolution de la position de particules d'air dans un tube excité par un piston vibrant.

4.4 Mécanique de la propagation

Le schéma de la figure 4.4 montre la position d'un ensemble de particules d'air situées le long de l'axe d'un tube infini à droite et fermé à gauche par un piston subissant un mouvement horizontal sinusoïdal. Chaque **ligne** correspond à la position des particules d'air à un instant donné, chaque **colonne** montre la position d'une des particules à différents instants. Alternativement on peut considérer que chaque cercle représente une petite masse, toutes ces masses étant connectées entre elles par des ressorts. La rigidité du *ressort* traduit la compressibilité de l'air : si l'air était incompressible, la rigidité serait infinie, si l'air était parfaitement compressible c'est-à-dire ne résistait en aucune manière à la compression, la rigidité serait nulle. Dans cette analogie, la pression peut être assimilée à la force nette exercée par les ressorts sur chaque masse.

1. La première ligne (a) donne la position initiale des particules avant que le piston ne se mette en mouvement.

2. Quand il commence à bouger (b), il entraîne dans son mouvement la première masse et le ressort situé entre les masses 1 et 2 se comprime. La deuxième masse ne bouge toutefois pas encore ; elle en est empêchée par son inertie et par la capacité du ressort à stocker l'énergie transmise par la première masse.
3. En (c), le piston et la masse 1 ont atteint leur déplacement maximum et la deuxième masse a vaincu son inertie et s'est mise en branle. Elle n'a cependant pas encore transmis son mouvement à la troisième masse : l'énergie transmise par la deuxième masse est stockée dans le deuxième ressort.
4. En (d) le piston commence à faire machine arrière. La première masse le suit mais la deuxième, sous l'effet de son inertie, continue son mouvement vers la droite. Le ressort entre les masses 1 et 2 est sollicité en traction. La masse 3 s'est mise en mouvement, la masse 4 est toujours au repos.
5. Ainsi de proche en proche, chaque masse réagit au déplacement du piston avec un temps de retard et la perturbation qu'il provoque se déplace de gauche à droite avec une vitesse finie dont la valeur est déterminée à la fois par la compressibilité du milieu traversé (rigidité des ressorts) et par sa masse volumique.

Si on regarde le déplacement de chaque masse au fil du temps Figure 4.5, on constate que la première masse suit le mouvement du piston, supposé ici sinusoïdal de période T , et que les autres masses suivent la même variation mais décalée dans le temps. Si les masses sont séparées d'une distance Δx et que la deuxième masse ne se met en mouvement qu'après un temps Δt , on peut dire que la perturbation se propage à une vitesse :

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.34)$$

Il faut insister sur le fait que c est la vitesse de propagation de la *perturbation* et **pas** la vitesse à laquelle les masses oscillent autour de leur position d'équilibre.

Si on regarde la position des différentes masses à un instant donné, on constate que leur déplacement suit une variation sinusoïdale. Pour mieux visualiser cet effet on a porté le déplacement horizontal des masses sur une échelle verticale Figure 4.6. À la périodicité temporelle imposée par le cycle du piston (période

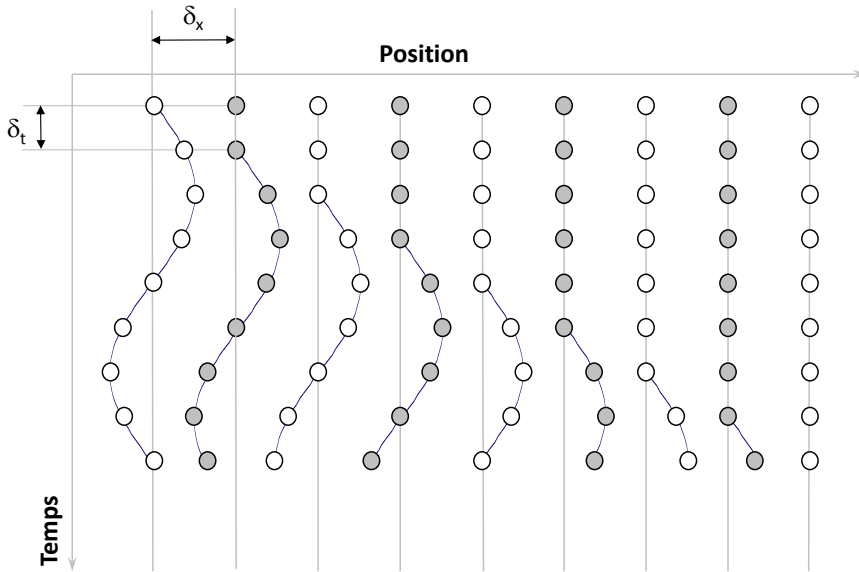


Figure 4.5: Mise en évidence du déphasage.

T) correspond une périodicité spatiale caractérisée par la longueur d'onde λ . Longueur d'onde, période et vitesse de propagation de la perturbation sont liées par la relation :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} \quad (4.35)$$

ou encore :

$$c = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \quad (4.36)$$

Dans l'air à 15°C on trouve les longueurs d'onde caractéristiques suivantes :

- à 100 Hz : $\lambda = 3.4$ m ;
- à 500 Hz : $\lambda = 0.68$ m ;
- à 1 000 Hz : $\lambda = 0.34$ m ;
- à 5 000 Hz : $\lambda = 0.07$ m.

La longueur d'onde est de 10 cm à 3 400 Hz ; elle est de 1 m à 340 Hz.

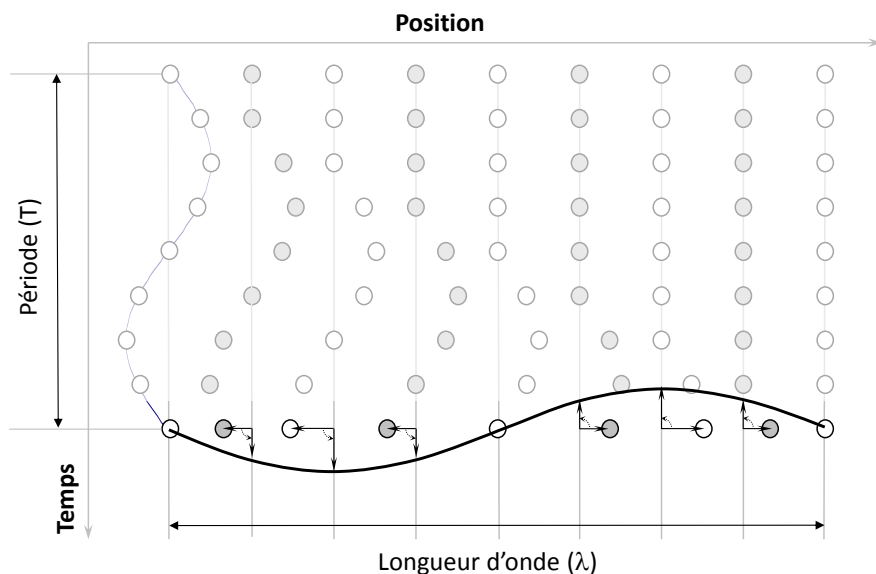


Figure 4.6: Mise en évidence de la période et de la longueur d'onde.

Propagations dispersive et non dispersive

4.5

4.5.1 Équation d'onde générale

L'équation d'onde obtenue plus haut n'est qu'un cas particulier d'une classe importante d'équations aux dérivées partielles linéaires appelées équations d'ondes :

$$\alpha \frac{\partial^n f}{\partial t^n} + \beta \nabla^m f = 0 \quad (4.37)$$

Soit si on ne considère qu'une seule dimension d'espace x :

$$\alpha \frac{\partial^n f}{\partial t^n} + \beta \frac{\partial^m f}{\partial x^m} = 0 \quad (4.38)$$

Plusieurs cas particuliers intéressants de cette équation apparaissent en physique, notamment :

- l'équation de d'Alembert qui gouverne la vibration des cordes ou la propagation des ondes sonores ($n = 2$, $m = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = -\gamma^2$) :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (4.39)$$

- l'équation gouvernant les vibrations de flexion d'une poutre de rigidité flexionnelle D et de masse par unité de longueur M ($n = 2$, $m = 4$, $\alpha = M$, $\beta = D$) :

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.40)$$

- l'équation de Schrödinger qui gouverne en mécanique quantique l'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde ψ du système considéré ($n = 1$, $m = 2$, $\alpha = i\hbar$, $\beta = \frac{\hbar^2}{2M}$) :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (4.41)$$

La fonction :

$$w(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.42)$$

où k est appelé le nombre d'onde et ω la pulsation, est une solution de cette équation d'onde généralisée à condition que la relation ci-dessous, appelée *relation de dispersion*, soit vérifiée :

$$\alpha(-i\omega)^n + \beta(ik)^m = 0 \quad (4.43)$$

La fonction w présente une périodicité spatiale et temporelle. En effet, si on considère la distribution de w à un instant donné t_0 , on constate que :

$$w(x, t_0) = w\left(x + \frac{2\pi}{k}, t_0\right) \quad (4.44)$$

on appelle cette périodicité spatiale la *longueur d'onde* et on la note λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \leftrightarrow k\lambda = 2\pi \quad (4.45)$$

De même, si on considère l'évolution temporelle de w en un point donné de coordonnée x_0 , on constate que :

$$w(x_0, t) = w\left(x_0, t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \quad (4.46)$$

on appelle cette périodicité temporelle la *période* et on la note T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \leftrightarrow \omega T = 2\pi \quad (4.47)$$

La fréquence f est par définition l'inverse de la période T :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (4.48)$$

Enfin, on observe que :

$$w\left(x + \frac{\omega}{k}\Delta t, t + \Delta t\right) = w(x, t) \quad (4.49)$$

Ce qui montre que w représente un signal se propageant à une vitesse c définie par :

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \quad (4.50)$$

4.5.2 Propagation non dispersive

Reprenons l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (4.51)$$

Pour laquelle la relation de dispersion prend la forme :

$$-\omega^2 + k^2 \gamma^2 = 0 \leftrightarrow k = \frac{\omega}{\gamma} \quad (4.52)$$

La vitesse de propagation des ondes est donc constante et précisément égale à la constante γ apparaissant dans l'équation :

$$c = \frac{\omega}{k} = \gamma \quad (4.53)$$

Lorsque la vitesse de propagation des ondes est indépendante de k (ou, ce qui revient au même, de ω), on parle de *propagation non dispersive*.

4.5.3 Propagation dispersive

Reprenons l'équation décrivant les vibrations de flexion dans une poutre :

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.54)$$

Pour laquelle la relation de dispersion prend la forme :

$$-M\omega^2 + Dk^4 = 0 \leftrightarrow k = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{M}{D}}} \quad (4.55)$$

La vitesse de propagation des ondes est donnée par :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{D}{M}}} \quad (4.56)$$

Lorsque la vitesse de propagation des ondes dépend du nombre d'onde ou de la pulsation, on parle de *propagation dispersive*.

4.5.4 Paquet d'onde et vitesse de groupe

Un paquet d'onde est une combinaison linéaire d'ondes dont le nombre d'onde appartient à un intervalle restreint centré sur une valeur k_0 :

$$\psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (4.57)$$

Une telle onde n'a de valeur significativement non nulle que dans un intervalle Δx qui est inversement proportionnel à Δk . On peut donc y associer une localisation spatiale, d'où son importance, notamment en mécanique quantique. Si la phase $(kx - \omega t)$ varie rapidement, les différentes ondes constituant

le paquet interfèrent de manière destructive et l'amplitude de l'onde résultante est faible. En revanche, si la phase varie faiblement, les ondes interfèrent de manière constructive et l'onde résultante a une amplitude importante. L'amplitude maximale d'un paquet d'onde apparaît donc lorsque la phase est stationnaire soit lorsque :

$$\frac{d(kx - \omega(k)t)}{dk} = 0 \quad (4.58)$$

c'est-à-dire si :

$$x = \frac{d\omega(k)}{dk} t \quad (4.59)$$

Le paquet d'onde se déplace donc globalement avec une vitesse, dite *vitesse de groupe* v_g , donnée par :

$$v_g = \left| \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=k_0} \quad (4.60)$$

Si la propagation est non dispersive, comme en acoustique, le paquet d'onde se déplace sans se déformer car chaque composante avance à la même vitesse ; la vitesse de groupe et la vitesse de propagation sont alors égales. Si au contraire la propagation est dispersive, le paquet d'onde se déforme et la vitesse de groupe n'est pas égale à la vitesse des composantes individuelles. Dans le cas des vibrations de flexion d'une poutre par exemple on a :

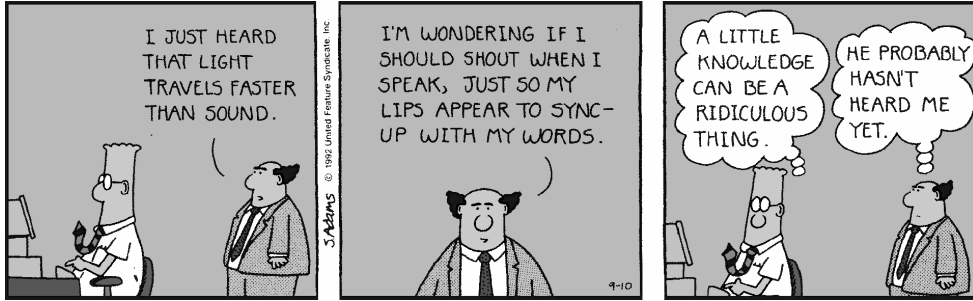
$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{D}{M}} \quad (4.61)$$

et donc :

$$v_g = 2k_0 \sqrt{\frac{D}{M}} \quad (4.62)$$

4.6 Vitesse du son

*Vous me donnez le tournis à m'expédier comme ça Leigh Hunt et la Vulgate à la **vitesse du son** ! Vous ne vous en êtes probablement pas rendu compte, mais ça fait à peine plus de deux ans que je*



DILBERT © 1992 Scott Adams. Used by permission of UNIVERSAL UCLICK. All rights reserved.

Figure 4.7: Vitesse du son et vitesse de la lumière.

vous les ai commandés.

Helen Hanff (1916-1996) *in* 84, Charing Cross Road (1969).

4.6.1 Gaz parfaits

La vitesse du son dans un gaz parfait peut se déduire des relations thermodynamiques applicables à ce type de milieu. Pour un gaz parfait subissant une transformation adiabatique $(p, \rho) \rightarrow (p_0, \rho_0)$ on a :

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad (4.63)$$

où γ est le rapport entre les chaleurs spécifiques à pression et volume constants (c_p et c_v). La vitesse du son est donc, par application de 4.9 :

$$c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_0} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (4.64)$$

mais comme par ailleurs ($R = c_p - c_v$) :

$$p_0 = \rho_0 R T \quad (4.65)$$

On trouve :

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad (4.66)$$

La dépendance de la vitesse du son par rapport à la température peut être négligée dans de très nombreuses applications mais des exceptions importantes existent, par exemple :

- réfraction des ondes sonores dans l'atmosphère due au gradient thermique vertical (voir le chapitre 16) ;
- propagation des ondes sonores dans des systèmes d'échappement où les gaz passent de 700 °C ($c=625$ m/s) à la sortie des cylindres à quelques dizaines de degré, disons 60 °C ($c=366$ m/s) à l'échappement proprement dit.

La relation vitesse du son - température peut être linéarisée pour fournir une règle de calcul simple dans un domaine de température proche des températures ambiantes (de -50 °C à +50 °C, voir la figure 4.8) :

$$c \simeq 331.3 + 0.6 \cdot t \quad (4.67)$$

où t est la température en degrés centigrades. La vitesse du son est donnée ci-dessous pour quelques autres milieux :

- vapeur d'eau : 402 m/s ;
- hélium : 970 m/s ;
- hydrogène à 0° : 1270 m/s.

4.6.2 Liquides

Pour les liquides, la vitesse du son s'exprime en fonction du module de compressibilité adiabatique κ_s (relation de Newton-Laplace) :

$$c = \sqrt{\frac{\kappa_s}{\rho}} \quad (4.68)$$

La loi empirique suivante donne la vitesse du son dans l'eau :

$$c = 1407 + 4 \cdot t + 1.6 \cdot 10^{-6} \cdot p \quad (4.69)$$

où t est la température en degrés centigrades et p la pression hydrostatique en Pa ; on retiendra l'ordre de grandeur de 1 500 m/s. Pour la propagation

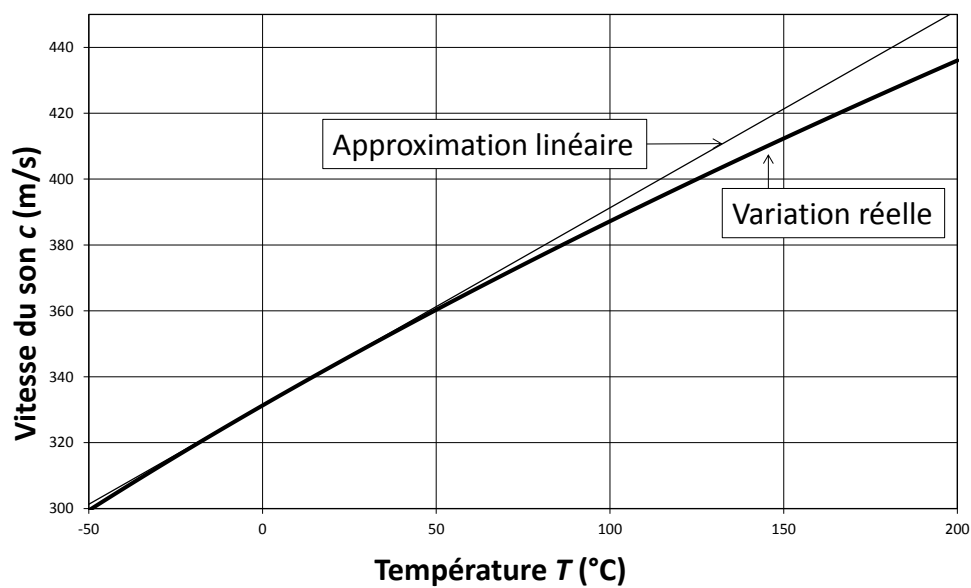


Figure 4.8: Variation de la vitesse du son dans l'air avec la température : la courbe en trait gras donne la variation réelle, la droite en trait fin l'approximation linéaire valable aux températures climatiques usuelles (Equation 4.67).

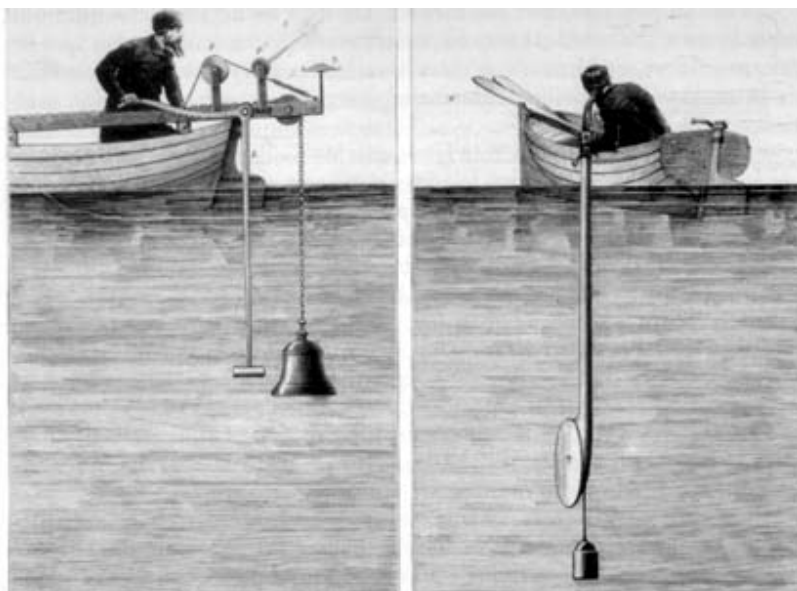


Figure 4.9: En 1828, dans les eaux du lac Léman, Jean-Daniel Colladon et Charles Sturm mesurent, pour la première fois, la vitesse du son dans l'eau. Charles Sturm, né à Genève en 1803 et mort à Paris en 1855, est notamment connu pour les *suites* qui portent son nom et pour la théorie dite de *Sturm-Liouville*.

océanique on doit prendre en compte la température t (en degrés Celsius), la salinité s (en ppm) et la profondeur z (en mètres) ; la formule de Mackenzie⁶ donne :

$$\begin{aligned}
 c(t, s, z) = & a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 + a_5 (s - 35) \\
 & + a_6 z + a_7 z^2 + a_8 t(s - 35) + a_9 t z^3
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

avec $a_1 = 1448.96$, $a_2 = 4.591$, $a_3 = -5.304 \cdot 10^{-2}$, $a_4 = 2.374 \cdot 10^{-4}$, $a_5 = 1.340$, $a_6 = 1.630 \cdot 10^{-2}$, $a_7 = 1.675 \cdot 10^{-7}$, $a_8 = -1.025 \cdot 10^{-2}$, $a_9 = -7.139 \cdot 10^{-13}$.

6. **Mackenzie, K. V.** (1981), *Discussion of sea-water sound-speed determinations*, Journal of the Acoustical Society of America, 70 (3), pp. 801-806.

4.6.3 Solides

La vitesse de propagation des ondes de **compression** dans un solide unidimensionnel (une barre) est donnée par :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.71)$$

où E est le module d'Young du matériau. On trouve par exemple, pour l'acier ($E=2.1 \cdot 10^{11}$ N/m² et $\rho=7\,820$ kg/m³) une vitesse de 5 182 m/s. D'autres valeurs sont :

- caoutchouc souple : 70 m/s ;
- béton : 3 000 m/s ;
- verre : 5 000 m/s.

Pour les solides tri-dimensionnels, il convient de prendre en compte l'effet du cisaillement :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (4.72)$$

D'autres types d'ondes élastiques peuvent exister et se propager dans les solides ; elles sont caractérisées par d'autres vitesses de propagation. Citons par exemple les ondes de flexion dans les plaques dont la vitesse de propagation est donnée par :

$$c_{flexion} = \sqrt{\omega h \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}}} \quad (4.73)$$

où ω est la pulsation ($\omega = 2\pi f$), ν le coefficient de Poisson et h l'épaisseur. Les ondes de pression se propagent donc de manière non dispersive alors que les ondes de flexion, elles, sont caractérisées par une propagation dispersive.

4.7 Synthèse du chapitre

Dans un fluide :

- non visqueux ;

- barotrope, c'est-à-dire où la pression ne dépend que de la masse spécifique ;
- globalement au repos ;
- où on considère de petites variations des grandeurs dynamiques autour d'une valeur de référence constante dans le temps et dans l'espace

on démontre que :

- la fluctuation de pression obéit à une équation d'onde ;
- la fluctuation de masse volumique est proportionnelle à la fluctuation de pression ;
- l'accélération des particules de fluide est proportionnelle au gradient de pression.

Une solution générale du cas unidimensionnel peut être trouvée, elle correspond à la superposition de deux ondes, l'une se propageant de gauche à droite et l'autre de droite à gauche, toutes deux progressant à la même célérité c qui peut être calculée, pour un gaz en tout cas, à partir des paramètres thermodynamiques fondamentaux du milieu.

5

ANALYSE DE FOURIER

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.

Joseph Fourier (1768-1830) *in* Discours préliminaire à la théorie analytique de la chaleur (1822).

Contents

5.1	Combinaison de signaux simples	61
5.2	Séries de Fourier	73
5.3	Transformée de Fourier	83
5.4	Produit de convolution	91
5.5	Synthèse du chapitre	95



Figure 5.1: Portrait de Joseph Fourier dessiné par Julien Léopold Boilly et gravé par Amédée Félix Barthélemy Geille *in* Portraits et Histoire des Hommes Utiles, Collection de Cinquante Portraits, Société Montyon et Franklin, 1839-1840.

Nous avons vu au chapitre 2 qu'un son est une petite variation de la pression et, au chapitre 4, que cette fluctuation de pression obéit à une équation d'onde. Un son est donc décrit, en un point donné, par la variation de la pression dans le temps : $p(t)$. Cette description *temporelle* du phénomène sonore peut être complétée par une description *spectrale* ou *fréquentielle*. Ce chapitre rassemble un certain nombre de résultats importants relatifs à l'analyse de Fourier¹. Avant d'introduire cet outil mathématique, considérons d'abord le problème de la composition de plusieurs signaux sinusoïdaux simples.

1. Le physicien français Jean-Baptiste **Joseph Fourier** Figure 5.1, né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris, s'est intéressé à de nombreux problèmes mais est surtout connu pour sa participation à la campagne d'Égypte de Napoléon Bonaparte en 1798 et pour son mémoire sur la chaleur présenté à l'Académie des Sciences en 1807. C'est dans ce mémoire qu'il introduit pour la première fois les séries trigonométriques qui portent son nom ; elles ont donc été introduites, paradoxalement, dans un contexte *statique* et non, comme on aurait pu le penser, *harmonique*. Il est aussi le premier à avoir élucidé le mécanisme de l'effet de serre atmosphérique.

5.1 Combinaison de signaux simples

5.1.1 Signaux de même fréquence

Soient deux signaux monochromatiques² de même fréquence :

$$p_a(t) = P_a \cos(\phi_a + \omega t) \quad (5.1)$$

$$p_b(t) = P_b \cos(\phi_b + \omega t) \quad (5.2)$$

On cherche les propriétés du signal combiné

$$p_c(t) = p_a(t) + p_b(t) \quad (5.3)$$

Explicitons p_a et p_b :

$$p_c(t) = P_a \cos(\phi_a + \omega t) + P_b \cos(\phi_b + \omega t) \quad (5.4)$$

Appliquons les formules de Simpson (voir le rappel des principales formules trigonométriques au chapitre ??) :

$$\begin{aligned} p_c(t) = P_a \cos(\phi_a) \cos(\omega t) &- P_a \sin(\phi_a) \sin(\omega t) + \\ P_b \cos(\phi_b) \cos(\omega t) &- P_b \sin(\phi_b) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

On peut écrire les coefficients de $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ sous la forme :

$$P_a \cos(\phi_a) + P_b \cos(\phi_b) \doteq P_c \cos(\phi_c) \quad (5.6)$$

$$P_a \sin(\phi_a) + P_b \sin(\phi_b) \doteq P_c \sin(\phi_c) \quad (5.7)$$

de telle sorte que :

$$p_c(t) = P_c \cos(\phi_c + \omega t) \quad (5.8)$$

2. Chromatique : du grec *χρωματισ* : couleur. Cette terminologie a été introduite, à l'origine en optique, pour désigner une lumière composée d'une couleur unique, et dont le spectre est donc constitué d'une seule fréquence. Il s'est ensuite étendu à toutes les disciplines où s'observent des phénomènes harmoniques.

La somme de deux signaux monochromatiques de pulsation ω est donc un autre signal monochromatique de même pulsation. L'amplitude P_c du signal combiné peut être obtenue en sommant le carré des équations 5.6 et 5.7 :

$$P_c^2 = P_a^2 + P_b^2 + 2P_aP_b \cos(\phi_a - \phi_b) \quad (5.9)$$

Pour trouver la phase ϕ_c du signal combiné, prenons le rapport de ces deux mêmes équations :

$$\tan(\phi_c) = \frac{P_a \cos(\phi_a) + P_b \cos(\phi_b)}{P_a \sin(\phi_a) + P_b \sin(\phi_b)} \quad (5.10)$$

L'amplitude du signal combiné varie avec la différence de phase (voir les figures 5.2 et 5.3). Elle est maximale lorsque $\phi_a - \phi_b = 0$ et vaut alors :

$$P_c = P_a + P_b \quad (5.11)$$

Elle est minimale pour $\phi_a - \phi_b = \pi$ où :

$$P_c = P_a - P_b \quad (5.12)$$

On parle d'interférence constructive dans le premier cas et d'interférence destructive Figure 5.3 dans le second cas. On constate encore que la valeur moyenne de P_c pour tous les déphasages possibles est :

$$\langle P_c^2 \rangle = P_a^2 + P_b^2 \quad (5.13)$$

Dans le cas particulier où $P_a = P_b$ et $\phi_a - \phi_b = \pi$ on a un champ résultant nul. Le contrôle actif du bruit utilise cette propriété : au champ acoustique qu'on souhaite contrôler on ajoute un champ secondaire qui est, dans une zone donnée et pour des fréquences données, égal en amplitude et opposé en phase. Les figures 5.4 et 5.5 montrent l'application du principe de contrôle actif à un casque audio et au compartiment passager d'une voiture.

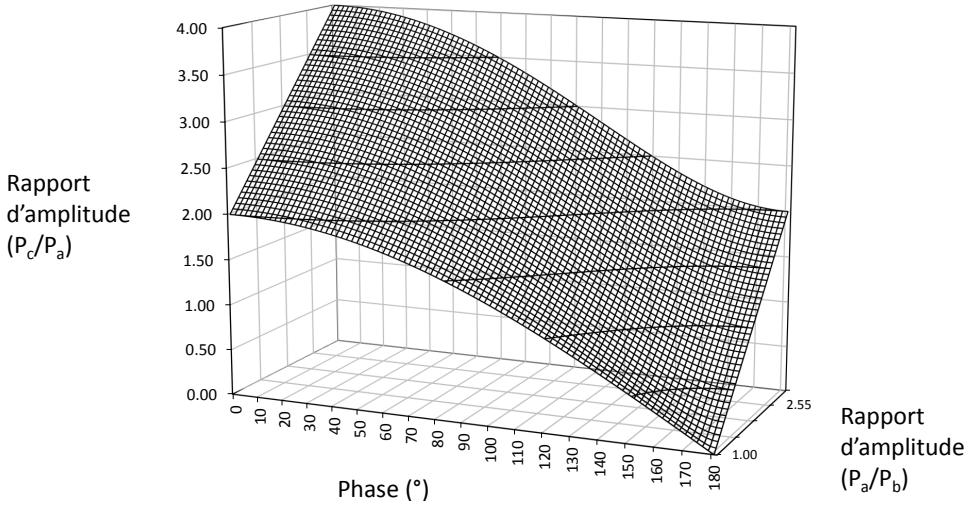


Figure 5.2: On combine un son A d'amplitude unitaire à un son B dont l'amplitude varie de 1 à 3 ; la différence de phase peut varier de 0 à 180°. Le diagramme donne l'amplitude du signal combiné.

5.1.2 Signaux de fréquences différentes

Deux signaux monochromatiques de fréquences différentes f_1 et f_2 ne se combinent en un signal périodique que si leurs fréquences sont dans un rapport rationnel c'est-à-dire si :

$$\exists (m, n) \in \mathbb{N} \mid \frac{m}{f_1} = \frac{n}{f_2} \doteq T_0 = \frac{1}{f_0} \quad (5.14)$$

Dans ce cas en effet n périodes du signal 2 correspondent exactement à m périodes du signal 1 (figure 5.7, graphe du haut). Si m et n sont les plus petits entiers répondant à la condition ci-dessus, alors T_0 désigne la période du signal résultant et f_0 sa fréquence fondamentale. Si le rapport des fréquences est, en revanche, irrationnel, le signal combiné est apériodique (figure 5.7, graphe du bas).

Par généralisation, le signal $p(t)$ résultant de la combinaison de n signaux monochromatiques dont les fréquences sont toutes multiples d'une même fré-

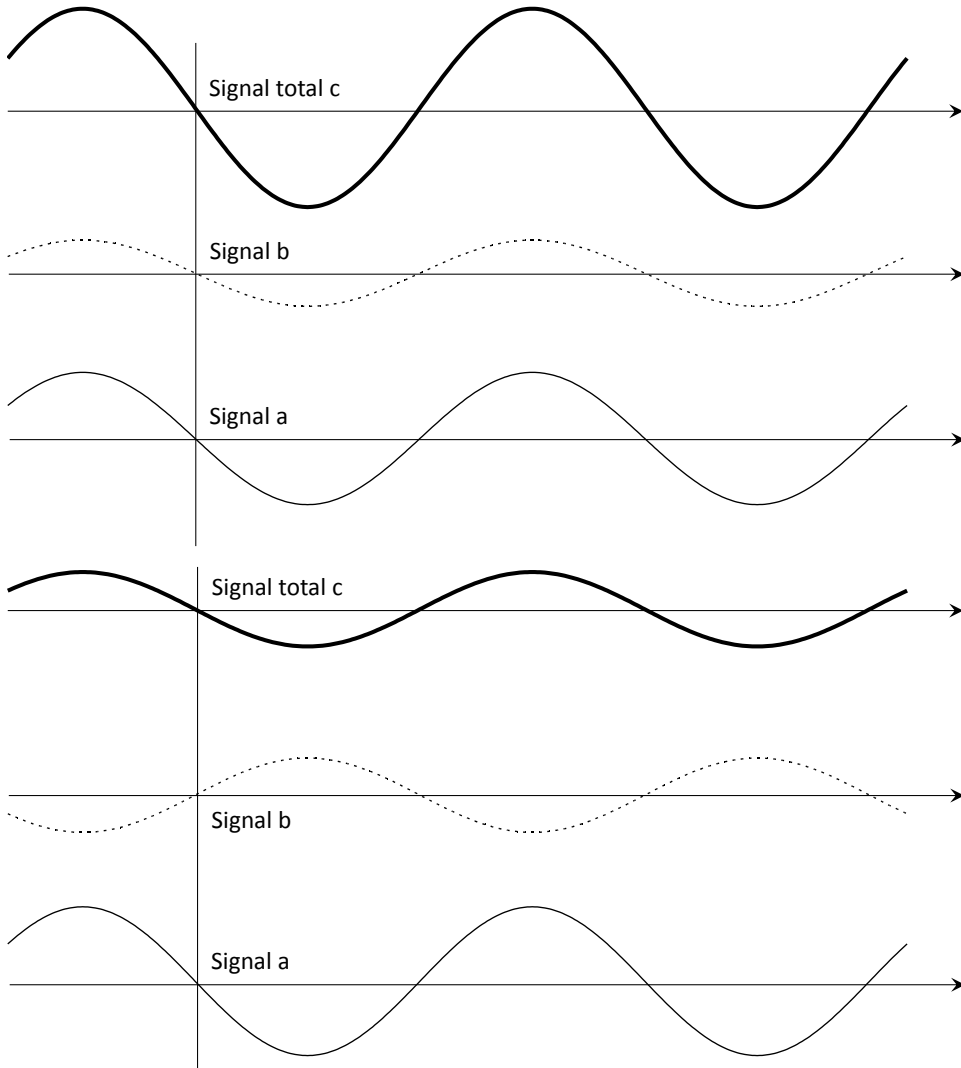


Figure 5.3: Combinaison de deux signaux monochromatiques de mêmes fréquences : interférence constructive (graphe du dessus) et destructive (graphe du dessous).

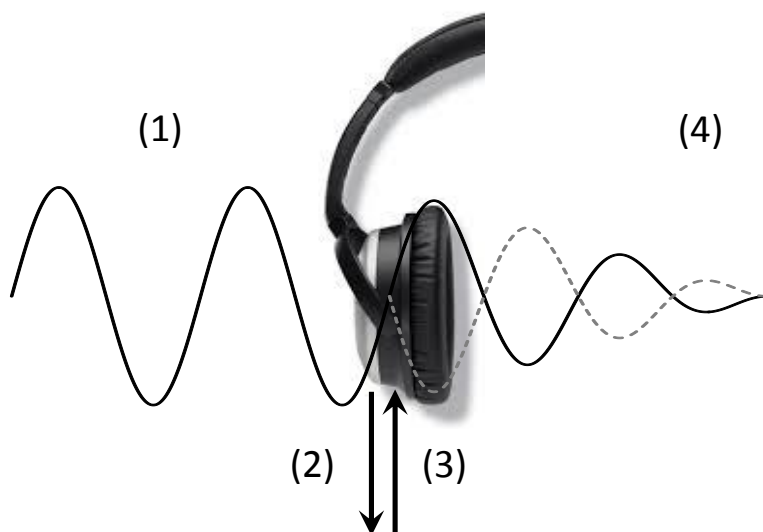
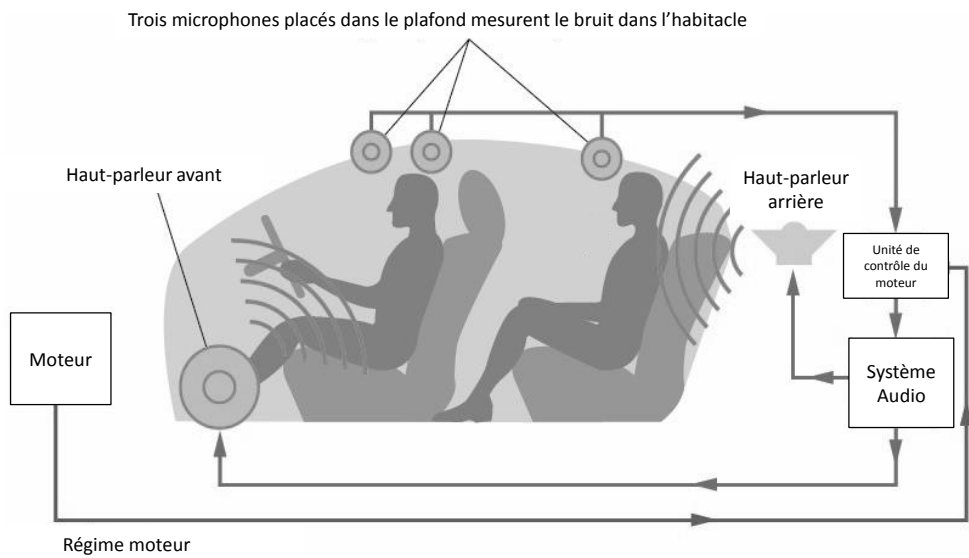


Figure 5.4: Principe de fonctionnement d'un casque audio à contrôle actif : le champ acoustique primaire (traits pleins) pénètre à l'intérieur du casque (1). Il est mesuré par un microphone (2) et traité par un système électronique qui génère (3) un signal inversé (champ secondaire en traits interrompus). Les champs primaire et secondaire (4) s'annulent mutuellement.



Basé sur un schéma original publié dans © GM Techlink.

Figure 5.5: Principe de fonctionnement d'un système de contrôle actif du bruit dans une voiture.



DILBERT © 2003 Scott Adams. Used By permission of UNIVERSAL UCLICK. All rights reserved.

Figure 5.6: Le contrôle actif selon Dilbert.

quence *fondamentale* f_0 :

$$p(t) = \sum_{i=1,n} P_i \cos(\phi_i + 2i\pi f_0 t) \quad (5.15)$$

est périodique de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Les figures 5.8 et 5.9 présentent une telle combinaison d'un fondamental et de ses harmoniques. La figure 5.10 montre que le déphasage des différentes composantes altère le signal mais pas sa période et que l'absence du fondamental ne change pas non plus la périodicité car $2f_0$ et $3f_0$ sont des multiples entiers de f_0 alors qu'ils ne sont pas des multiples entiers l'un de l'autre ; la fréquence fondamentale n'est donc *pas nécessairement* la fréquence la plus basse du spectre d'un signal périodique.

Puisque la combinaison de signaux dont la fréquence est multiple d'un fondamental f_0 est un signal caractérisé par la période T_0 , l'inverse est également vrai : tout signal de période T_0 peut être décrit comme la combinaison linéaire d'un nombre fini ou infini de signaux monochromatiques dont les fréquences sont multiples de $f_0 = \frac{1}{T_0}$. L'extraction de ces composantes du signal composite est l'objet du paragraphe suivant.

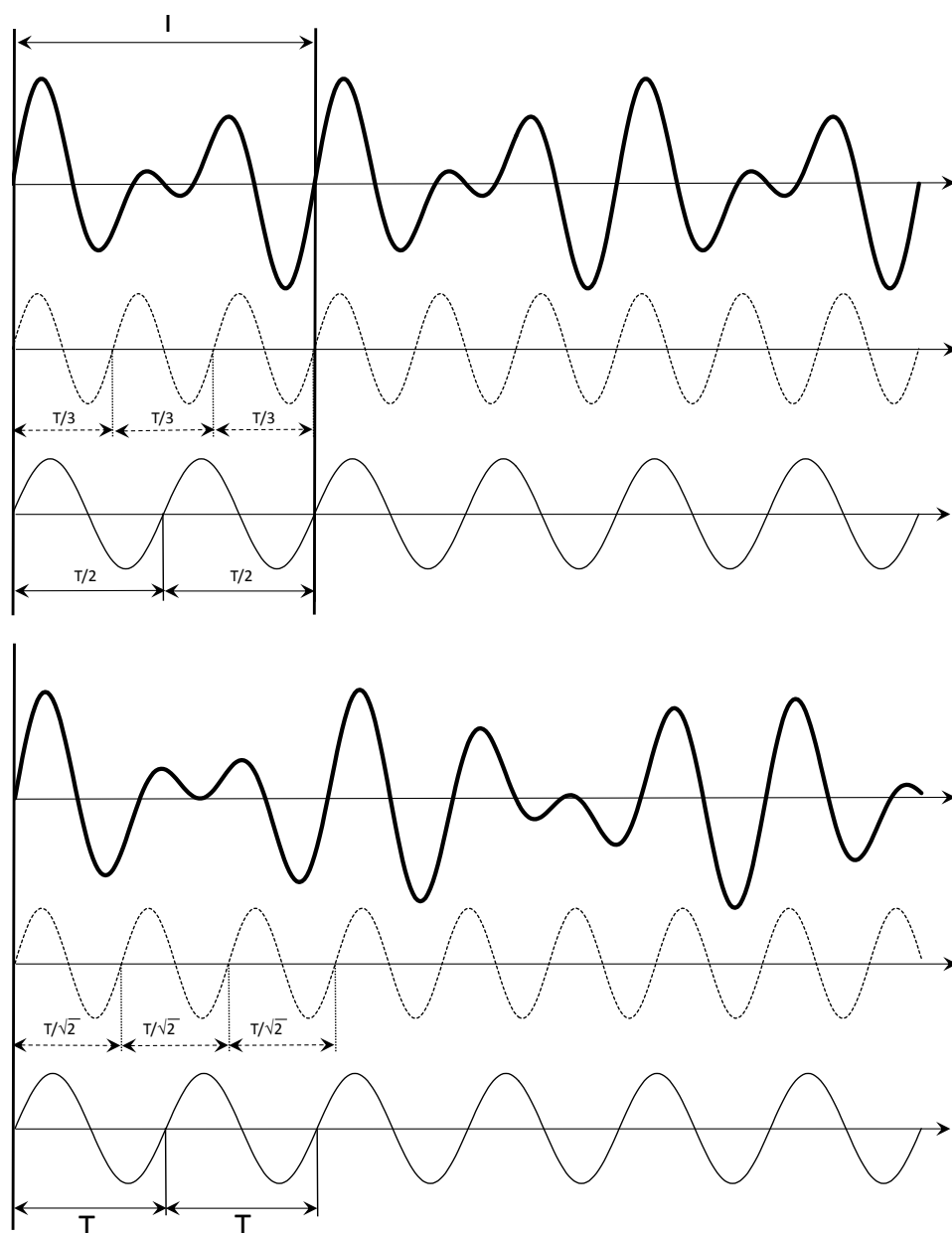


Figure 5.7: Figure du haut : la combinaison de deux signaux monochromatiques dont les fréquences sont dans un rapport entier (ici $\frac{3}{2}$) engendre un signal périodique. Figure du bas : la combinaison de deux signaux monochromatiques dont les fréquences sont dans un rapport non rationnel (ici $\sqrt{2}$) engendre un signal non périodique.

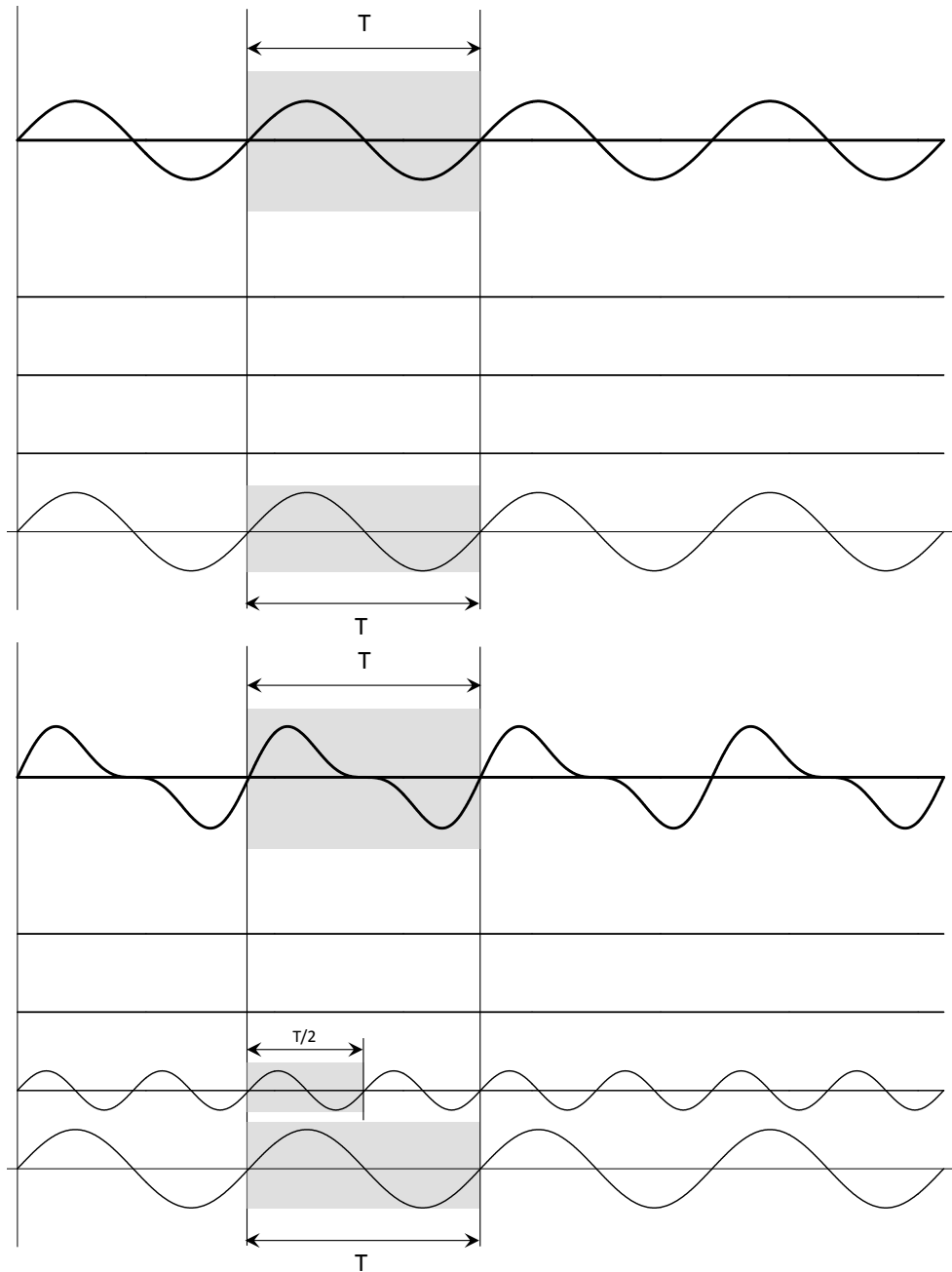


Figure 5.8: Combinaison de signaux de fréquences multiples d'un même fondamental. Graphe du haut : fondamental seul. Graphe du bas : fondamental et premier harmonique.

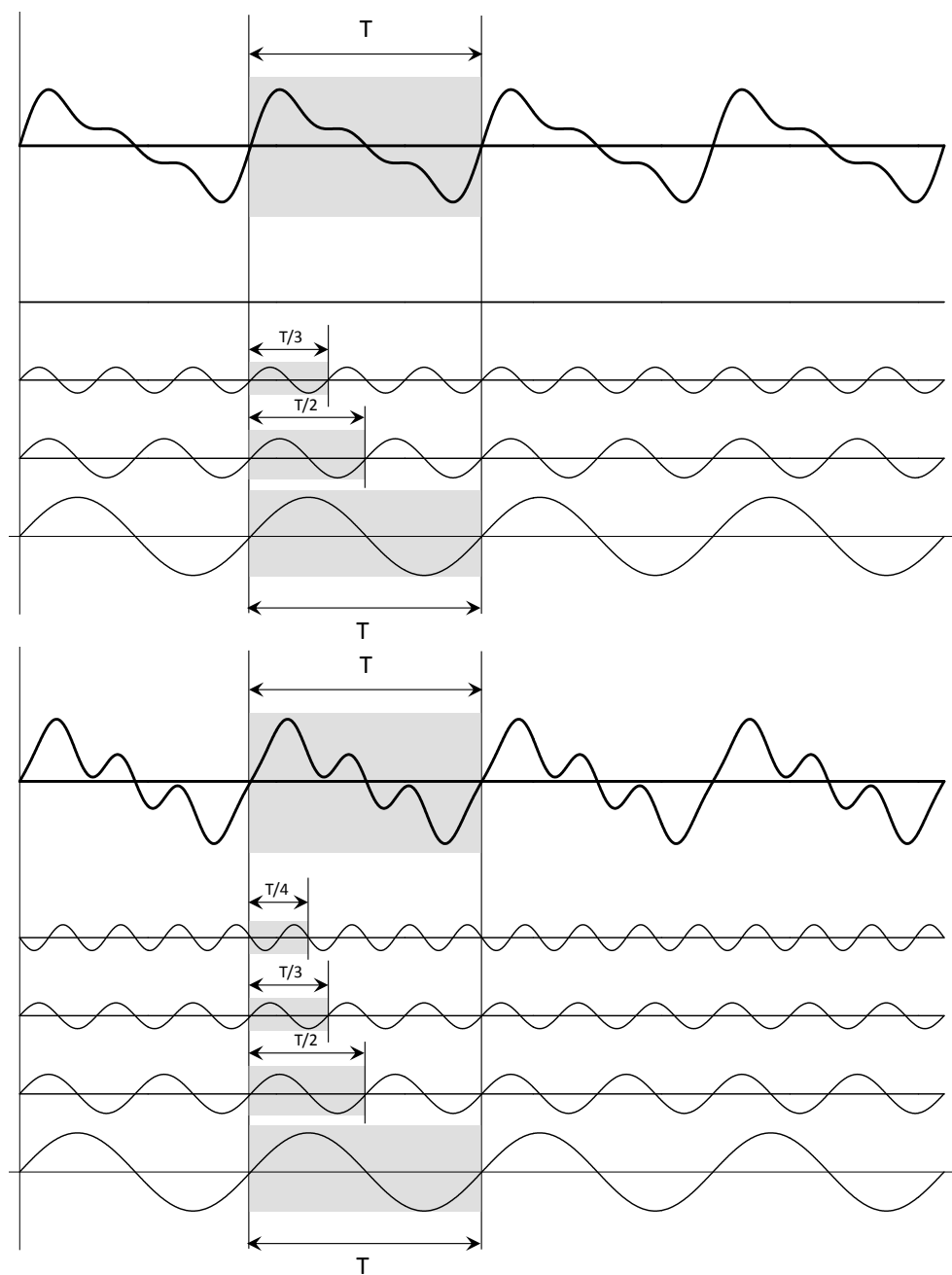


Figure 5.9: Combinaison de signaux de fréquences multiples d'un même fondamental. Graphe du haut : fondamental et harmoniques 1 et 2. Graphe du bas : fondamental et harmoniques 1 à 3.

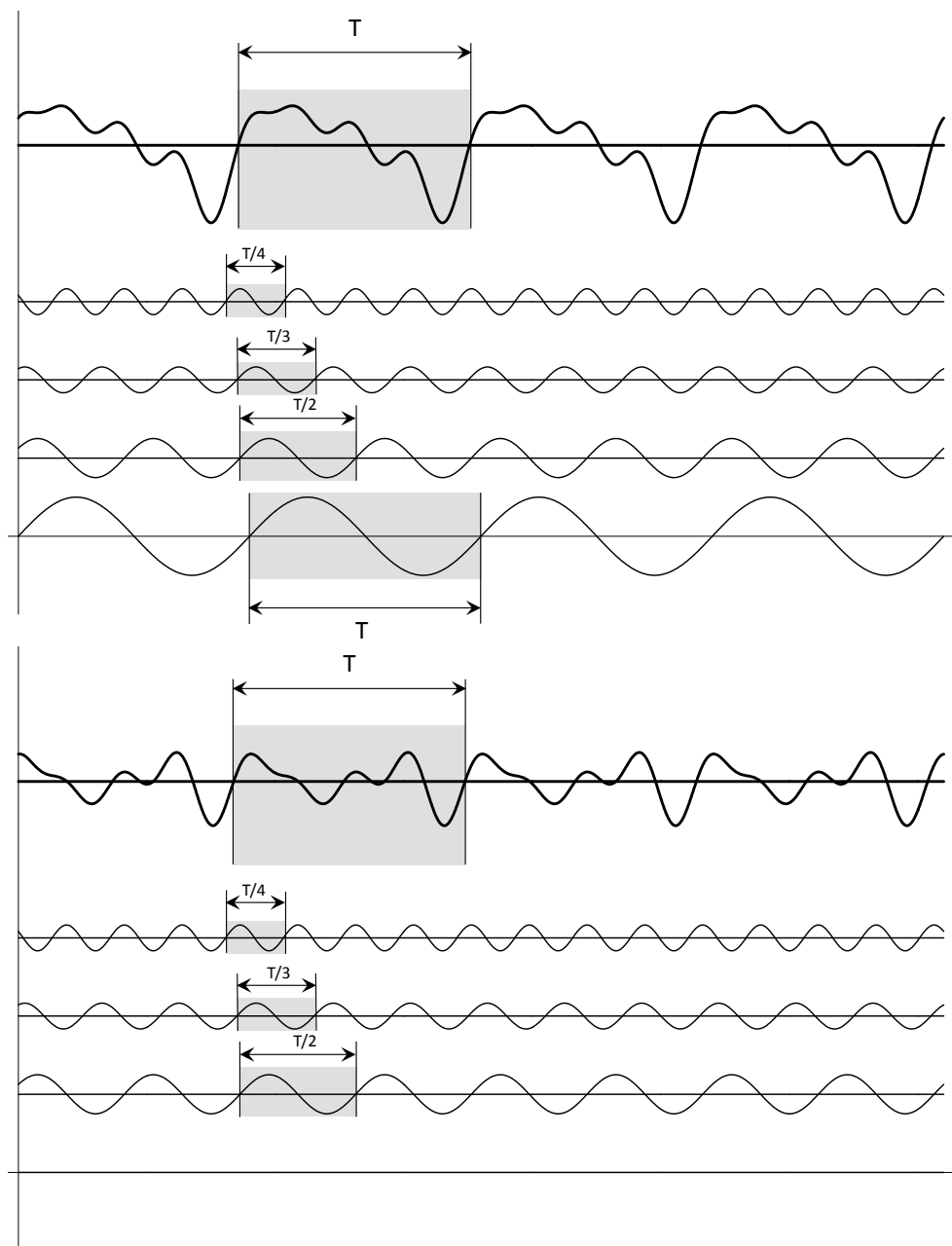


Figure 5.10: Combinaison de signaux de fréquences multiples d'un même fondamental. Graphes du haut : le fondamental et les harmoniques 1 à 3 sont ici déphasés ce qui change la forme du signal combiné mais pas sa période. Graphes du bas : l'amplitude du fondamental est ici nulle ... ce qui ne change pas pour autant la périodicité du signal combiné.

5.2 Séries de Fourier

Un signal $p(t)$ est périodique s'il existe une constante T telle que :

$$\forall t : p(t + T) = p(t) \quad (5.16)$$

Un tel signal peut être représenté par sa série de Fourier qu'on écrit sous la forme (le signe négatif devant la série de sinus est arbitraire mais simplifie les notations ultérieures) :

$$p(t) = \sum_{n=0,\infty} A_n \cos \omega_n t - \sum_{n=0,\infty} B_n \sin \omega_n t \quad (5.17)$$

avec $\omega_n = 2n\pi/T$. Si $p(t)$ désigne la pression totale alors, dans un contexte acoustique, A_0 est la pression atmosphérique. Si $p(t)$ désigne la perturbation acoustique supposée de moyenne nulle, alors $A_0 = 0$. La pression acoustique étant une grandeur réelle, les coefficients A_n et B_n le sont également. B_0 est une constante arbitraire introduite uniquement afin de symétriser les notations. On peut écrire cette série sous différentes autres formes, notamment en posant :

$$\begin{aligned} A_n &= C_n \cos \phi_n \\ B_n &= C_n \sin \phi_n \end{aligned} \quad (5.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_n &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \tan \phi_n &= \frac{B_n}{A_n} \end{aligned} \quad (5.19)$$

La série de Fourier s'écrit alors (deuxième forme) :

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{n=0,\infty} C_n (\cos \phi_n \cos \omega_n t - \sin \phi_n \sin \omega_n t) \\ &= \sum_{n=0,\infty} C_n \cos (\omega_n t + \phi_n) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Soit, en introduisant une exponentielle complexe :

$$p(t) = \Re \left(\sum_{n=0,\infty} C_n e^{i\phi_n} e^{i\omega_n t} \right) \quad (5.21)$$

En définissant l'amplitude complexe :

$$D_n = C_n e^{i\phi_n} = A_n + iB_n \quad (5.22)$$

on trouve (troisième forme) :

$$p(t) = \Re \left(\sum_{n=0,\infty} D_n e^{i\omega_n t} \right) \quad (5.23)$$

et, si on se souvient que la partie réelle d'un nombre complexe est égale à la moitié de la somme de ce nombre et de son complexe conjugué, on obtient :

$$p(t) = \sum_{n=0,\infty} \frac{D_n}{2} e^{i\omega_n t} + \sum_{n=0,\infty} \frac{D_n^*}{2} e^{-i\omega_n t} \quad (5.24)$$

Finalement, si on introduit le coefficient E_n défini comme suit :

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{D_n}{2} \quad \text{pour } n > 0 \\ E_0 &= D_0 \\ E_n &= \frac{D_n^*}{2} \quad \text{pour } n < 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

on trouve (quatrième forme) :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty,\infty} E_n e^{i\omega_n t} \quad (5.26)$$

E_n est un nombre complexe. La série ci-dessus ne définit une fonction réelle que parce que la condition suivante est satisfaite :

$$E_{-n} = E_n^* \quad (5.27)$$

5.2.1 Calcul des coefficients

Le calcul de E_m se fait en multipliant les deux membres de 5.26 par $e^{-i\omega_m t}$ et en intégrant sur une période (t_0 est un temps arbitraire) :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} p(t) e^{-i\omega_m t} dt = \sum_{n=-\infty, \infty} E_n \int_{t_0}^{t_0+T} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} dt \quad (5.28)$$

or :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} dt = T \delta_{nm} \quad (5.29)$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker Section 3.2. On en déduit que :

$$E_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) e^{-i\omega_m t} dt \quad (5.30)$$

et, pour les autres définitions des coefficients de Fourier :

$$D_0 = A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \quad (5.31)$$

$$D_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) e^{-i\omega_m t} dt \quad (5.32)$$

$$A_m = \Re(D_m) = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) \cos \omega_m t dt \quad (5.33)$$

$$B_m = \Im(D_m) = -\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) \sin \omega_m t dt \quad (5.34)$$

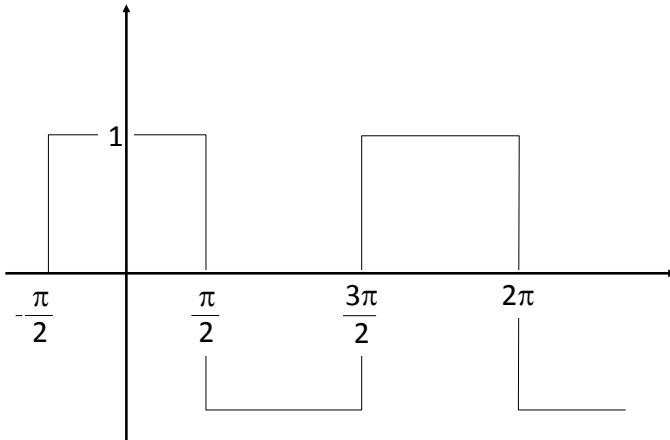


Figure 5.11: Onde carrée.

5.2.2 Onde carrée et phénomène de Gibbs

Considérons par exemple Figure 5.11 la fonction de période 2π définie sur l'intervalle $[-\pi/2, 3\pi/2]$ par :

$$\begin{aligned} p(t) &= 1 \quad \text{pour} \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ p(t) &= -1 \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.35)$$

La fonction est de moyenne nulle et $A_0 = 0$; elle est par ailleurs symétrique de telle sorte que $B_m = 0$. Les harmoniques sont de pulsation $\omega_m = m$. Les coefficients A_m s'obtiennent par :

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos mtdt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos mtdt \right) \\ &= \frac{1}{m\pi} \left(3 \sin \frac{m\pi}{2} - \sin \frac{3m\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

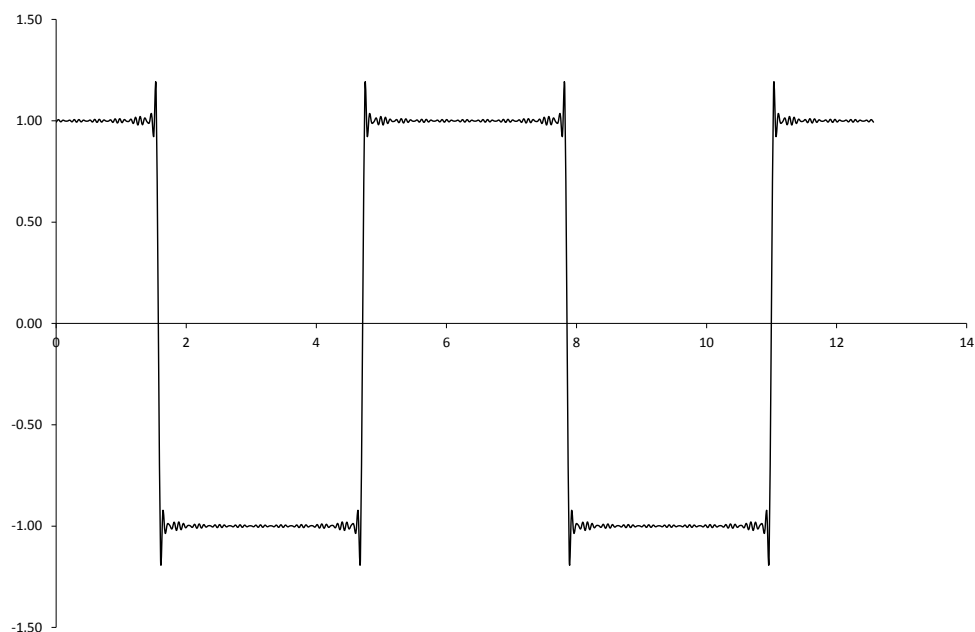


Figure 5.12: Phénomène de Gibbs.

A_m est nul si m est pair et vaut alternativement :

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{4}{m\pi} \quad \text{pour } m = 1, 5, 9, \dots \\ A_m &= -\frac{4}{m\pi} \quad \text{pour } m = 3, 7, 11, \dots \end{aligned} \quad (5.37)$$

On trouve donc le développement :

$$p(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos t}{1} - \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\cos 5t}{5} - \frac{\cos 7t}{7} + \frac{\cos 9t}{9} + \dots \right) \quad (5.38)$$

La série de Fourier, tronquée à l'ordre 50, est représentée à la figure 5.12 ; elle approxime bien les deux *plateaux*. Elle ne converge pas, en revanche, au droit des discontinuités (*phénomène de Gibbs*) : même pour $n \rightarrow \infty$ la série de Fourier évaluée en $t = \pi/2$ et $t = 3\pi/2$ ne converge pas vers 1 mais tend, en l'espèce, vers une valeur de 1.17.

5.2.3 Spectres

Tout signal périodique est la combinaison linéaire d'un nombre fini Figure 5.9 ou infini Figure 5.12 de signaux monochromatiques dont la fréquence est un multiple du fondamental $\frac{1}{T}$. L'amplitude de l'harmonique n peut être définie par un des couples de nombres réels (A_n, B_n) , (C_n, ϕ_n) ou par un des nombres complexes D_n ou E_n . La décomposition d'un signal périodique en fondamental et harmoniques est également susceptible d'une représentation graphique dans laquelle on porte en ordonnée la grandeur du coefficient choisi en fonction de la fréquence correspondante portée en abscisse. Différents spectres associés au signal de la figure 5.14 sont par exemple représentés graphiquement aux figures 5.15 à 5.17; les valeurs des coefficients sont reprises dans la figure 5.13.

	5 Hz	10 Hz	15 Hz	20 Hz
A_n	2	1	1	-1
B_n	-2	-1	1	-1
C_n	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
ϕ_n	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
D_n	$2 - 2i$	$1 - i$	$1 + i$	$-1 - i$
E_n	$1 - i$	$\frac{1-i}{2}$	$\frac{1+i}{2}$	$-\frac{1+i}{2}$
E_n^*	$1 + i$	$\frac{1+i}{2}$	$\frac{1-i}{2}$	$-\frac{1-i}{2}$

Figure 5.13: Amplitude des composantes spectrales du signal de la figure 5.14.

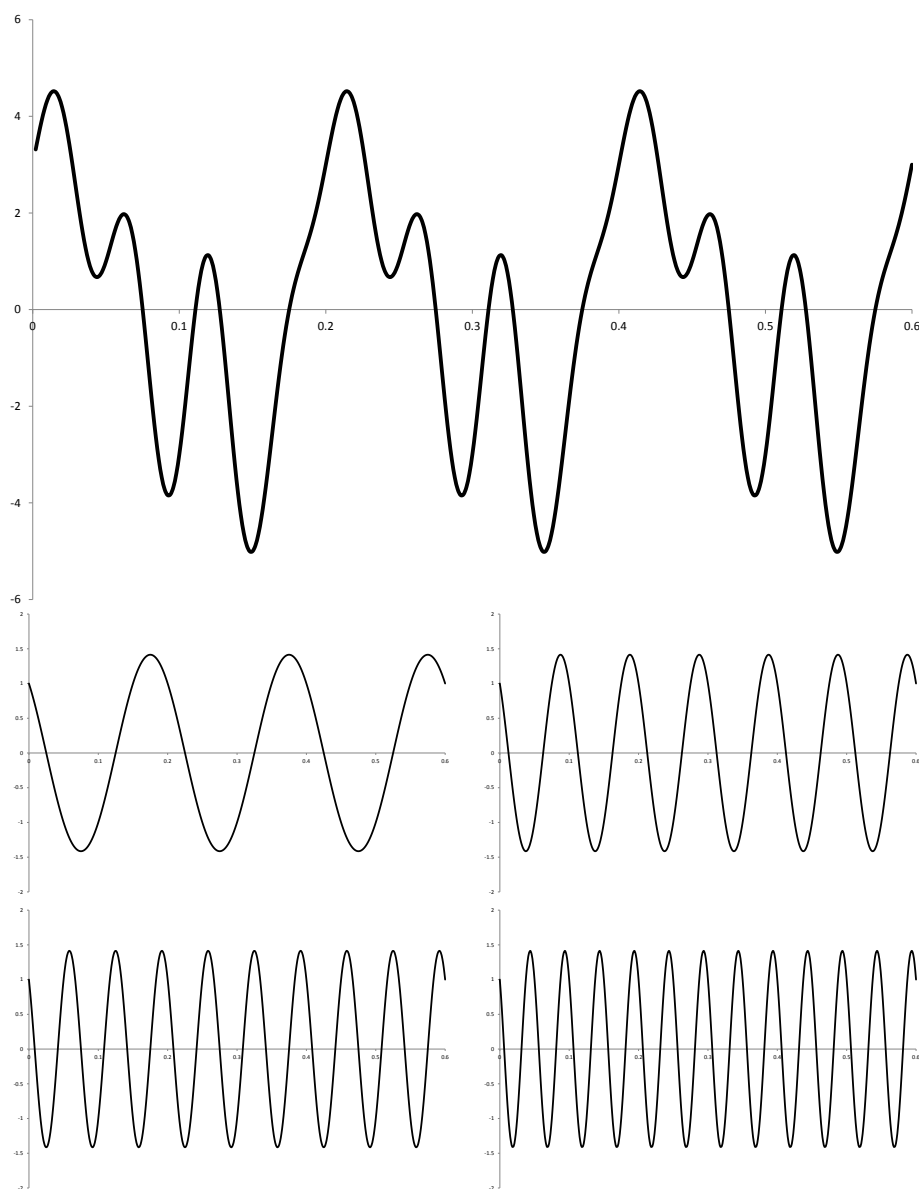


Figure 5.14: Signal périodique et ses composantes spectrales.

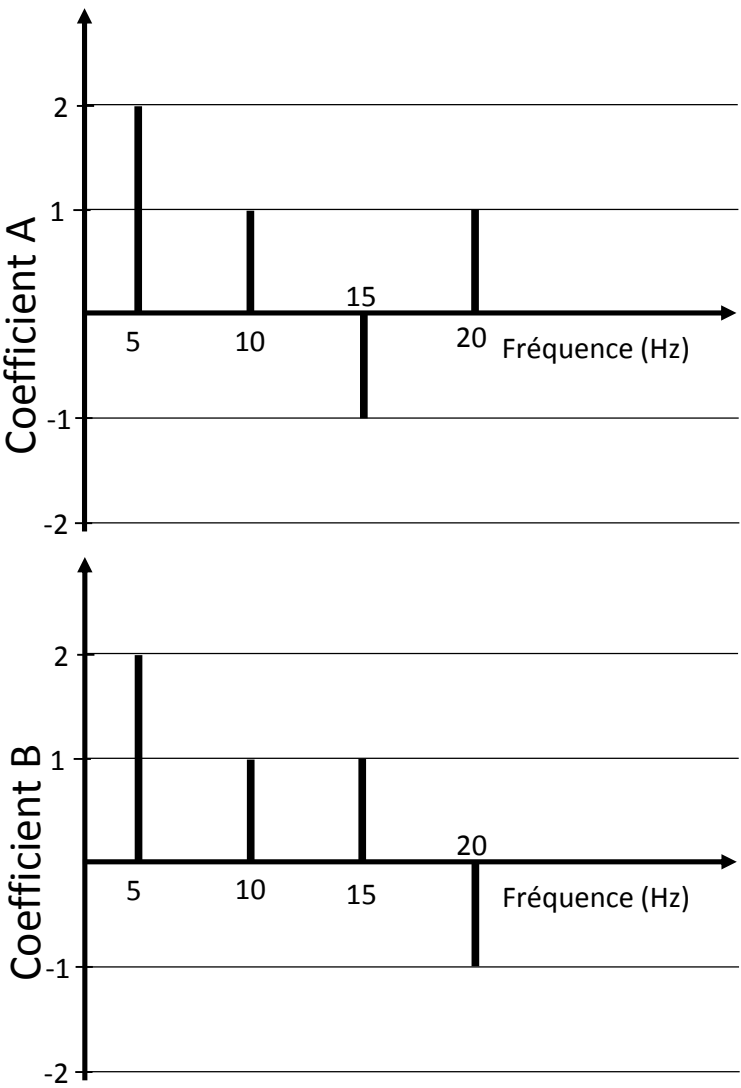


Figure 5.15: Spectre (A,B) du signal de la figure 5.14.

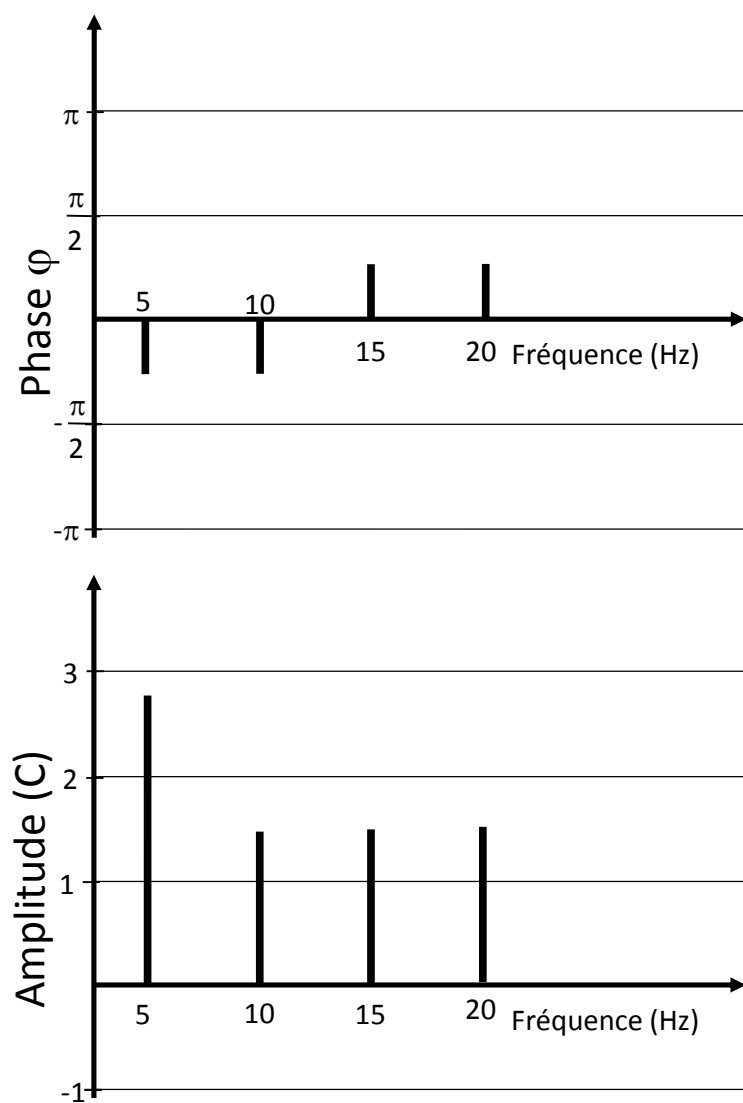


Figure 5.16: Spectre (C, ϕ) du signal de la figure 5.14.

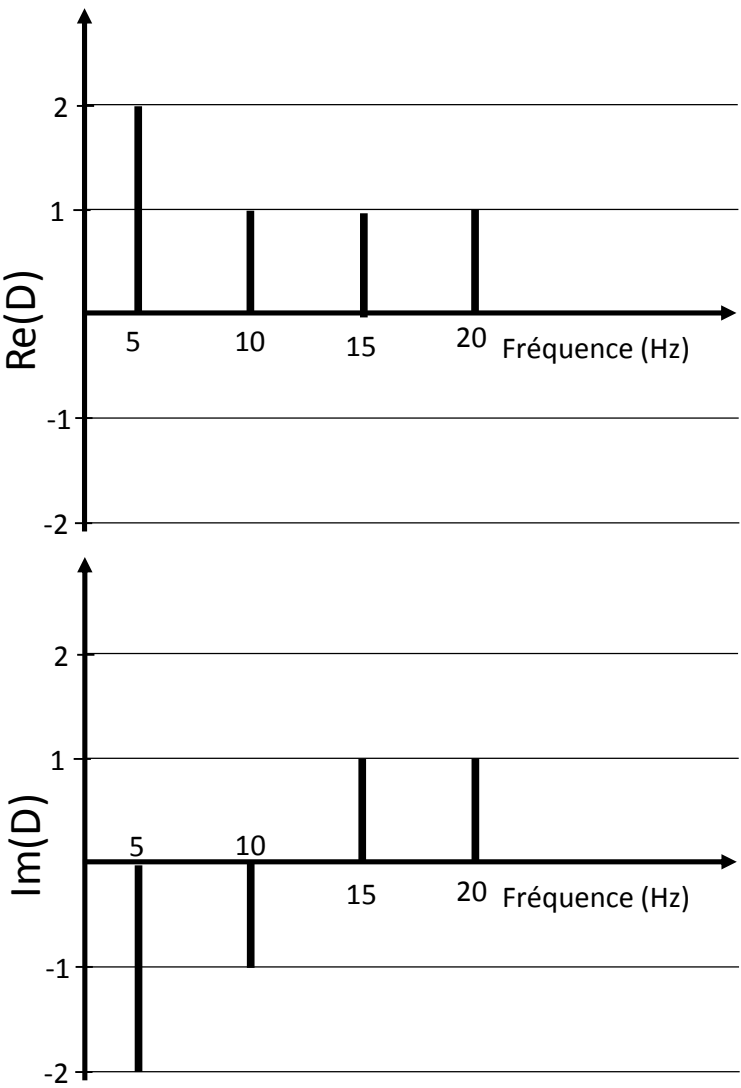


Figure 5.17: Spectre $(\Re(E), \Im(E))$ du signal de la figure 5.14.

5.2.4 Note sur les amplitudes complexes

La décomposition d'un signal en composantes monochromatiques est d'une grande utilité pratique et est systématiquement utilisée. Par un souci légitime d'économie on remplacera volontiers la phrase *le signal contient une composante harmonique à 100 Hz dont l'amplitude complexe est de $(1 + 2i)$* par la contraction *l'amplitude du son à 100 Hz est de $(1 + 2i)$* . Il faut bien comprendre que ceci signifie que le signal contient, entre autres, une composante :

$$p_{100}(t) = \Re[(1 + 2i)e^{i200\pi t}] = \cos(200\pi t) - 2\sin(200\pi t) \quad (5.39)$$

5.3 Transformée de Fourier

Reprenons les équations 5.26 et 5.30 mais en changeant dans cette dernière les bornes d'intégration pour les rendre symétriques :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty, \infty} E_n e^{i\omega_n t} \quad (5.40)$$

$$E_m = \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} p(t) e^{-i\omega_m t} dt \quad (5.41)$$

et considérons un signal $p(t)$ dont la période T grandirait progressivement : le domaine d'intégration croît et la distance entre deux harmoniques successives décroît avec T . Si $T \rightarrow \infty$, le domaine d'intégration s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ et les harmoniques deviennent infiniment proches l'une de l'autre formant un *continuum*. Les deux équations deviennent :

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.42)$$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5.43)$$

$P(\omega)$ est, par définition, la **transformée de Fourier** du signal $p(t)$ et $p(t)$ est la **transformée de Fourier inverse** du spectre $P(\omega)$. Notons que si $p(t)$ se mesure en Pascals, $P(\omega)$ a pour unité des $Pa \cdot s$ soit encore des Pa/Hz . On remplace souvent f par ω comme variable d'intégration dans l'équation 5.42 ce qui donne :

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.44)$$

5.3.1 Caractère hermitien du spectre

D'un point de vue mathématique la transformée de Fourier peut être analysée dans un contexte très général et notamment $p(t)$ peut être une fonction de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Ici, nous nous limitons au cas où $p(t)$ représente une variation temporelle de pression et est donc une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas on note que :

$$P(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{i\omega t} dt = P^*(\omega) \quad (5.45)$$

où P^* désigne le complexe conjugué de P . On tire de la propriété ci-dessus (qui est à rapprocher de l'équation 5.27) une variante importante de l'expression de la transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{i\omega t} df \\ &= \int_0^{\infty} P(\omega) e^{i\omega t} df + \int_0^{\infty} P(-\omega) e^{-i\omega t} df \\ &= \int_0^{\infty} \left(P(\omega) e^{i\omega t} + \left(P(\omega) e^{i\omega t} \right)^* \right) df \\ &= 2\Re \left(\int_0^{\infty} P(\omega) e^{i\omega t} df \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

5.3.2 Spectre à droite

Cette dernière expression permet de définir un spectre à droite (*one-sided spectrum*) défini comme suit :

$$\begin{aligned} P^+(\omega) &= 2P(\omega) \quad \text{pour } \omega > 0 \\ &= 0 \quad \text{pour } \omega < 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Avec ce spectre modifié la transformée de Fourier inverse s'écrit :

$$p(t) = \Re \left(\int_0^\infty P^+(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \quad (5.48)$$

Le spectre *complet* P est à comparer aux coefficients E_n de la série de Fourier alors que le spectre P^+ est à rapprocher des coefficients D_n .

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_{-\infty}^\infty P(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \leftrightarrow \quad p(t) = \sum_{n=-\infty, \infty} E_n e^{i\omega_n t} \\ p(t) &= \Re \left(\int_0^\infty P^+(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \quad \leftrightarrow \quad p(t) = \Re \left(\sum_{n=0, \infty} D_n e^{i\omega_n t} \right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Le spectre complet étant hermitien ($P(-\omega) = P^*(\omega)$) on ne représente souvent que la moitié droite. Il y a donc un risque important de confusion entre P et P^+ .

Application à une fonction périodique

Si $f(t)$ est une fonction périodique, alors elle peut être représentée par une série de Fourier (5.26) :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty, \infty} E_n e^{i\omega_n t} \quad (5.50)$$

et sa transformée de Fourier s'écrit :

$$P(\omega) = \sum_{n=-\infty, \infty} E_n \int_{-\infty}^\infty e^{-i(\omega - \omega_n)t} dt \quad (5.51)$$

Or on sait que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_n)t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_n) \quad (5.52)$$

où δ est la distribution de Dirac c'est-à-dire une *fonction* nulle partout sauf en $\omega = \omega_n$ où elle prend une valeur infinie mais telle que l'intégrale de la fonction sur tout intervalle contenant ω_n est égale à l'unité. On trouve donc :

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty, \infty} E_n \delta(\omega - \omega_n) \quad (5.53)$$

Ce qu'il faut retenir de ce qui précède ...

La théorie de la transformée de Fourier montre que tout signal peut être analysé comme étant la superposition de signaux périodiques élémentaires (sinus ou cosinus). La fonction donnant l'amplitude du signal élémentaire en fonction de la fréquence est appelée le spectre du signal. Pour un signal périodique le spectre est discret et composé d'un nombre fini ou infini mais toujours dénombrable d'*harmoniques* également espacés ($\Delta f = 1/T$). On appelle le signal élémentaire de période T le fondamental du signal et celui de période T/m l'harmonique $(m - 1)$. Pour un signal non périodique le spectre est généralement³ continu et la contribution de chaque fréquence au signal est alors infinitésimale. Notons que la relation 5.53 unit série et transformée de Fourier dans le même formalisme.

L'amplitude du spectre à une fréquence donnée est un nombre complexe ; ceci traduit le fait que le signal élémentaire est pourvu d'une amplitude mais aussi d'une phase. Ce signal élémentaire s'obtient à partir de l'amplitude complexe par la relation :

$$\begin{aligned} p_\omega(t) &= P(\omega) \cdot e^{i\omega t} + P(-\omega) \cdot e^{-i\omega t} \\ &= 2\Re \left(P(\omega) \cdot e^{i\omega t} \right) \\ &= \Re \left(P^+(\omega) \cdot e^{i\omega t} \right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

3. Nous avons vu que la combinaison de deux sons purs dont les fréquences sont dans un rapport irrationnel engendrent un signal non périodique et pourtant leur spectre est discret Figure 5.7.

Si $p(t)$ est un signal non périodique alors p_ω est une densité spectrale et l'amplitude du spectre à la fréquence ω est $p_\omega d\omega$.

Le signal $p(t)$ et sa transformée de Fourier donnent deux descriptions complémentaires du même phénomène. La réalité sensible est représentée par l'histoire de la pression mais le spectre est une représentation beaucoup plus intelligible et plus utile au travail de l'ingénieur.

5.3.3 Glissement temporel

Dans la suite on dénotera comme suit :

$$p(t) \Leftrightarrow P(\omega) \quad (5.55)$$

le fait que $P(\omega)$ est la transformée de Fourier de $p(t)$. Une première propriété importante de la transformée de Fourier est la propriété dite de *glissement temporel* :

$$p(t - t_0) \Leftrightarrow P(\omega)e^{-i\omega t_0} \quad (5.56)$$

Cette propriété permet d'expliquer l'allure du spectre représenté à la figure 5.18. Il s'agit de deux spectres de vibration mesurés sur une structure excitée par l'impact d'un marteau de choc. Dans un cas (spectre perturbé) l'expérimentateur a involontairement laissé le rebond élastique du marteau induire un deuxième choc sur la structure. Plutôt que d'appliquer une excitation $f(t)$ à la structure le technicien y a donc appliqué une excitation :

$$f(t) + \alpha f(t - t_0) \quad (5.57)$$

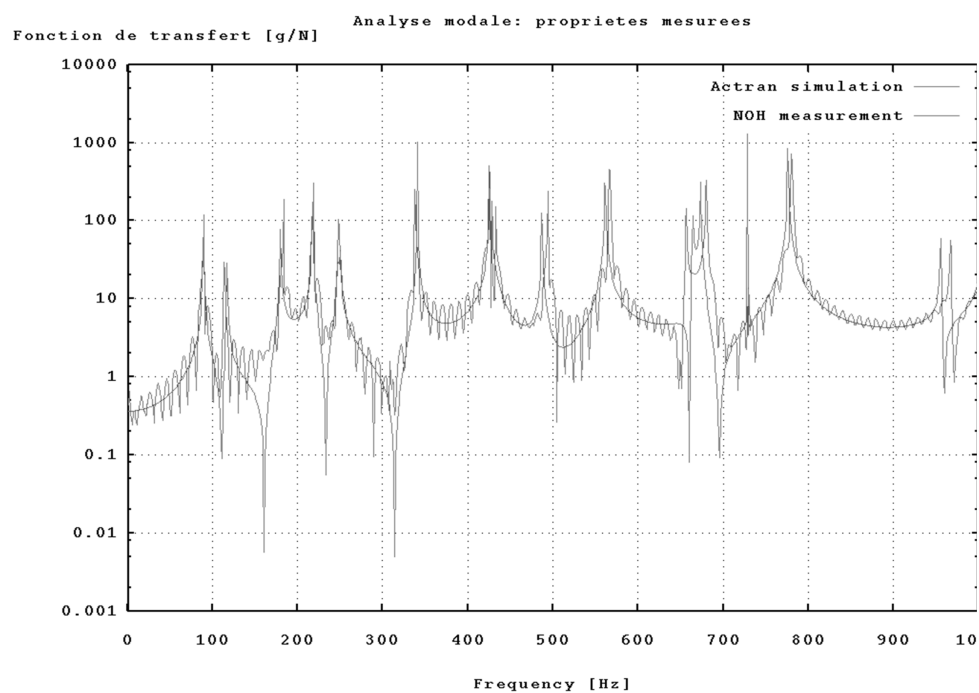
où α mesure l'amplitude relative du premier et du deuxième choc et t_0 le temps qui sépare les deux impacts. Le spectre de cette excitation est donné par $(f(t) \Leftrightarrow F(\omega))$:

$$F(\omega) \cdot (1 + \alpha e^{i\omega t_0}) \quad (5.58)$$

Le module de l'excitation est donc celui d'un impact simple modulé par la fonction :

$$\sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \omega t_0} \quad (5.59)$$

C'est cette modulation qu'on observe à la figure 5.18.



©ACTRAN by Free Field Technologies. Used by permission.

Figure 5.18: Effet d'écho dans la réponse dynamique à une excitation au marteau de choc.

5.3.4 Distortion de l'échelle temporelle

Une deuxième propriété importante est celle qui relie une variation de l'échelle temporelle à celle de l'échelle fréquentielle :

$$p(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} P\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (5.60)$$

Cette relation permet de calculer les propriétés du spectre d'un signal de forme donnée qu'on *déroule* plus ou moins rapidement (un disque microsillon 33 tours qu'on fait passer à 78 tours). Une augmentation de la *vitesse* (a) produit un étalement du spectre et une réduction de son amplitude. Cette propriété permet par exemple d'expliquer le comportement dynamique d'un véhicule passant à différentes vitesses sur un cahot. À basse vitesse le spectre de l'excitation est concentré dans les basses fréquences où la suspension se comporte de manière quasi statique. Dès que la vitesse dépasse un certain seuil, l'excitation présente nécessairement une composante significative à la fréquence de résonance de la suspension et la réponse dynamique du véhicule est amplifiée de manière importante. Les figures 5.19 et 5.20 compare le facteur d'amplification dynamique caractérisant l'ensemble de la liaison au sol (pneu et suspension) et le spectre de l'excitation (en fait le spectre du déplacement vertical imposé au pneumatique par un cahot rectangulaire de 10 cm de hauteur et de 60 cm de longueur) pour une vitesse de passage de 10 et 60 km/h.

5.3.5 Dérivées

Une troisième propriété importante est celle qui lie la transformée d'une fonction à celle de ses dérivées temporelles :

$$\frac{dp(t)}{dt} \Leftrightarrow i\omega P(\omega) \quad (5.61)$$

$$\frac{d^2p(t)}{dt^2} \Leftrightarrow -\omega^2 P(\omega) \quad (5.62)$$

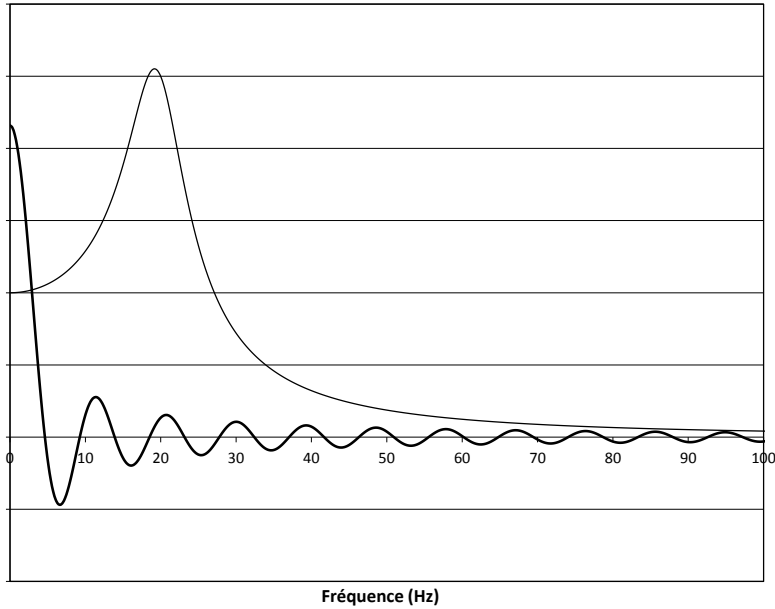


Figure 5.19: Superposition du spectre de l'élévation perçue par le pneu et du facteur d'amplification caractérisant la suspension. La vitesse est de 10 km/h.

$$\frac{d^n p(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (i\omega)^n P(\omega) \quad (5.63)$$

Ces propriétés permettent de transformer toute équation différentielle linéaire en une équation scalaire. Si on doit résoudre l'équation :

$$\sum_{i=1,n} a_n \frac{d^n p(t)}{dt^n} = f(t) \quad (5.64)$$

on peut en prendre la transformée de Fourier :

$$\sum_{i=1,n} a_n (i\omega)^n P(\omega) = F(\omega) \quad (5.65)$$

qui se résout immédiatement :

$$P(\omega) = \frac{F(\omega)}{\sum_{i=1,n} a_n (i\omega)^n} \quad (5.66)$$

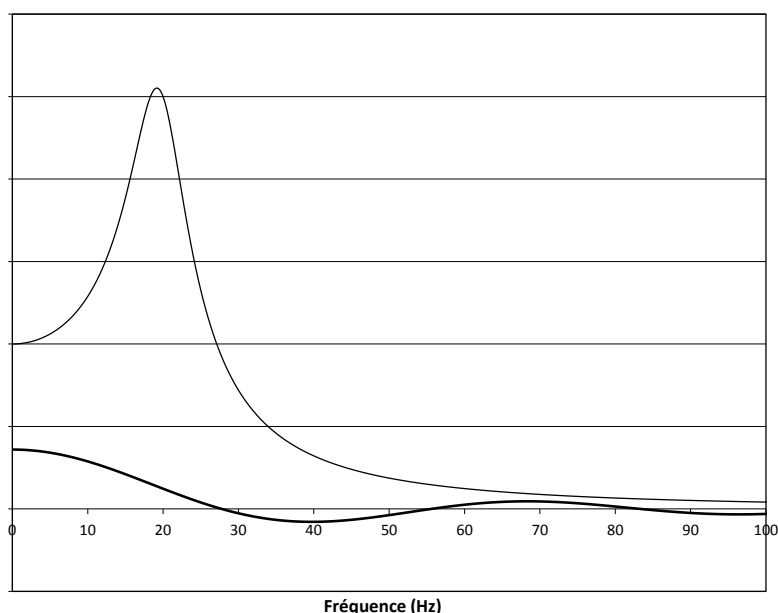


Figure 5.20: Superposition du spectre de l'élévation perçue par le pneu et du facteur d'amplification caractérisant la suspension. La vitesse est de 60 km/h.

On trouve la fonction inconnue en prenant la transformée de Fourier inverse de $P(\omega)$:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)e^{i\omega t}}{\sum_{i=1,n} a_n (i\omega)^n} d\omega \quad (5.67)$$

5.4 Produit de convolution

Le produit de convolution de deux signaux $f(t)$ et $g(t)$ est défini de la manière suivante :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \quad (5.68)$$

et on le note $f \otimes g$. Remplaçons f et g par leurs transformées de Fourier inverses respectives dans l'expression du produit de convolution :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) e^{i\sigma(t-\tau)} d\sigma \right] d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\sigma) e^{i\sigma t} e^{i(\omega-\sigma)\tau} d\omega d\sigma d\tau \end{aligned} \quad (5.69)$$

mais :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\sigma)\tau} d\tau = \delta(\omega - \sigma) \quad (5.70)$$

et donc :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot G(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (5.71)$$

La transformée de $x(t)$ est donc égale au produit des transformées de f et g :

$$x(t) = f(t) \otimes g(t) \Leftrightarrow X(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega) \quad (5.72)$$

Symétriquement, si un signal $x(t)$ est défini comme le produit de deux signaux $y(t)$ et $z(t)$, la transformée de Fourier de $x(t)$ est le produit de convolution de $Y(\omega)$ et $Z(\omega)$:

$$x(t) = f(t) \cdot g(t) \Leftrightarrow X(\omega) = F(\omega) \otimes G(\omega) \quad (5.73)$$

avec

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\sigma) \cdot Z(\omega - \sigma) d\sigma \quad (5.74)$$

5.4.1 Fenêtrage d'un signal

Considérons un signal rectangulaire Figure 5.21 défini par :

$$\begin{aligned} w(t) &= A \quad \text{pour } |t| < \tau \\ &= 0 \quad \text{pour } |t| > \tau \end{aligned} \quad (5.75)$$

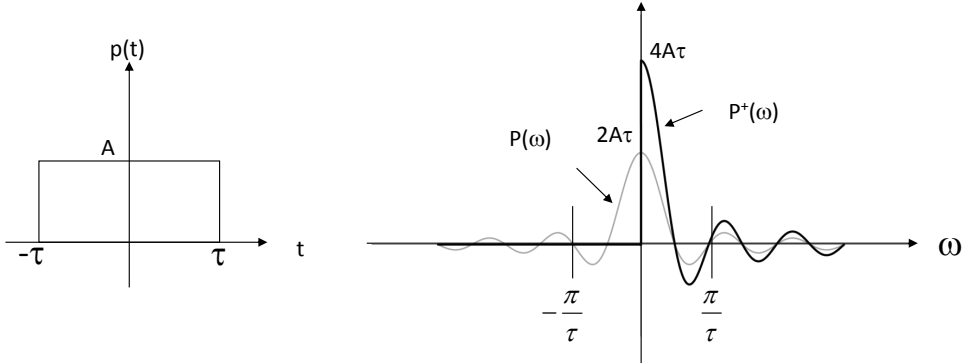


Figure 5.21: Signal rectangulaire et sa transformée de Fourier.

Sa transformée de Fourier est donnée par :

$$W(\omega) = A \int_{-\tau}^{\tau} e^{-i\omega t} dt = A \frac{e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}}{-i\omega} = 2A\tau \frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau} \quad (5.76)$$

Considérons un signal $p(t)$ dont on n'enregistre qu'une partie comprise entre les temps $t_0 - \tau$ et $t_0 + \tau$. Ce signal tronqué $\bar{p}(t)$ peut être défini comme suit :

$$\bar{p}(t) = w(t - t_0) \cdot p(t) \quad (5.77)$$

Sa transformée de Fourier est donc :

$$\bar{P}(\omega) = (W(\omega) \cdot e^{-i\omega t_0}) \otimes P(\omega) \quad (5.78)$$

Le spectre du signal tronqué est le résultat de la convolution du spectre original par le spectre associé à la fenêtre : chaque composante du spectre original est modulée par la transformée de Fourier de la fenêtre.

5.4.2 Largeurs d'un signal et du spectre associé

Le signal rectangulaire (équation 5.75) permet de mettre en évidence une autre propriété importante de la transformée de Fourier à savoir la relation entre largeur du signal et largeur du spectre associé. On peut en effet associer une

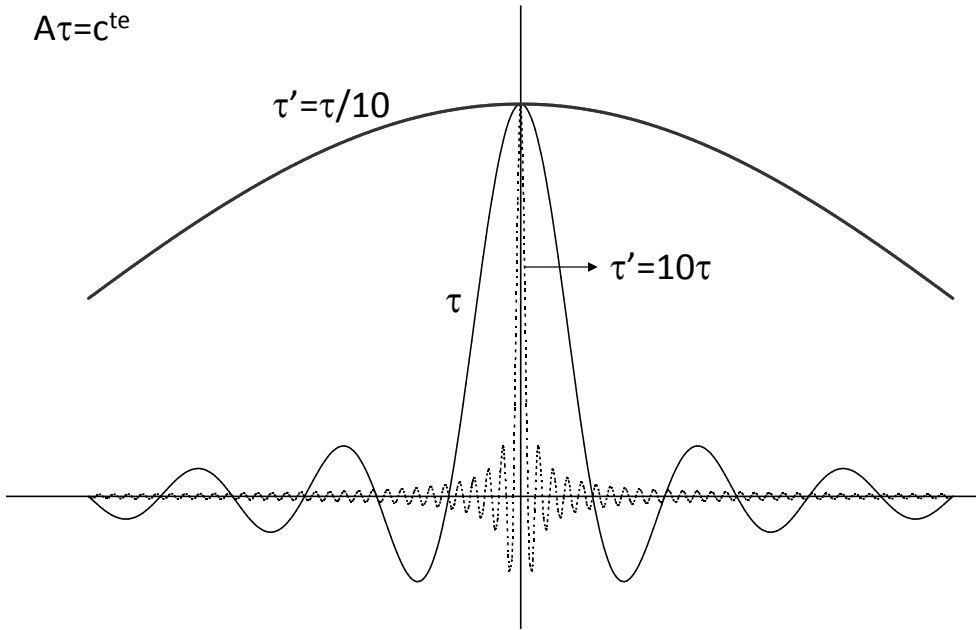


Figure 5.22: Effet de la durée du signal sur la transformée de Fourier d'un signal rectangulaire.

largeur $\Delta\tau = 2\tau$ au signal rectangulaire et une largeur (conventionnelle) $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ à son spectre Figure 5.21. On constate que le produit de ces deux largeurs est constant :

$$\Delta\tau \cdot \Delta\omega = 4\pi \quad (5.79)$$

On en déduit les propriétés énoncées ci-dessous.

- À un signal localisé dans le temps ($\Delta\tau$ petit) est associé un spectre large ($\Delta\omega$ grand).
- À un spectre étroit ($\Delta\omega$ petit) correspond un signal étendu ($\Delta\tau$ grand). La figure 5.22 met en évidence le resserrement du spectre lorsque la largeur du signal augmente.
- Si on fait tendre $\tau \rightarrow 0$ et $A \rightarrow \infty$ en maintenant $2A\tau = 1$, le signal rectangulaire tend vers une distribution de Dirac et sa transformée de Fourier a un module constant Figure 5.23.
- Inversement, si $\tau \rightarrow \infty$ et $A \rightarrow 0$ en maintenant $2A\tau = 1$, $P(\omega) \rightarrow \delta(\omega)$.

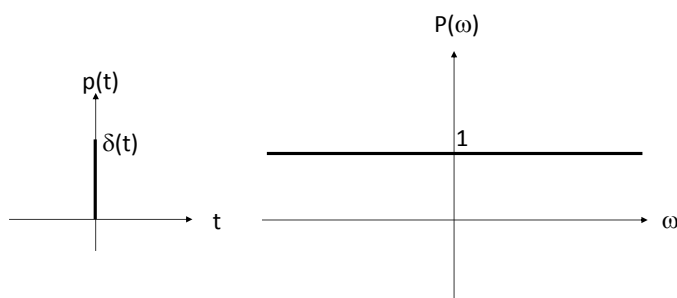


Figure 5.23: Signal impulsionnel et sa transformée de Fourier.

5.4.3 Filtrage d'un signal

À l'inverse, si on transforme le spectre d'un signal en lui appliquant un filtre $F(\omega)$:

$$\bar{P}(\omega) = F(\omega) \cdot P(\omega) \quad (5.80)$$

Le signal filtré résultera de la convolution du signal original par la réponse impulsionnelle associée au filtre :

$$\bar{p}(t) = f(t) \otimes p(t) \quad (5.81)$$

5.5 Synthèse du chapitre

Un son est décrit par l'histoire $p(t)$ du signal de pression. Ce signal peut être également décrit par sa transformée de Fourier $P(\omega)$. Si le signal $p(t)$ est périodique de période T , $P(\omega)$ est la combinaison d'un nombre fini ou infini de distributions de Dirac centrées sur les fréquences $\frac{n}{T}$. Si le signal $p(t)$ est non périodique, $P(\omega)$ est une fonction de ω ; elle peut être à support compact ou non.

Dans de nombreux cas il est possible de déterminer *a priori*, de manière qualitative, le contenu spectral du bruit engendré par une source donnée. Tout

phénomène induisant une périodicité dans le signal sera responsable de composantes tonales régulièrement espacées. Les composantes de bruit associées à la résonance acoustique d'une cavité (voir le chapitre 9) ou la résonance dynamique d'une structure seront caractérisées par des lignes spectrales dont l'espacement ne sera en général pas constant. Enfin, les phénomènes non périodiques (turbulence, explosion, processus aléatoires) donneront au spectre de bruit associé une composante continue.

6

ÉQUATIONS DE L'ACOUSTIQUE EN RÉGIME HARMONIQUE

Celui qui, dans ses recherches scientifiques, cherche à obtenir des applications pratiques immédiates, peut être généralement assuré qu'il cherche en vain.

Hermann von Helmholtz (1821-1894) *in* Science (1922).

cité dans Max Planck (1858-1947), Autobiographie scientifique (1948)

Contents

6.1	Équation de Helmholtz	98
6.2	Relation pression-vitesse	99
6.3	Impédance acoustique	99
6.4	Intensité sonore	100
6.5	Ondes planes	106
6.6	Ondes sphériques	110

Dans ce chapitre, nous appliquerons la transformée de Fourier Chapter 5 à l'équation d'onde Chapter 4 afin de produire une équation aux dérivées partielles pour le spectre de pression $P(\omega)$. Nous définirons alors deux grandeurs essentielles : l'impédance acoustique et l'intensité sonore. La solution de d'Alembert pour l'équation d'onde à une dimension a un équivalent harmonique que nous étudierons en détail. Pour compléter ces ondes planes, nous présenterons les ondes sphériques, correspondant à des sources ponctuelles ou monopolaires, dont nous aurons besoin au chapitre 8.

6.1 Équation de Helmholtz

On a démontré au chapitre 4 que le champ de pression acoustique obéissait à une équation d'onde :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (6.1)$$

Si on prend la transformée de Fourier de cette équation on obtient une équation pour le spectre $P(\omega)$ (avec $p(t) \Leftrightarrow P(\omega)$) :

$$\Delta P(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} P(\omega) = 0 \quad (6.2)$$

qu'on écrit généralement de la manière suivante :

$$\Delta P(\omega) + k^2 P(\omega) = 0 \quad (6.3)$$

en introduisant le nombre d'onde $k = \omega/c$ Section 4.5.1. Cette équation est appelée équation de Helmholtz ¹.

1. **Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz** est né en 1821 et mort en 1884 à Potsdam . Il est connu pour ses travaux appliquant la physique à la physiologie et pour ses contributions à la thermodynamique. Dans le domaine de l'acoustique il a notamment partiellement élucidé les mécanismes physiologiques permettant la perception de la hauteur des sons (*tonotopie*).

6.2 Relation pression-vitesse

La relation 4.26 lie la vitesse v_i des particules de fluide au gradient de la pression :

$$\partial_j p(t) = -\rho \partial_t v_j(t) \quad (6.4)$$

Si on en prend la transformée de Fourier on obtient :

$$\partial_j P(\omega) = -i\rho\omega V_j(\omega) \quad (6.5)$$

qui lie le gradient du spectre de pression au spectre de vitesse. On utilisera souvent l'expression ci-dessus sous sa forme inversée permettant de calculer la vitesse à partir de la connaissance du champ de pression :

$$V_j(\omega) = \frac{i}{\rho\omega} \partial_j P(\omega) \quad (6.6)$$

6.3 Impédance acoustique

L'impédance² acoustique, en un point donné et dans une direction donnée, est définie comme le rapport entre l'amplitude complexe du spectre de pression et l'amplitude complexe du spectre de vitesse dans la direction considérée :

$$Z_j(\omega) = \frac{P(\omega)}{V_j(\omega)} \quad (6.7)$$

où j désigne la direction choisie. $Z_j(\omega)$ est une grandeur complexe, généralement fonction de la fréquence. Le long d'une paroi on définit l'impédance normale :

$$Z_n(\omega) = \frac{P(\omega)}{V_n(\omega)} \quad (6.8)$$

2. Du latin *impedire*, empêcher. On retrouve l'idée de *résistance*.

qui caractérise, comme on le verra au chapitre 8, l'absorption acoustique du matériau constituant la paroi. Notons déjà qu'une paroi parfaitement rigide est caractérisée par une impédance infinie ($v = 0$) et une surface de pression nulle par une impédance nulle. L'inverse de l'impédance est l'admittance :

$$A_n(\omega) = \frac{V_n(\omega)}{P(\omega)} \quad (6.9)$$

Notes :

- Impédance et admittance sont des concepts qui ne portent que sur les amplitudes complexes des phaseurs c'est-à-dire sur les spectres. Le rapport entre pression et vitesse *instantanées* n'a aucun sens physique.
- L'impédance est un concept général en physique des phénomènes linéaires harmoniques. En électricité par exemple, l'impédance est la généralisation de la résistance au cas d'un courant alternatif et désigne le rapport tension sur courant. En dynamique des structures plusieurs définitions de l'impédance peuvent être retenues : force sur déplacement, force sur vitesse, force sur accélération. Dans tous les cas, il s'agit du rapport (fonction de transfert) entre la cause d'un phénomène (phaseur de force, tension, pression acoustique) et l'effet associé (phaseur de déplacement, courant ou vitesse acoustique). L'impédance est, en général, une quantité complexe et dépendante de la fréquence.

6.4 Intensité sonore

Une particule d'air se déplace avec une vitesse $v(t)$ dans un champ sonore caractérisé par une pression $p(t)$. Pour assurer ce déplacement la particule développe une puissance spécifique (par unité de surface) qui est simplement le produit de la pression par la vitesse :

$$i(t) = p(t) \cdot v(t) \quad (6.10)$$

et qu'on appelle l'intensité sonore instantanée.

6.4.1 Signal monochromatique

Considérons d'abord un signal monochromatique à la pulsation ω :

$$\begin{aligned} p(t) &= P_a \cos(\omega t + \phi_p) = \Re(P e^{i\omega t}) \\ v(t) &= V_a \cos(\omega t + \phi_v) = \Re(V e^{i\omega t}) \end{aligned} \quad (6.11)$$

L'intensité instantanée correspondante vaut :

$$\begin{aligned} i(t) &= P_a V_a \cos(\omega t + \phi_p) \cos(\omega t + \phi_v) \\ &= \frac{P_a V_a}{2} [\cos(\phi_p - \phi_v) + \cos(2\omega t + \phi_p + \phi_v)] \\ &= \Re\left(\frac{P V^*}{2} + \frac{P V e^{2i\omega t}}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

L'intensité instantanée apparaît donc comme la somme d'une constante et d'un terme de moyenne nulle et de pulsation 2ω Figure 6.1. Le terme constant est appelé **intensité active** ; il représente un flux net de puissance. Le second terme est **l'intensité réactive** qui est de moyenne nulle sur un cycle. L'intensité active est maximale lorsque la pression et la vitesse sont en phase Figure 6.2 ; c'est notamment le cas d'une onde plane se propageant en champ libre Section 6.5.3. L'intensité active est nulle lorsque la pression et la vitesse sont en quadrature de phase Figure 6.3 ; c'est le cas d'une onde stationnaire (voir le chapitre 9).

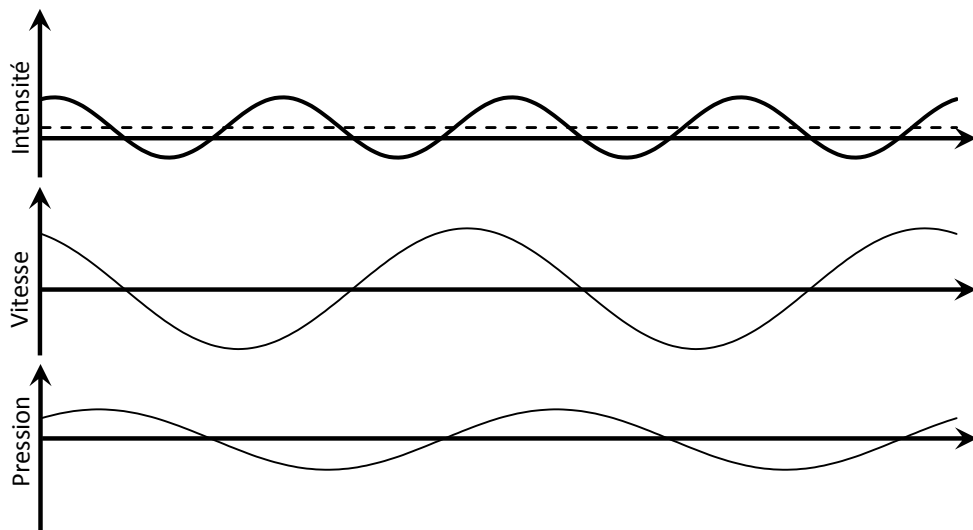


Figure 6.1: Intensité sonore : cas général. Les trois diagrammes représentent, de bas en haut, la pression, la vitesse et l'intensité. En ce qui concerne l'intensité, les deux composantes sont représentées : l'intensité active est constante et l'intensité réactive fluctue autour de cette valeur moyenne.

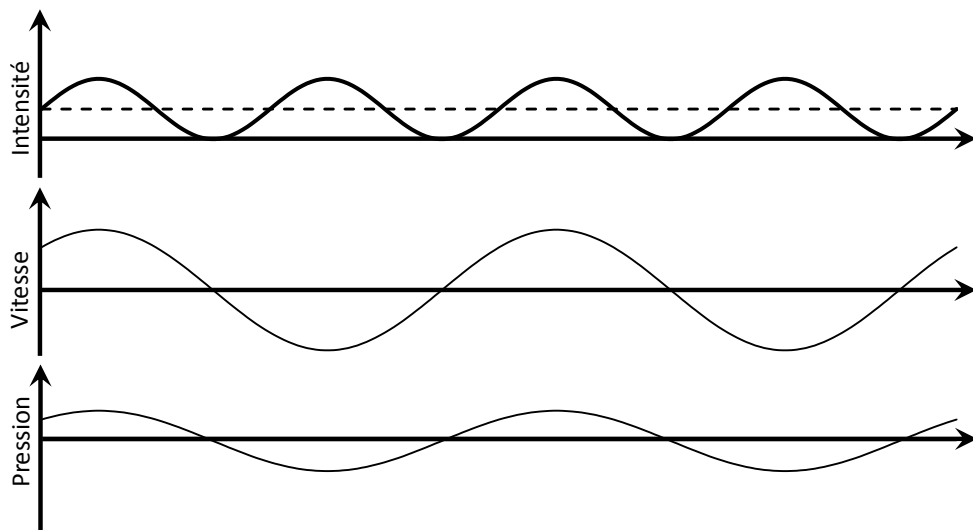


Figure 6.2: Intensité sonore. La pression et la vitesse sont ici en phase (impédance réelle) : l'intensité active est maximum.

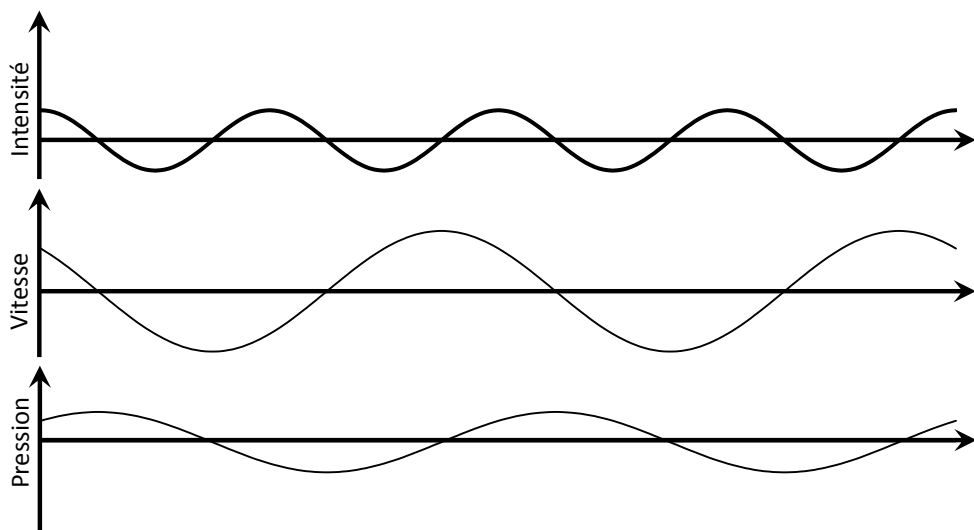


Figure 6.3: Intensité sonore. La pression et la vitesse sont ici en quadrature de phase (impédance imaginaire) : l'intensité active est nulle.

6.4.2 Signal périodique général

Considérons à présent un signal périodique constitué d'un nombre N (éventuellement infini) de signaux monochromatiques de pulsation $\omega_m = m\omega_0$:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \sum_{m=1}^N P_{am} \cos(m\omega_0 t + \phi_{pm}) \\
 v(t) &= \sum_{m=1}^N V_{am} \cos(n\omega_0 t + \phi_{vn})
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

L'intensité instantanée correspondante vaut :

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N P_{am} V_{an} \cos(m\omega_0 t + \phi_{pm}) \cos(n\omega_0 t + \phi_{vn}) \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{P_{am} V_{an}}{2} \left[\begin{array}{l} \cos((m-n)\omega_0 t + \phi_{pm} - \phi_{vn}) + \\ \cos((m+n)\omega_0 t + \phi_{pm} + \phi_{vn}) \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Le spectre $I(\omega)$ associé au signal $i(t)$ contient tous les harmoniques de $-(N-1)$ à $2N$ et notamment une composante active correspondant au premier terme pour $m = n$:

$$I_{active} = \sum_{m=1}^N \frac{P_{am} V_{am}}{2} \cos(\phi_{pm} - \phi_{vm}) \tag{6.15}$$

Soit en introduisant les phaseurs P_m et V_m de la pression et de la vitesse des composantes harmoniques m :

$$I_{active} = \sum_{m=1}^N \Re\left(\frac{P_m V_m^*}{2}\right) \tag{6.16}$$

6.4.3 Signal quelconque

Considérons maintenant un signal quelconque. L'intensité étant le produit de deux signaux, son spectre est donné par le produit de convolution des spectres correspondant à la pression et à la vitesse :

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\sigma) \cdot V(\omega - \sigma) d\sigma \tag{6.17}$$

À une fréquence ω donnée l'intensité réactive résulte du travail dépensé par les particules d'air pour se déplacer à la pulsation $\omega - \sigma$ dans un champ de pression variant à la pulsation σ et ce pour toute la gamme de valeur de σ . En particulier une des composantes de $I(\omega)$ proviendra de l'oscillation des particules d'air à la pulsation $\omega/2$ dans un champ de pression variant à la même pulsation ; pour un signal monochromatique c'est la seule composante possible comme on l'a vu ci-dessus. Le spectre de $i(t)$ possède aussi une composante

constante $I(0)$ qui est **l'intensité active** :

$$\begin{aligned}
 I(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\sigma) \cdot V(-\sigma) d\sigma \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\sigma) \cdot V^*(\sigma) d\sigma \\
 &= \frac{1}{2\pi} \Re \left(\int_0^{\infty} 2P(\sigma) \cdot V^*(\sigma) d\sigma \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \Re \left(\int_0^{\infty} \frac{P^+(\sigma) \cdot V^{+*}(\sigma)}{2} d\sigma \right) \tag{6.18}
 \end{aligned}$$

Notez encore une fois l'ambiguïté possible résultant de l'utilisation de spectres complets et de spectre à *droite*. Si on n'y prend pas garde, l'intensité calculée sera le double ou la moitié de ce qu'elle devrait être ! L'intensité active étant une grandeur ne variant pas dans le temps, il est abusif de parler de l'intensité active à la *pulsation* ω ; c'est toutefois ainsi qu'on désigne souvent la densité spectrale d'intensité :

$$I(\omega) = \Re \left(\frac{P^+(\omega) \cdot V^{+*}(\omega)}{2} \right) \tag{6.19}$$

Il s'agit en fait de la contribution à l'intensité active totale de la composante du signal caractérisée par la pulsation ω . Notons encore qu'en introduisant l'impédance $Z = Z_r + iZ_i$ on peut toujours écrire l'intensité active (ou sa densité spectrale) sous la forme :

$$I(\omega) = \Re \left(\frac{P^+(\omega) \cdot P^{+*}(\omega)}{2Z} \right) = \frac{Z_r}{Z_r^2 + Z_i^2} \frac{|P^+(\omega)|^2}{2} \tag{6.20}$$

Soit encore en introduisant la notion de pression efficace ou RMS :

$$I(\omega) = \frac{Z_r}{Z_r^2 + Z_i^2} |P_{eff}^+(\omega)|^2 \tag{6.21}$$

avec :

$$|P_{eff}^+(\omega)| = \frac{|P^+(\omega)|}{\sqrt{2}} \tag{6.22}$$

L'intensité active est donc toujours du même signe que la partie réelle de l'impédance (voir, à ce sujet, la section 8.4.1).

6.5 Ondes planes

6.5.1 Solution générale à une dimension

La solution générale de l'équation d'onde à une dimension s'écrit (équation 4.31) :

$$p(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (6.23)$$

Par application de la propriété de glissement temporel (équation 5.56) on trouve que le spectre de cette fonction s'écrit (avec $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ et $g(t) \Leftrightarrow G(\omega)$) :

$$P(x, \omega) = F(\omega) e^{-ikx} + G(\omega) e^{ikx} \quad (6.24)$$

Une simple dérivation confirme que ce spectre constitue bien une solution de l'équation de Helmholtz à une dimension :

$$\frac{d^2 P(x, \omega)}{dx^2} + k^2 P(x, \omega) = 0 \quad (6.25)$$

quels que soient les spectres $F(\omega)$ et $G(\omega)$. Le premier terme de la solution générale représente une onde se propageant vers les x positifs (notez le signe $-$ dans l'exponentielle complexe) et le second une onde se propageant vers les x négatifs (notez le signe $+$ dans l'exponentielle complexe).

Note

Nous avons jusqu'à présent systématiquement utilisé des lettres minuscules pour désigner un signal temporel et la lettre majuscule correspondante pour désigner le spectre de ce signal (ex : $p(t) \Leftrightarrow P(\omega)$). Nous ne suivrons plus cette convention à partir d'ici puisque nous allons exclusivement manipuler des spectres. Si la confusion est possible, la variable (t ou ω) sera explicitée. *A priori*, nous considérerons toujours que les spectres sont des *spectres à droite*

et que l'intensité peut être calculée par l'équation 6.18 où, pour un signal monochromatique par :

$$I = \Re\left(\frac{PV^*}{2}\right) \quad (6.26)$$

6.5.2 Impédance caractéristique

Considérons une onde plane se propageant dans la direction des x positifs :

$$p(x, \omega) = F(\omega)e^{-ikx} \quad (6.27)$$

Les molécules d'air se déplacent sous l'effet de cette onde de pression avec une vitesse (équation 6.5) :

$$v_x(x, \omega) = \frac{i}{\rho\omega} \frac{\partial p(x, \omega)}{\partial x} = \frac{F(\omega)}{\rho c} e^{-ikx} \quad (6.28)$$

L'impédance (rapport pression sur vitesse) est donc constante et vaut, en tout point :

$$Z = \frac{p}{v_x} = \rho c \quad (6.29)$$

On appelle cette impédance *impédance caractéristique du milieu* ou *impédance parfaitement adaptée*. On verra à la section 8.1.3 pourquoi cette valeur d'impédance jouit d'un statut particulier et sert de référence.

6.5.3 Intensité

L'intensité active propagée par une onde plane de pulsation ω se calcule aisément :

$$I_a = \frac{1}{2} \Re\left(\int_0^\infty p(\sigma) \cdot v^*(\sigma) \frac{d\sigma}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\rho c} \int_0^\infty |p(\sigma)|^2 \frac{d\sigma}{2\pi} \quad (6.30)$$

Soit pour un signal monochromatique :

$$I_a = \frac{|p|^2}{2\rho c} \quad (6.31)$$

La pression est en phase avec la vitesse, il n'y a donc pas d'intensité réactive : ce sont deux caractéristiques d'un champ purement propagatif.

6.5.4 Atténuation

Dans l'établissement de l'équation d'onde nous avons considéré que le fluide dans lequel se propage la perturbation de pression avait une viscosité nulle et que la perturbation se propageait donc sans perte. En pratique il y a bien dissipation d'énergie dans le fluide et l'amplitude de l'onde décroît exponentiellement avec la distance :

$$p = Ae^{-\alpha x} e^{-ikx} \quad (6.32)$$

où α est un coefficient d'atténuation. Ceci peut s'écrire, en introduisant un nombre d'onde complexe \tilde{k} :

$$p = Ae^{-i\tilde{k}x} \rightarrow \tilde{k} = k - i\alpha = \frac{\omega - i\alpha c}{c} \simeq \frac{\omega}{c \left(1 + \frac{i\alpha c}{\omega}\right)} \quad (6.33)$$

La dernière expression définit une vitesse du son complexe \tilde{c} :

$$\tilde{c} = c \left(1 + i \frac{\alpha c}{\omega}\right) \quad (6.34)$$

L'atténuation peut donc être modélisée par une vitesse du son complexe. Un ordre de grandeur du rapport $\alpha c/\omega$ est de 0.005 dans l'air aux fréquences audibles ; ce coefficient dépend de la nature du fluide et de la fréquence.

6.5.5 Onde plane d'incidence quelconque

Considérons l'équation de Helmholtz écrite dans un espace à trois dimensions :

$$\frac{\partial^2 p(\vec{r}, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(\vec{r}, \omega)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p(\vec{r}, \omega)}{\partial z^2} + k^2 p(\vec{r}, \omega) = 0 \quad (6.35)$$

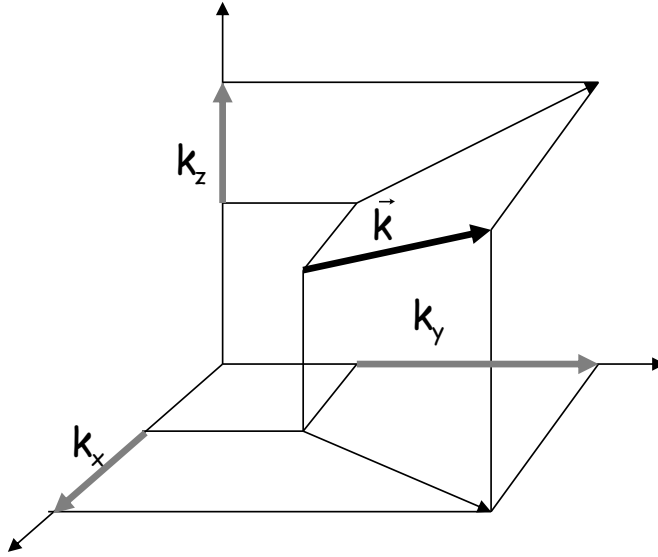


Figure 6.4: Vecteur d'onde associé à une onde plane de direction de propagation quelconque.

et cherchons une solution de la forme :

$$p(\vec{r}, \omega) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (6.36)$$

En introduisant cette solution dans l'équation d'onde et en divisant par $p(\vec{r}, \omega)$ on obtient :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (6.37)$$

Chaque terme de cette équation fait intervenir une seule coordonnée ; chacun doit donc, pour que la somme soit nulle, être égal à une constante. On peut donc écrire :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2 \Rightarrow X(x) = Ae^{-ik_x x} \quad (6.38)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -k_y^2 \Rightarrow Y(y) = Be^{-ik_y y} \quad (6.39)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -k_z^2 \Rightarrow Z(z) = Ce^{-ik_z z} \quad (6.40)$$

La fonction :

$$p(\vec{r}, \omega) = P \cdot e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (6.41)$$

est solution de l'équation d'onde à condition que la relation suivante (relation de dispersion) soit vérifiée :

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (6.42)$$

On peut encore écrire la solution de manière compacte en introduisant le vecteur d'onde \vec{k} :

$$p(\vec{r}, \omega) = P e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (6.43)$$

La pression p décrite par cette solution est constante dans tout plan d'équation

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = c^{te} \quad (6.44)$$

Il s'agit donc bien d'une onde plane se propageant dans la direction du vecteur \vec{k} Figure 6.4.

6.6 Ondes sphériques

Juché sur un autel de barils, le Conseiller, tandis que la pluie clapotait sur la surface du fleuve, parla d'une voix que pouvaient à peine entendre les plus proches, mais que ceux-ci répétaient à ceux de derrière et ainsi de suite en ondes concentriques, de quelque chose qui était, peut-être, la guerre.

Mario Vargas Llosa (1936-) in La guerre de la fin du monde (1981).

6.6.1 Monopôles

En coordonnées sphériques, l'équation d'onde s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (6.45)$$

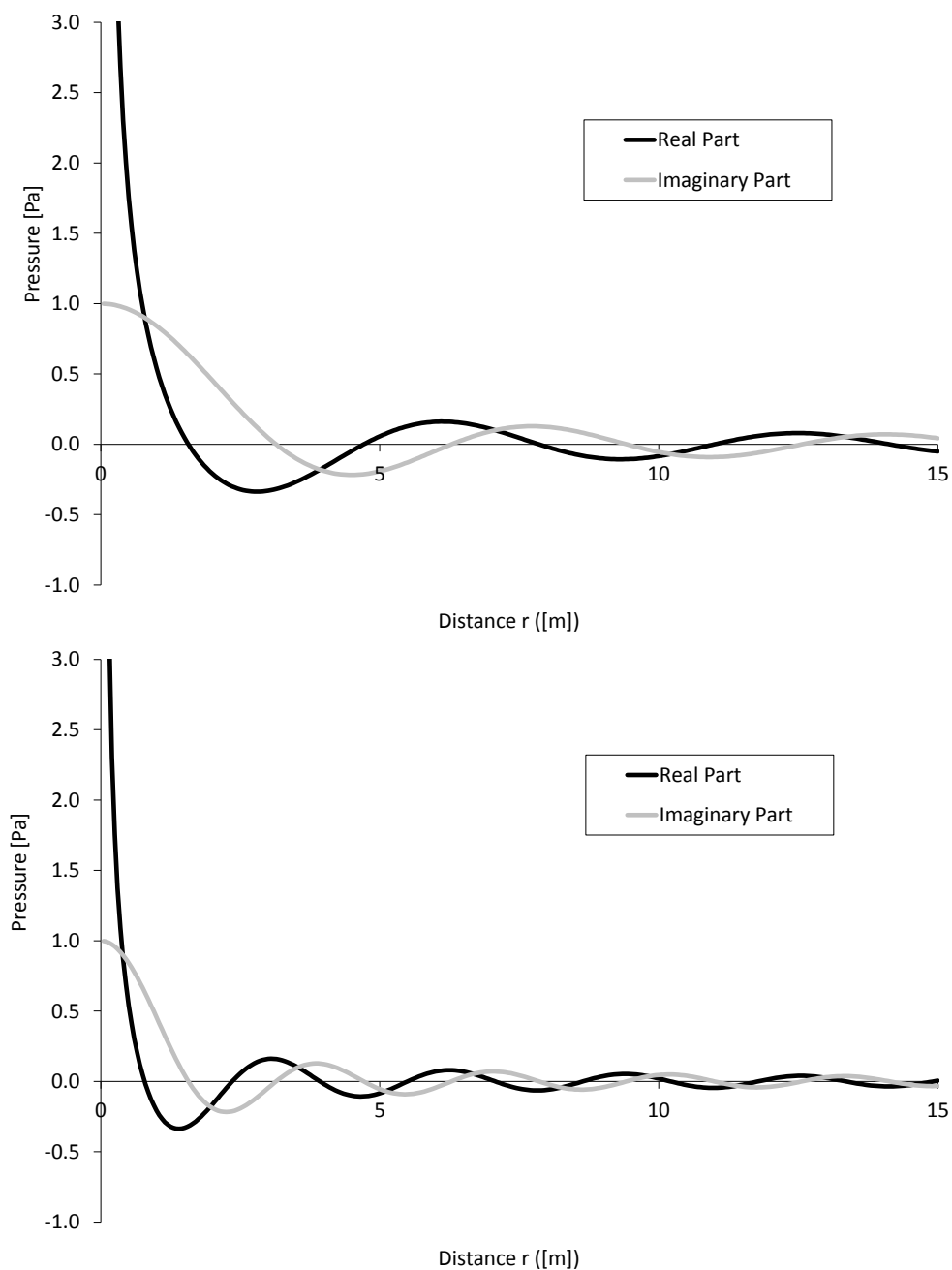


Figure 6.5: Variation radiale des parties réelle et imaginaire de la pression induite par un monopôle pour deux valeurs du nombre d'onde ($k = 1$ et $k = 2$).

Une solution purement radiale (indépendante de θ et de ϕ) obéit donc à l'équation :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (6.46)$$

qui peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 (pr)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (pr)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.47)$$

et dont la solution générale est, par analogie avec (4.31) :

$$p(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{x}{c}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{x}{c}\right)}{r} \quad (6.48)$$

Cette solution est la somme de deux ondes radiales, l'une divergente et l'autre convergente. La transformée de Fourier de cette solution générale de l'équation d'onde sphérique est la solution générale de l'équation de Helmholtz associée :

$$p(r, \omega) = F(\omega) \frac{e^{-ikr}}{r} + G(\omega) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (6.49)$$

Dans la quasi-totalité des cas, les ondes convergentes sont incompatibles avec les conditions aux limites et on retiendra la forme générale Figure 6.5 :

$$p(r, \omega) = F(\omega) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (6.50)$$

La vitesse radiale des particules d'air dans un champ monopolaire est donnée par :

$$v_r(r, \omega) v_r(r, \omega) = \frac{i}{\rho \omega} \frac{dp(x, \omega)}{dr} = \frac{1}{\rho c} \cdot \left(1 + \frac{1}{ikr}\right) \cdot F(\omega) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (6.51)$$

Le troisième terme représente la pression, le premier est l'admittance caractéristique du milieu et le deuxième est le terme proprement associé à la propagation sphérique. L'impédance acoustique radiale vaut alors :

$$Z_r(r, \omega) = \frac{\rho c}{1 + \frac{1}{ikr}} \quad (6.52)$$

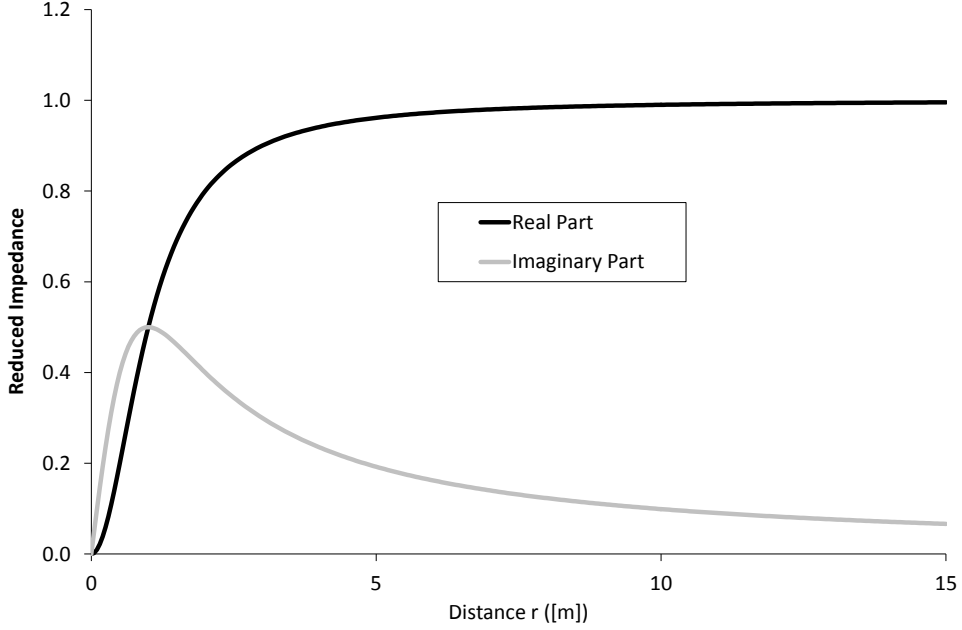


Figure 6.6: Variation radiale des parties réelle et imaginaire de l'impédance radiale du champ acoustique induit par un monopôle.

elle tend vers ρc lorsque $r \rightarrow \infty$; ses parties réelles et imaginaires sont représentées à la figure 6.6. L'intensité acoustique est donnée en tout point par :

$$I_r(r, \omega) = \frac{|F(\omega)|^2}{2\rho c r^2} \quad (6.53)$$

de telle sorte que la puissance rayonnée par la source au travers d'une sphère est bien indépendante du rayon de celle-ci ce qui reflète le principe de conservation de l'énergie :

$$W(R, \omega) = 4\pi R^2 \frac{|F(\omega)|^2}{2\rho c R^2} = 2\pi \frac{|F(\omega)|^2}{\rho c} \quad (6.54)$$

6.6.2 Débit volumique d'une source

Considérons une sphère pulsante dont les parois vibrent à la vitesse normale uniforme v . Soit a le rayon de la sphère. Le champ acoustique induit par ces vibrations possède une symétrie sphérique et est donc nécessairement de la forme :

$$p(r, \omega) = A \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (6.55)$$

La vitesse acoustique en $r = a$ doit être égale à v d'où :

$$v = A \frac{1}{\rho c} \frac{1 + ika}{ika} \frac{e^{-ika}}{a} \quad (6.56)$$

ce qui permet de déterminer la constante A et d'écrire :

$$p(r, \omega) = \frac{i\rho\omega va^2}{1 + ika} \frac{e^{-ik(r-a)}}{r} \quad (6.57)$$

Si on fait tendre a vers 0 mais en laissant le produit $4\pi a^2 v$ constant et égal à q qu'on définit comme le *débit volumique de la source*, on trouve :

$$p(r, \omega) = i\rho\omega q \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (6.58)$$

On trouve donc l'équivalence suivante entre l'amplitude $F(\omega)$ et le débit volumique $q(\omega)$ d'une source ponctuelle :

$$p(r, \omega) = F(\omega) \frac{e^{-ikr}}{r} \Leftrightarrow p(r, \omega) = i\rho\omega q(\omega) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (6.59)$$

$$q(\omega) = \frac{4\pi F(\omega)}{i\rho\omega} \quad (6.60)$$

7

NIVEAUX SONORES

Lorsqu'une porte se ferme, il y en a une qui s'ouvre ; mais nous perdons tellement de temps à contempler, avec regret, la porte fermée, que nous ne voyons pas celle qui vient de s'ouvrir.

Alexander Graham Bell (1847-1922)

Contents

7.1	Échelle des décibels	116
7.2	Addition de niveaux	122
7.3	Octaves et tiers d'octave	125
7.4	Niveaux corrigés et agrégés	131

7.1 Échelle des décibels

7.1.1 Définition

La puissance relative de deux sources peut être décrite par une *différence de niveau* mesurée en décibels¹. Si les deux sources sont respectivement caractérisées par une puissance P_1 et P_2 , leur niveau *relatif* en décibels est donné par :

$$L_2 - L_1 = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \quad (7.1)$$

On peut également définir un niveau de puissance absolu en définissant *conventionnellement* une référence de puissance P_{ref} fixée. Le *niveau* d'une source de puissance P est alors donné par :

$$L = 10 \log \frac{P}{P_{ref}} \quad (7.2)$$

En acoustique, on mesure le niveau sonore en un point donné en ramenant l'intensité sonore en ce point à une intensité de référence ($I_{ref} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$) :

$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_{ref}} \quad (7.3)$$

Or l'intensité sonore peut toujours s'écrire sous la forme (équation 6.21) :

$$I = p_{eff}^2 \frac{Z_r}{|Z|^2} \quad (7.4)$$

On en déduit une définition du niveau sonore exprimée en termes d'amplitude de pression :

$$L_p = 20 \log \frac{p_{eff}}{p_{ref}} \quad (7.5)$$

1. Le décibel, ou dixième de Bel, est une unité (non standard) nommée en l'honneur d'**Alexander Graham Bell**. Bell, né à Edimbourg en 1847 et mort à Beinn Breagh (Canada) en 1922, est connu pour son invention du téléphone (1876) mais il a aussi eu de nombreuses contributions à la phonologie.

où la pression de référence p_{ref} est de $2 \cdot 10^{-5} Pa$ dans l'air et de $1 \mu Pa$ dans l'eau. On déduit de ces définitions que :

- un doublement de la pression conduit à un accroissement du niveau sonore de 6 dB ($20 \log 2 = 6$) ;
- un doublement de l'intensité conduit à un accroissement du niveau sonore de 3 dB ($10 \log 2 = 3$).

L'amplitude du signal d'un monopôle décroissant en fonction inverse de la distance, un doublement de celle-ci produit une réduction du niveau sonore de 6 dB.

Dans l'air, et pour une onde plane, les valeurs de L_I et de L_p sont identiques ; prenons par exemple une onde plane d'amplitude unitaire, on a :

$$L_p = 10 \log \frac{1^2}{2 \times (2 \cdot 10^{-5})^2} = 90.97 \text{ dB} \quad (7.6)$$

$$L_I = 10 \log \frac{1^2}{\frac{2 \cdot 1.225 \cdot 340}{10^{-12}}} = 90.79 \text{ dB} \quad (7.7)$$

Dans tous les autres cas, ces mesures seront différentes. Le niveau d'intensité peut être vu comme la cause du champ sonore et le niveau de pression comme l'effet associé à cette cause et lié à elle par l'impédance acoustique locale.

Les niveaux associés à divers bruits typiques sont donnés aux figures 7.2 et 7.3 dans un diagramme liant l'amplitude de la fluctuation de pression au niveau sonore.

Attention :

Le niveau sonore est une grandeur associée au spectre du signal sonore et non au signal sonore lui-même. On ne peut pas calculer le *niveau instantané* d'un son. Le niveau est en effet associé à l'intensité qui est une grandeur moyenne sur un cycle. Le niveau sonore peut toutefois être calculé sur la base du spectre déduit d'un enregistrement court (par exemple 1s) et donc varier dans le temps à une échelle plus longue (minute, heure, jour).

Milieu concerné	Grandeur physique	Référence usuelle	Unité
Gaz	Pression sonore	$2 \cdot 10^{-5}$	[Pa]
Liquides	Pression sonore	10^{-6}	[Pa]
Tous milieux	Intensité sonore	10^{-12}	[W/m ²]
Solides	Force	10^{-6}	[N]
Tous milieux	Déplacement	à spécifier	[m]
Tous milieux	Vitesse	10^{-9}	[m/s]
Tous milieux	Accélération	10^{-6}	[m/s ²]

Figure 7.1: En dynamique comme en acoustique, l’usage des décibels est très courant. Le tableau ci-dessus donne les valeurs de référence pour différentes grandeurs.

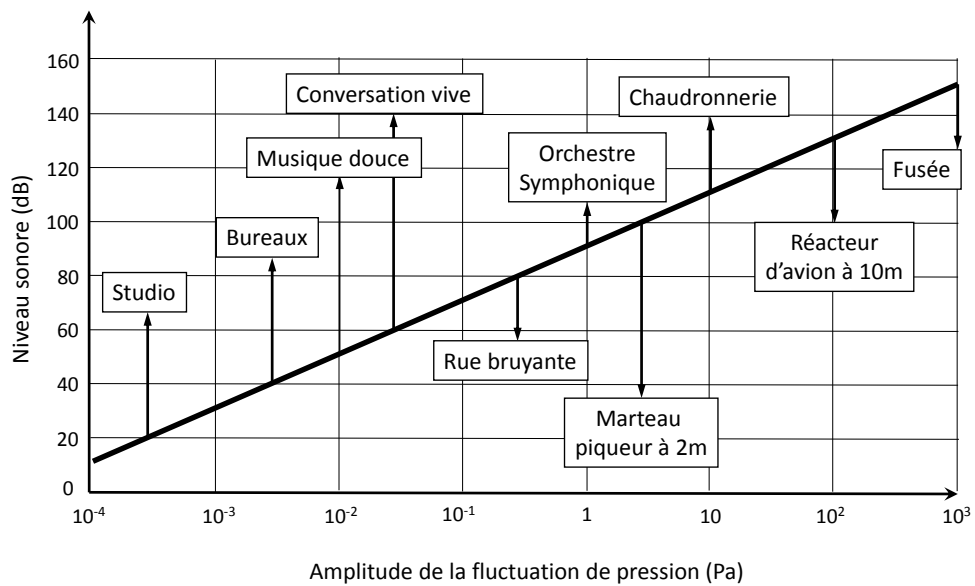
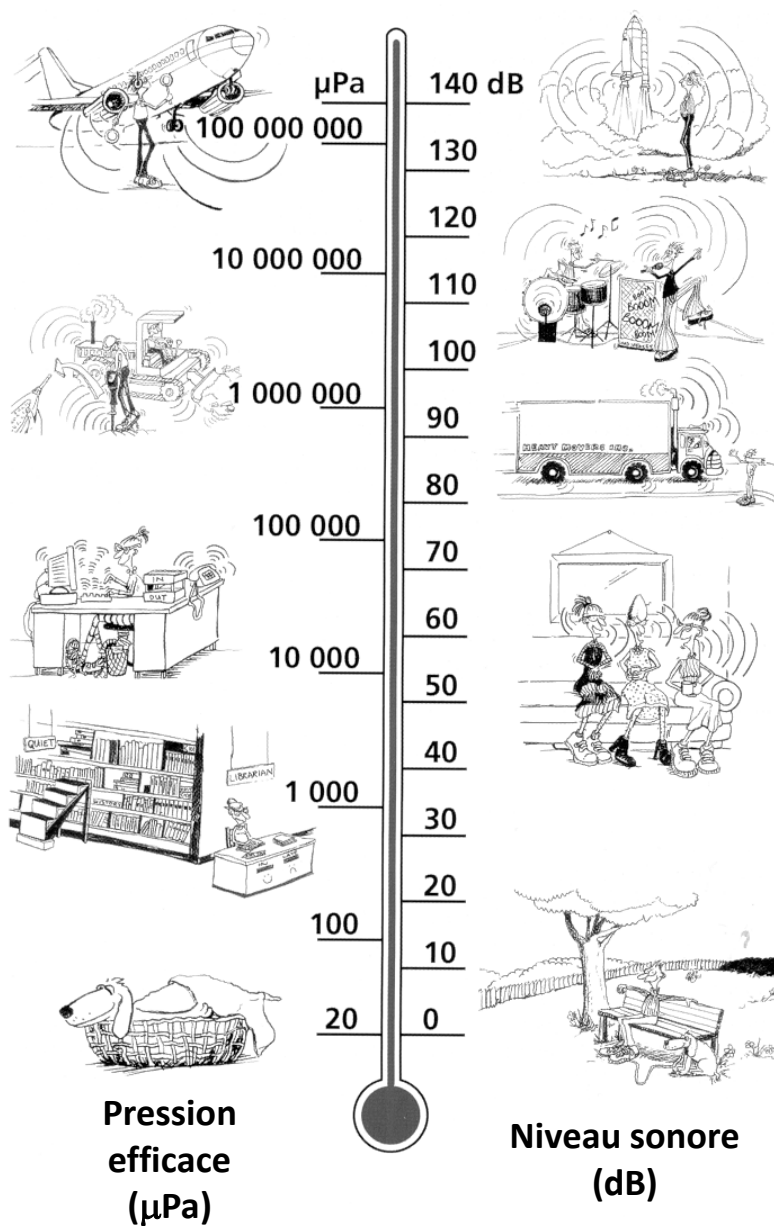


Figure 7.2: Relation entre pression acoustique et niveau sonore et exemples de niveaux caractéristiques.



© Bruel&Kjaer. Used by permission.

Figure 7.3: Relation entre pression acoustique et niveau sonore. Exemples de niveaux caractéristiques.

7.1.2 Lois de Weber et de Fechner

L'utilisation d'une échelle logarithmique pour le niveau sonore se justifie par la nécessité de comprimer l'échelle des pressions acoustiques qui, en valeur absolue, s'étend, pour les sons audibles, sur près de 8 ordres de grandeur (10^{-5} à 10^3 Pa). Elle permet également de reproduire certains attributs de la perception subjective du bruit telle qu'elle ressort des lois physiologiques expérimentales de Weber² et de Fechner³ :

- **Weber** Figure 7.4 s'intéresse au plus petit niveau L_2 qu'un individu est capable de discerner d'un niveau de référence L_1 . Il observe que la différence $L_2 - L_1$ (plus petite variation perceptible, en anglais *difference limen*) n'est pas fixe mais au contraire proportionnelle à L_1 . Un tel comportement est courant dès qu'il s'agit de perception subjective. Un revenu additionnel d'un million de dollars représente par exemple un changement radical pour un individu normal mais ne change pas la donne pour une multinationale dont le chiffre d'affaire se chiffre en milliards. Un genou écorché est une douleur insupportable pour un petit enfant qui n'a jamais été confronté à la douleur ; une légère migraine est insignifiante pour une personne qui souffre par ailleurs d'une grave blessure.
- **Fechner** Figure 7.4 fait l'hypothèse que l'individu estime inconsciemment le niveau perçu en sommant les plus petites différences perceptibles relatives soit en *intégrant* la grandeur $\frac{\Delta I}{I}$. Cette observation conduit à prédire que le niveau perçu est proportionnel au logarithme de l'intensité Figure 7.5.

Ces résultats, anciens, ont été sérieusement remis en question par des expériences plus récentes et ne sont, au mieux, qu'une approximation de la perception réelle⁴.

2. **Ernst Heinrich Weber**, 1795-1878, physiologiste et psychologue allemand, père de la psychologie expérimentale fût professeur à l'université de Leipzig de 1821 à 1871.

3. **Gustav Fechner**, 1801-1887, philosophe et physicien allemand, père de la psychophysique.

4. Pour une discussion accessible mais assez complète du problème de la perception du son : **William Morris Hartmann**, *Signal, sound, sensation*, AIP Press, 1997.



Figure 7.4: Ernst Heinrich Weber et Gustav Fechner.

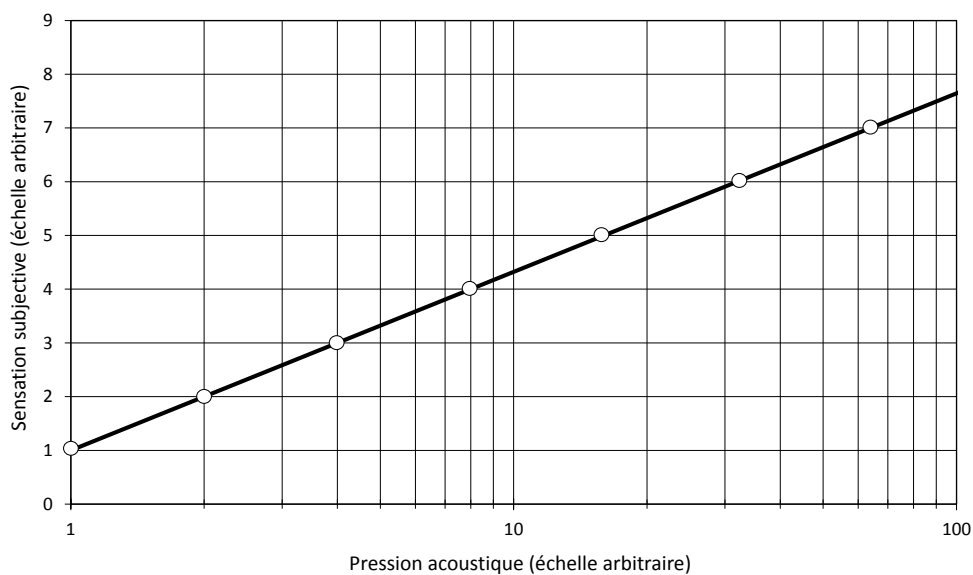


Figure 7.5: Représentation schématique de la loi de Weber-Fechner : si les amplitudes de fluctuation de pression associées à différents sons forment les termes d'une suite *géométrique* ($p_0, p_1 = p_0 \cdot \delta, \dots p_n = p_0 \cdot \delta^n$), les niveaux sonores perçus forment les termes d'une suite *arithmétique* ($L_0, L_1 = L_0 + \Delta, \dots L_n = L_0 + n\Delta$).

7.2 Addition de niveaux

7.2.1 Principe général

Considérons deux sources A et B qui produisent respectivement, en un point donné, les niveaux L_A et L_B . Le niveau sonore induit en ce point par les deux sources agissant simultanément s'obtient en additionnant les **intensités** de chacune des deux sources. Si on se souvient que l'intensité est toujours proportionnelle au carré de la pression (équation 6.21) on obtient :

$$\begin{aligned}
 L_C &= L_A \oplus L_B \\
 &= 10 \log \left(\frac{p_{Aeff}^2}{p_{ref}^2} + \frac{p_{Beff}^2}{p_{ref}^2} \right) \\
 &= 10 \log \left(10^{\frac{L_A}{10}} + 10^{\frac{L_B}{10}} \right) \quad (7.8)
 \end{aligned}$$

On peut exprimer le niveau global en fonction du niveau L_A le plus élevé et de la différence de niveau ΔL :

$$L_C = L_A \oplus L_B = 10 \log \left[10^{\frac{L_A}{10}} \left(1 + 10^{\frac{\Delta L}{10}} \right) \right] = L_A + 10 \log \left(1 + 10^{\frac{\Delta L}{10}} \right) \quad (7.9)$$

Cette expression permet de tracer l'abaque de la figure 7.6 qui donne la correction à apporter au niveau L_A en fonction de ΔL . Il en ressort notamment que la combinaison de deux niveaux identiques ajoute 3 dB à ce niveau Figure 7.7 :

$$L_A \oplus L_A = L_A + 3 \text{ dB} \quad (7.10)$$

La figure 7.7 est correcte parce que le son des deux tondeuses n'est pas cohérent : même si on admettait que le spectre des deux tondeuses est exactement le même en amplitude, il serait irréaliste d'imaginer que la phase des différentes composantes spectrales est identique. S'il s'agissait, en revanche, de deux sources parfaitement en phase, la pression résultante serait double et le niveau sonore total serait supérieur de $20 \log 2 = 6 \text{ dB}$ à celui d'une seule source. Inversement, si les deux sources étaient parfaitement en opposition de

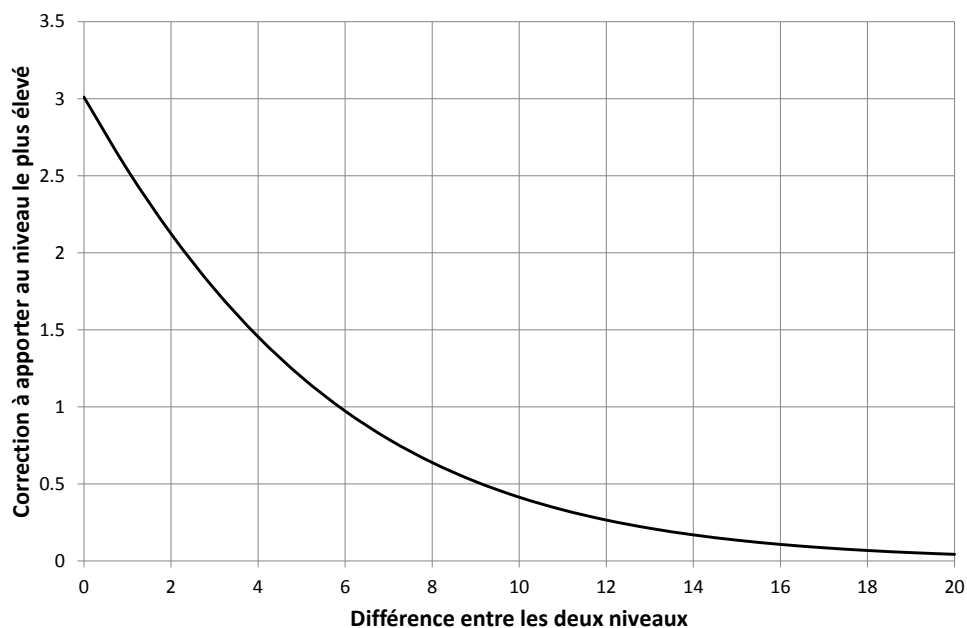
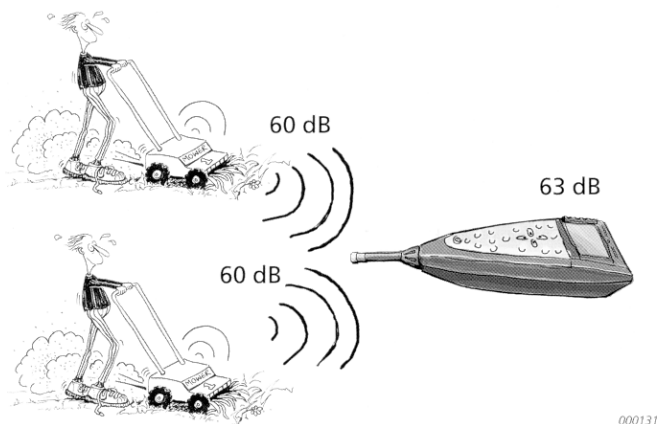


Figure 7.6: Diagramme donnant la correction à appliquer au niveau le plus élevé pour trouver la somme de deux niveaux en fonction de leur différence.



© Bruel&Kjaer. Used by permission.

Figure 7.7: Deux sources de même intensité, sans relation de phase particulière entre elles, créent un niveau sonore de 3 dB supérieur au bruit de chacune des deux sources prises individuellement.

phase, la pression résultante serait nulle et le niveau serait de $-\infty$ dB.

7.2.2 Phénomène de masquage

On constate que lorsque deux sources ont des niveaux sonores très différents, seule la source dominante est réellement perceptible. Cet effet de *masque* qui fait que la source dominante cache les autres, pose un réel problème à l'acousticien. Imaginons par exemple une machine dont le bruit total serait le résultat de la combinaison de trois sources distinctes A, B et C produisant respectivement un niveau sonore de 80, 75 et 73 dB. Le niveau total des trois sources est de 81.8 dB. Assez logiquement, c'est sur la source principale que vont se porter les efforts des ingénieurs; imaginons qu'au fil du temps on arrive à faire baisser le niveau de cette source dominante de 80 à 70 dB. L'impact global sera décevant car le niveau sonore total ($70 \oplus 75 \oplus 73$ dB) est de 77.9 dB soit 4 dB de moins et non 10 dB comme on aurait pu naïvement l'espérer ($80 \text{ dB} - 70 \text{ dB} = 10 \text{ dB}$). En fait, dès que la source A s'est approchée de la source B, et *a fortiori* lorsque le niveau de A est passé sous celui de B, les efforts auraient dû être orientés vers A et B simultanément (voir tableau ci-dessous).

L_A	$L_A \oplus L_B \oplus L_C$	Effet marginal
80	81.81	
79	81.17	-0.63
78	80.59	-0.58
77	80.07	-0.52
76	79.61	-0.46
75	79.20	-0.41
74	78.85	-0.35
73	78.54	-0.30
72	78.29	-0.26
71	78.07	-0.22
70	77.89	-0.18

Un exemple typique de ce jeu de cache-cache où chaque amélioration sur une source en fait apparaître une autre est l'automobile. Dans une voiture, le bruit

de moteur a longtemps dominé. Maintenant que des progrès substantiels ont été accomplis, le bruit de roulement devient une des préoccupations majeures. Lorsque ce bruit sera sous contrôle, c'est le bruit aérodynamique qui posera problème. Finalement, lorsque toutes les sources auront été amenées à un niveau à peu près égal, les progrès devront se faire de manière équilibrée sous peine de faire à nouveau ressortir une des composantes du bruit global.

Un autre exemple est celui d'un réacteur d'avion. Les turboréacteurs à double flux modernes sont caractérisés par un taux de dilution (*by pass ratio* - rapport entre la partie du débit d'air ne passant pas par la chambre de combustion et le débit d'air traversant celle-ci) important (jusqu'à 9 ou 10 voire 15 sur de futures générations de moteurs). Le but est de réduire la vitesse moyenne d'éjection et donc le bruit de jet. Cette stratégie a porté ses fruits et le bruit de jet a été significativement réduit. Le résultat net est cependant moins sensible puisque la réduction du bruit de jet a *démasqué* le bruit de soufflante (*fan noise*) qui a un fort contenu tonal. Cette composante est en outre accrue par la simple augmentation du diamètre de la soufflante et par l'augmentation de la vitesse en bout de pale.

7.3 Octaves et tiers d'octave

On découpe souvent le domaine des fréquences audibles en bandes d'octave ou de tiers d'octave (voir les figures 7.8 et 7.10). On constate que, conformément à la définition d'une octave musicale, la fréquence centrale d'une bande d'octave est double de celle de la bande d'octave précédente ; la deuxième et la quatrième bandes font cependant exception afin d'avoir, pour les bandes supérieures, des fréquences centrales exprimées par des chiffres ronds. De même, les fréquences centrales de bandes de tiers d'octave successives sont dans un rapport $\sqrt[3]{2}$ mais la norme a arrondi les termes de la progression géométrique correspondante. Cet arrondi a par ailleurs l'avantage que, en termes de décade, les fréquences centrales des bandes de tiers d'octave sont représentées par un chiffre rond (voir la dernière colonne de la figure 7.10) qui fournit une numérotation naturelle de ces bandes. On désignera par exemple la bande de tiers d'octave centrée sur 10 kHz par le numéro 40.

Bandes d'octave standardisées			
Numéro	$f_{centrale}$	f_{min}	f_{max}
1	16	0	22,4
2	31,5	22,4	45
3	63	45	90
4	125	90	180
5	250	180	355
6	500	355	710
7	1 000	710	1 400
8	2 000	1 400	2 800
9	4 000	2 800	5 600
10	8 000	5 600	11 200
11	16 000	11 200	22 400
12	31 500	22 400	-

Figure 7.8: Définition normalisée des bandes d'octave.

7.3.1 Niveau par bande

Le niveau sonore dans une bande de fréquence donnée s'obtient en calculant l'énergie totale du signal acoustique dans cette bande de fréquence. Si le spectre du signal considéré est continu, on calcule l'intégrale du spectre sur cette bande de fréquence. S'il est discret, on doit simplement combiner les pressions quadratiques correspondant à chacun des tons présents dans la bande. Le spectre $P(\omega)$ est appelé *spectre en bandes fines* alors que l'histogramme représentant le niveau dans chaque bande de fréquences est appelé *spectre en bandes d'octave ou de tiers d'octave*. En pratique, on applique au spectre en bande fine un filtre passe-bande Figure 7.9 avant de calculer le niveau total de la bande. Ce filtre, continu et dérivable, évite une troncature trop brutale aux bornes de la bande ; une composante tonale proche d'une borne contribue ainsi partiellement aux deux bandes délimitées par cette borne.

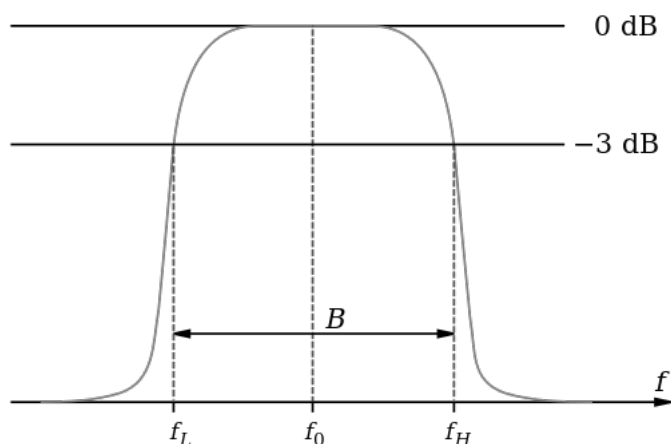


Figure 7.9: Schéma de principe d'un filtre passe-bande.

7.3.2 Bruits blanc, rose et brun

Un bruit blanc est caractérisé par un spectre constant en bandes fines Figure 7.11. Le niveau dans la bande d'octave n est donc de 3 dB supérieur à celui de la bande $n - 1$ puisque celle-ci est deux fois moins large. Un bruit rose a un spectre en bandes fines décroissant en $\frac{1}{f}$ de telle sorte que le niveau en bandes d'octave soit constant quelle que soit la bande choisie. Un bruit brun⁵ possède une décroissance spectrale plus rapide, typiquement en $\frac{1}{f^2}$. Les figures 7.12 à 7.14 montrent des spectres synthétiques approximant des bruits respectivement blanc, rose et brun.

5. L'adjectif *brun* dérive abusivement du qualificatif anglais *brown* qui ne se réfère pas à la couleur mais au mouvement *brownien* dont le comportement aléatoire est caractérisé par une décroissance quadratique de la densité spectrale de puissance.

Bandes de tiers d'octave standardisées				
Numéro	$f_{centrale}$	f_{min}	f_{max}	$10 \log_{10} f_c$
1	16	-	18	12.0
2	20	18	22,4	13.0
3	25	22,4	28	14.0
4	31,5	28	35,5	15.0
5	40	35,5	45	16.0
6	50	45	56	17.0
7	63	56	71	18.0
8	80	71	90	19.0
9	100	90	112	20.0
10	125	112	140	21.0
11	160	140	180	22.0
12	200	180	224	23.0
13	250	224	280	24.0
14	315	280	355	25.0
15	400	355	450	26.0
16	500	450	560	27.0
17	630	560	710	28.0
18	800	710	900	29.0
19	1 000	900	1.120	30.0
20	1 250	1 120	1 400	31.0
21	1 600	1 400	1 800	32.0
22	2 000	1 800	2 240	33.0
23	2 500	2 240	2 800	34.0
24	3 150	2 800	3 550	35.0
25	4 000	3 550	4 500	36.0
26	5 000	4 500	5 600	37.0
27	6 300	5 600	7 100	38.0
28	8 000	7 100	9 000	39.0
29	10 000	9 000	11 200	40.0
30	12 500	11 200	14 000	41.0
31	16 000	14 000	18 000	42.0
32	20 000	18 000	22 400	43.0
33	25 000	22 400	28 000	44.0
34	31 500	28 000	-	45.0

Figure 7.10: Définition normalisée des bandes de tiers d'octave.

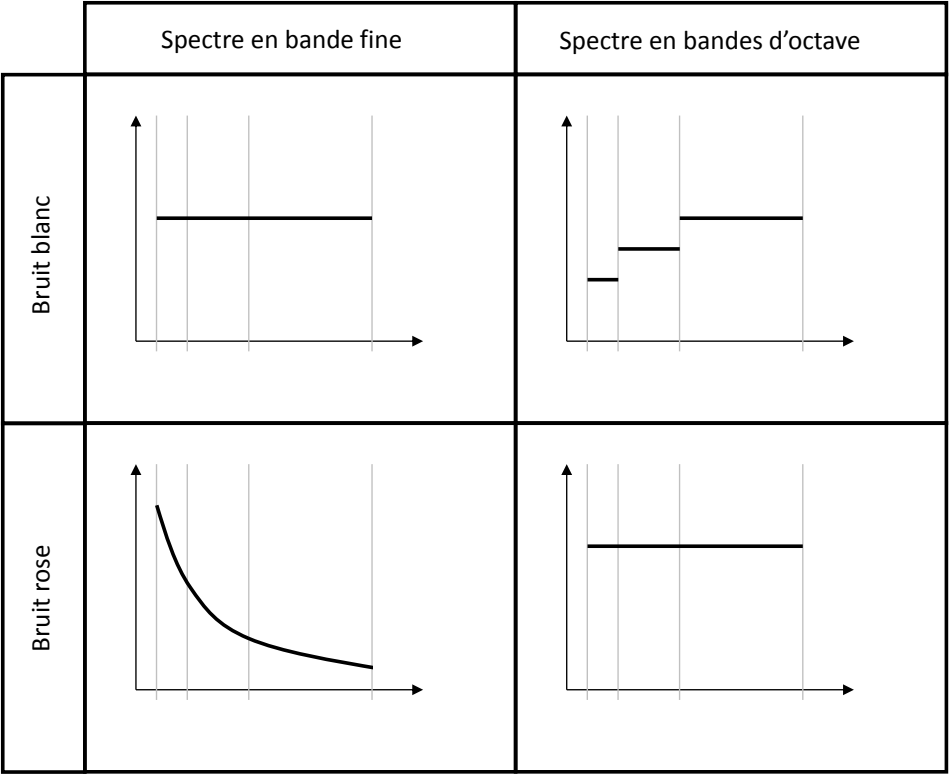


Figure 7.11: Spectres en bandes fines et en bandes d'octave pour un bruit blanc et un bruit rose.

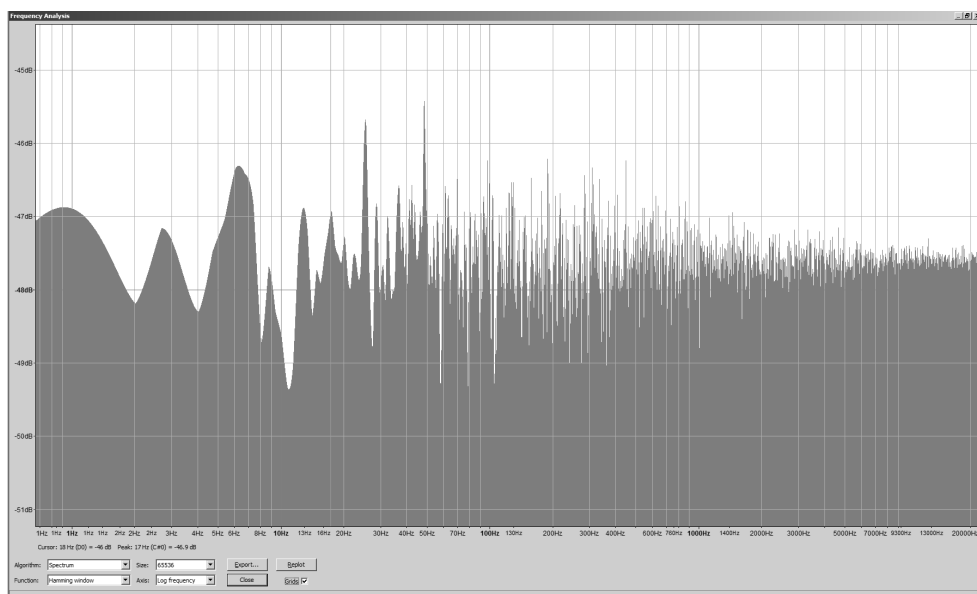


Figure 7.12: Spectre en bandes fines d'un signal synthétique approchant un bruit blanc. Signal et spectre générés par le logiciel Audacity.

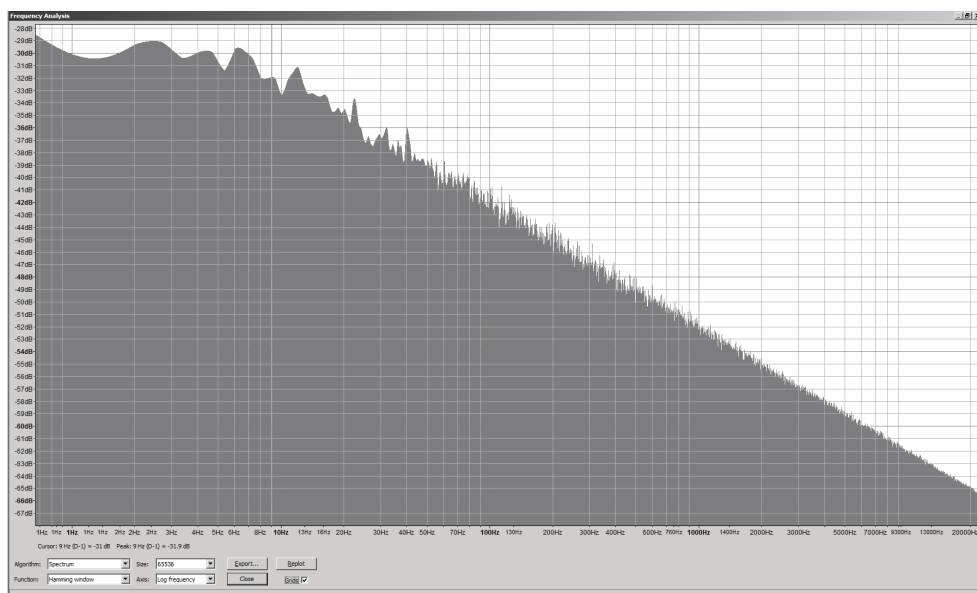


Figure 7.13: Spectre en bandes fines d'un signal synthétique approchant un bruit rose. Signal et spectre générés par le logiciel Audacity.

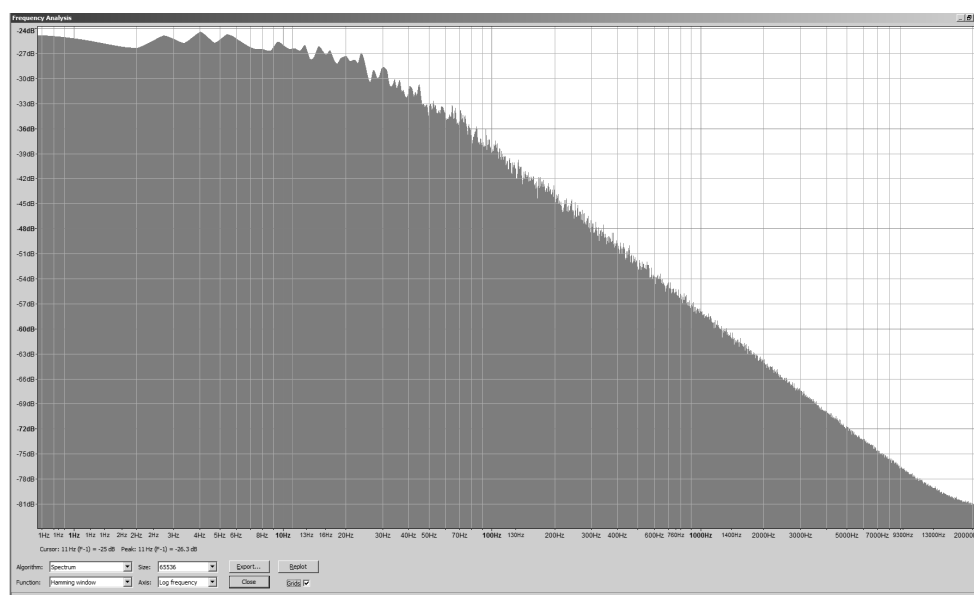


Figure 7.14: Spectre en bandes fines d'un signal synthétique approchant un bruit brun. Signal et spectre générés par le logiciel Audacity.

7.4

Niveaux corrigés et agrégés

La sonie (*loudness*) désigne la force d'un son en tant que sensation auditive. Bien que le choix d'une échelle logarithmique pour la mesure du niveau sonore soit (en partie) basée sur des motivations psycho-physiologiques (lois de Weber-Fechner) l'expérience montre que sonie et niveaux ne sont pas des concepts identiques. Dans cette section nous verrons successivement quelques définitions d'indicateurs objectifs plus proches de la sensation subjective de nuisance sonore :

- la notion de dbA et les autres niveaux filtrés apparentés ;
- la notion de niveau équivalent et ses différentes déclinaisons ;
- le niveau EPNdB ;
- l'indicateur NR.

7.4.1 Courbes de Fletcher et Munson

L'oreille n'est pas également sensible à toutes les fréquences. De nombreuses expériences, inaugurées par celles de Fletcher et Munson⁶, ont été réalisées afin de quantifier cette dépendance fréquentielle de l'acuité auditive ; elles consistent à faire entendre un son de référence (fréquence 1 kHz, niveau L) à un auditeur puis de lui faire entendre un son à une autre fréquence en lui demandant de régler le volume afin que ce nouveau son soit au même niveau *apparent* que le son original. Répétée sur de nombreux individus, pour toutes les fréquences du spectre audible et pour différents niveaux de référence, l'expérience aboutit à des courbes d'égal niveau perceptif (*loudness*) graduées en phones Figure 7.15. Les principales caractéristiques de ces courbes sont :

- une faible sensibilité de l'oreille à basse et haute fréquences ;
- un maximum de sensibilité vers 3 à 4 kHz qui correspond à la résonance quart d'onde du canal de l'oreille ($f = 3.400 \text{ Hz} \rightarrow \lambda/4 = 2.5 \text{ cm}$, voir la section 10.2.4) ;
- un aplatissement de la courbe d'égal niveau perceptif avec le niveau de référence ;
- une référence à 1 000 Hz : le niveau sonore en dB et le *loudness* en phones coïncident à cette fréquence.

De nombreux auteurs critiquent les courbes normalisées d'égal niveau perceptif indiquant notamment le caractère artificiel du mode opératoire qui est basé sur l'écoute de sons purs et continus auxquels l'oreille et le cerveau ne réagissent pas de la même manière qu'à des sons réels complexes et variant dans le temps.

7.4.2 Filtres

Les sonomètres et autres instruments de mesure du bruit sont en général équipés de filtres dits A, B, C, D et U qui filtrent le signal mesuré de manière à reproduire approximativement les niveaux perçus. La spécification des filtres

6. **Fletcher H., Munson W.A.**, *Loudness, its definition, measurement and calculation*, J.Acoust.Soc.Am. 5 (1933), pp.82-108

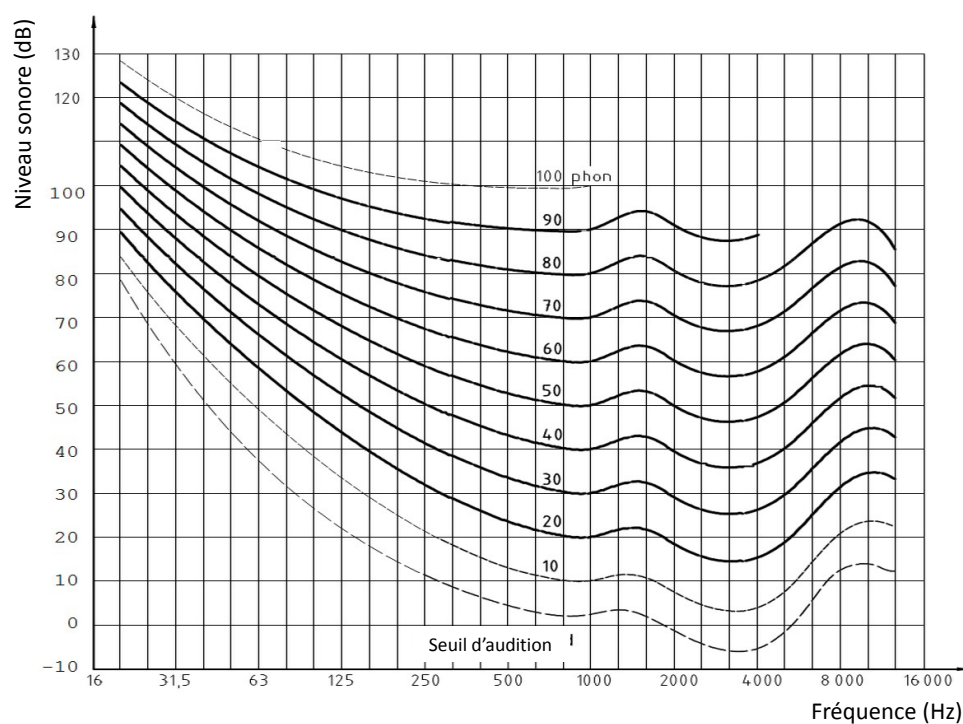


Figure 7.15: Courbes d'égale perception (*loudness*) suivant la norme ISO226-2003 qui améliore sensiblement les courbes originales de Fletcher et Munson.

A, C et U est donnée à la figure 7.17 et celle des filtres A, B, C et D à la figure 7.16. Les filtres A, B et C reproduisent approximativement les courbes isophones à 40, 70 et 100 dB. Le filtre D a été développé à l'origine pour les besoins spécifiques de la mesure des nuisances aéroportuaires mais est aujourd'hui remplacé par les niveaux EPNdB Section 7.4.5. Le filtre U a été introduit assez récemment dans le cadre de la mesure de sons audibles en présence d'ultrasons ; il peut être combiné au filtre A pour former le filtre AU. Aujourd'hui le filtre A, malgré d'évidentes lacunes, est très largement utilisé en acoustique environnementale. La pondération A est formellement définie par le filtre suivant :

$$A(f) = \frac{12200^2 f^4}{(f^2 + 20.6^2)(f^2 + 12200^2)\sqrt{(f^2 + 107.7^2)(f^2 + 737.9^2)}} \quad (7.11)$$

où f est la fréquence en Hz. La correction en dB par rapport à 1 000 Hz est dès lors donnée par :

$$20 \log \left(\frac{A(f)}{A(1000)} \right) \quad (7.12)$$

On a de même pour les autres filtres :

$$B(f) = \frac{12200^2 f^3}{(f^2 + 20.6^2)(f^2 + 12200^2)\sqrt{(f^2 + 158.5^2)}} \quad (7.13)$$

$$C(f) = \frac{12200^2 f^2}{(f^2 + 20.6^2)(f^2 + 12200^2)} \quad (7.14)$$

$$D(f) = \frac{f}{6.89669 \cdot 10^{-5}} \sqrt{\frac{h(f)}{(f^2 + 79919.29^2)(f^2 + 1345600)}} \quad (7.15)$$

avec dans la dernière expression :

$$h(f) = \frac{(1037918.48 - f^2)^2 + 1080768.16 f^2}{(9837328 - f^2)^2 + 11723776 f^2} \quad (7.16)$$

Habituellement, on liste les facteurs correctifs associés à la pondération A aux fréquences nominales des bandes d'octave ou de tiers d'octave (telles que 1 250 Hz ou 2 500 Hz). Idéalement, ces facteurs devraient être évalués pour les fréquences exactes déterminées *via* la formule $1000 \cdot 10^{\frac{n}{10}}$ où n est un entier positif ou négatif. Dans ces conditions, la fréquence présentée comme étant celle de 1 250 Hz est en fait, plus précisément, égale à 1 258.9 Hz et

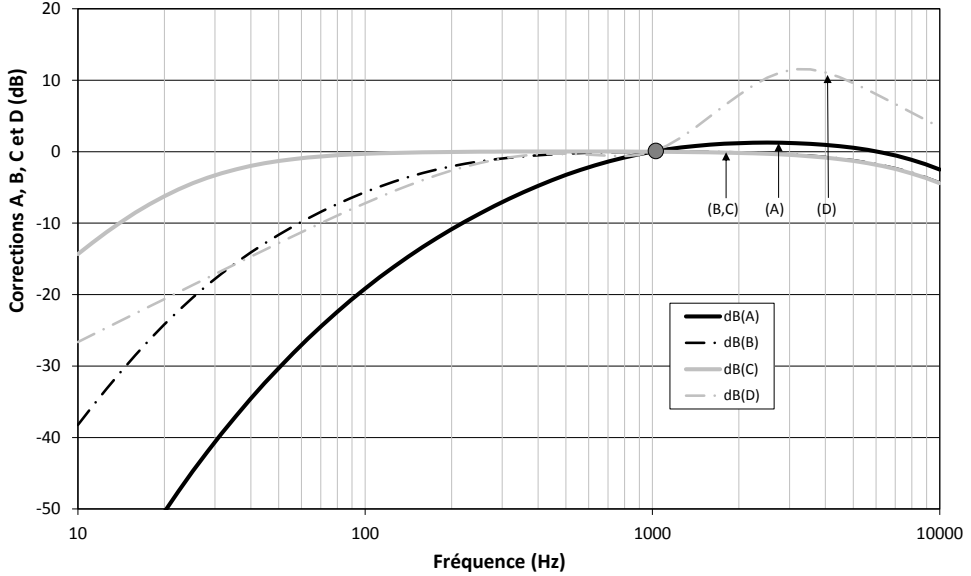


Figure 7.16: Graphe donnant la correction à appliquer au niveau en dB pour obtenir les niveau dBA, dBB, dBC et dBD.

ainsi de suite. Notons que les corrections ci-dessus sont des filtres auxquels des réponses impulsionnelles peuvent être associées. Au signal temporel $p(t)$ peut, par exemple, être associé un signal filtré $p_A(t)$:

$$p_A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) \cdot a(t - \tau) \cdot d\tau \quad (7.17)$$

avec

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7.18)$$

7.4.3

Niveaux équivalents et niveaux statistiques

Le niveau *instantané*, calculé sur base du spectre résultant d'un enregistrement court, n'est pas représentatif de la nuisance ressentie par un individu soumis pendant une longue durée à un environnement sonore d'amplitude

Fréquence conventionnelle Hz	Fréquence exacte Hz	Correction A dB	Correction C dB	Correction U dB
10	10.00	-70.4	-14.3	0.0
12.5	12.59	-63.4	-11.2	0.0
16	15.85	-56.7	- 8.5	0.0
20	19.95	-50.5	- 6.2	0.0
25	25.12	-44.7	- 4.4	0.0
31.5	31.62	-39.4	- 3.0	0.0
40	39.81	-34.6	- 2.0	0.0
50	50.12	-30.2	- 1.3	0.0
63	63.10	-26.2	- 0.8	0.0
80	79.43	-22.5	- 0.5	0.0
100	100.00	-19.1	- 0.3	0.0
125	125.90	-16.1	- 0.2	0.0
160	158.50	-13.4	- 0.1	0.0
200	199.50	-10.9	0.0	0.0
250	251.20	- 8.6	0.0	0.0
315	316.20	- 6.6	0.0	0.0
400	398.10	- 4.8	0.0	0.0
500	501.20	- 3.2	0.0	0.0
630	631.00	- 1.9	0.0	0.0
800	794.30	- 0.8	0.0	0.0
1 000	1 000.00	0.0	0.0	0.0
1 250	1 259.00	+ 0.6	0.0	0.0
1 600	1 585.00	+ 1.0	- 0.1	0.0
2 000	1 995.00	+ 1.2	- 0.2	0.0
2 500	2 512.00	+ 1.3	- 0.3	0.0
3 150	3 162.00	+ 1.2	- 0.5	0.0
4 000	3 981.00	+ 1.0	- 0.8	0.0
5 000	5 012.00	+ 0.5	- 1.3	0.0
6 300	6 310.00	- 0.1	- 2.0	0.0
8 000	7 943.00	- 1.1	- 3.0	0.0
10 000	10 000.00	- 2.5	- 4.4	0.0
12 500	12 590.00	- 4.3	- 6.2	- 2.8
16 000	15 850.00	- 6.6	- 8.5	-13.0
20 000	19 950.00	- 9.3	-11.2	-25.3

Figure 7.17: Facteurs correctifs associés aux filtres A, C et U.

variable. Le niveau de bruit continu équivalent ou $L_{eq}(T)$ est le niveau d'un signal imaginaire continu qui, dans un intervalle de temps T donné, produirait la même énergie que le signal fluctuant :

$$L_{eq}(T) = 10 \cdot \log \int_0^T \frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2} dt \quad (7.19)$$

Le calcul du niveau équivalent se faisant sur les données temporelles brutes, celui-ci n'est pas lié à une bande de fréquence déterminée. Un niveau équivalent par bande peut toutefois être calculé en filtrant au préalable le signal temporel par le filtre de bande adéquat. Le niveau équivalent est souvent exprimé en dBA ; ceci requiert le filtrage préalable du signal temporel par le filtre $A(f)$. La durée de la période de référence T peut varier d'une fraction de seconde à une année. Parmi les durées standard, on trouve notamment $t_{slow} = 1s$, $t_{fast} = 0.125s$ et $t_{peak} = 0.035s$. Le niveau L_{Amax} est par exemple défini comme le maximum de la variation $L_{Aeq}(t_{short})$ sur un intervalle de temps donné $T \gg t_{slow}$. On peut encore définir des niveaux de dépassement statistique : L_{AN} est le niveau dépassé durant N pourcent de la période de mesure. Les niveaux statistiques suivants ont une dénomination particuliers : L_{A10} est appelé *niveau de bruit maximum moyen* et L_{A90} le *niveau de bruit de fond minimum moyen*. Tous ces niveaux équivalents et statistiques sont mis en évidence à la figure 7.18 sur un exemple d'enregistrement de bruit urbain.

7.4.4 L_{den}

La Commission européenne a défini un niveau équivalent particulier qui sert de référence pour la caractérisation de l'environnement sonore à long terme. Ce niveau, baptisé L_{den} (*den* pour *day, evening, night*) est calculé comme suit :

$$L_{den} = 10 \log \frac{12 \cdot 10^{\frac{L_{AD}}{10}} + 4 \cdot 10^{\frac{L_{AE}+5}{10}} + 8 \cdot 10^{\frac{L_{AN}+10}{10}}}{24} \quad (7.20)$$

où :

- L_{AD} est le niveau continu équivalent mesuré en dBA sur une année complète sur la plage horaire de 7h à 19h (D=day) ;

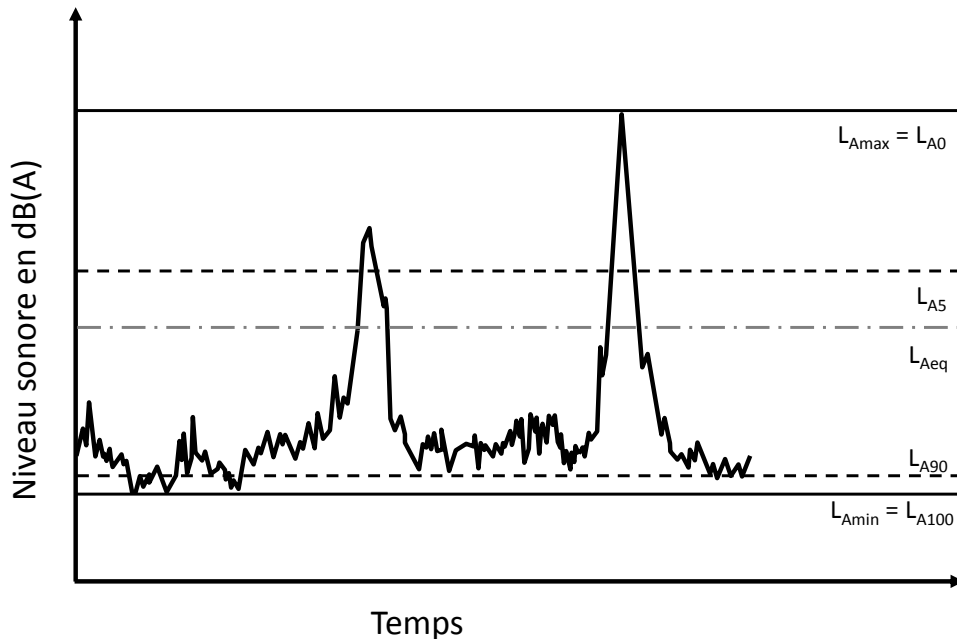


Figure 7.18: Niveaux équivalents et statistiques.

- L_{AE} est le niveau continu équivalent mesuré en dBA sur une année complète sur la plage horaire de 19h à 23h (E=evening) ;
- L_{AN} est le niveau continu équivalent mesuré en dBA sur une année complète sur la plage horaire de 23h à 7h (N=night).

La logique qui conduit à l'expression du niveau L_{den} est la suivante :

- le niveau équivalent mesuré sur une plage horaire est pondéré par la durée de cette tranche horaire ;
- le niveau équivalent mesuré en soirée est majoré de 5 dB et celui de la nuit de 10 dB considérant que la nuisance subjective est plus élevée à ces périodes du jour où la tolérance au bruit diminue.

7.4.5 EPNdB

La mesure de la nuisance aéroportuaire est basée sur une quantité particulière baptisée EPNdB pour *Effective Perceived Noise Level*. Son mode de calcul est

décrit dans la norme *Federal Aviation Regulation, Part 36, Section A36.4* et ne sera pas présenté ici.

7.4.6 Noise Rating (NR)

Le niveau NR (*Noise Rating*, norme ISO) est défini par une série de courbes sur lesquelles on vient reporter le niveau sonore en bande d'octave du signal à étudier Figure 7.19. Le niveau NR est défini par la courbe NR la plus élevée atteinte par le spectre. Les niveaux NR sont très utilisés en acoustique architecturale pour la définition de niveaux maximums admissibles en fonction du type d'usage, par exemple NR10 à NR20 pour des mesures audiométriques, NR20 à NR30 pour des salles de classe, NR30 à NR40 pour des bureaux calmes, NR60 à NR70 pour des locaux industriels.

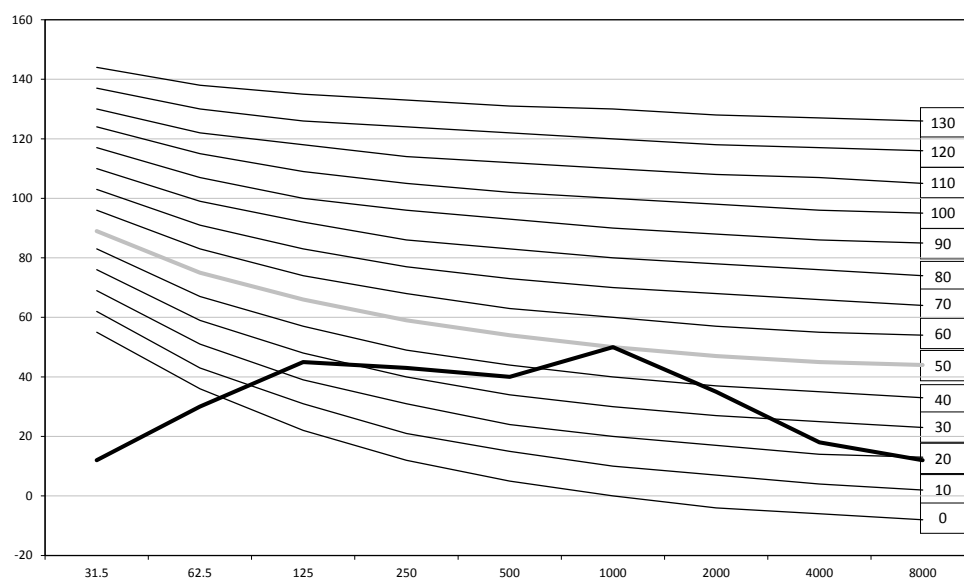


Figure 7.19: Courbes NR : la courbe d'indice NR le plus élevé que touche le spectre représenté en trait gras est la courbe NR50 (en gris) ; le niveau de bruit correspondant est donc caractérisé par l'indice NR50.

Part II

FUNDAMENTAL PHENOMENA
OF LINEAR ACOUSTICS

8

RÉFLEXION ET ABSORPTION

Il marqua un temps d'arrêt et scanda ces derniers mots : J'ai de l'asthme. Le mot courut le long de la rangée de droite jusqu'au comptoir de la patronne, d'où, avec un nouvel élan, il revint par la rangée de gauche mourir à la porte.

Marcel Aymé (1902-1967) *in* Brûlebois (1930).

Contents

8.1	Réflexion sous incidence normale	144
8.2	Réflexion sous incidence oblique	153
8.3	Réflexion d'une source monopolaire	158
8.4	Notes sur la notion d'impédance	174
8.5	Temps de réverbération	183

Ce chapitre présente la théorie de la réflexion des ondes sur les parois solides et introduit la notion d'absorption. Les principaux concepts de l'acoustique des salles sont aussi couverts.

Réflexion d'une onde plane

8.1 sous incidence normale

8.1.1 Surface à vitesse nulle

Analyse dans le domaine du temps

L'équation 4.26 montre que, en l'absence de source, le gradient de pression est directement proportionnel à l'accélération des particules de fluide :

$$\partial_t v_{ia} = -\frac{1}{\rho_0} \partial_i p_a \quad (8.1)$$

Au droit d'une paroi fixe l'accélération de la particule de fluide doit s'annuler et le gradient de pression doit donc être nul également. Reprenons la solution générale de l'équation d'onde à une dimension et voyons comment se comporte cette solution lorsqu'on impose une vitesse nulle en $x = x_0$. On cherche en fait une solution de la forme :

$$p(x, t) = p^+ \left(t - \frac{x}{c} \right) + p^- \left(t + \frac{x}{c} \right) \quad (8.2)$$

mais telle que :

$$\left(\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \right)_{x=x_0} = 0 \quad (8.3)$$

On sait que la dérivée d'une fonction symétrique est antisymétrique ; il suffit donc de prendre p^- symétrique de p^+ par rapport à x_0 pour que la dérivée de $(p^+ + p^-)$ soit nulle en $x = x_0$. La solution générale de l'équation d'onde unidimensionnelle en présence d'une paroi parfaitement rigide en $x = x_0$ est

donc (en notant $p_i \doteq p^+ = p^-$) :

$$p(x, t) = p_i \left(t - \frac{x}{c} \right) + p_i \left(t + \frac{x - 2x_0}{c} \right) \quad (8.4)$$

Soit, si $x_0 = 0$:

$$p(x, t) = p_i \left(t - \frac{x}{c} \right) + p_i \left(t + \frac{x}{c} \right) \quad (8.5)$$

Un cas particulier est montré à la figure 8.1 où l'on voit une perturbation acoustique avancer vers la paroi, s'y comprimer puis revenir en sens inverse. Conformément à l'équation 8.4, cette solution peut s'interpréter comme la combinaison de deux ondes dont les profils sont symétriques par rapport à $x = x_0$, l'une se propageant de gauche à droite et l'autre de droite à gauche : lorsqu'une onde heurte une paroi rigide, tout se passe comme si la paroi n'existait pas mais engendrait, par un effet de miroir, une onde symétrique de l'onde incidente.

Analyse dans le domaine des fréquences

Considérons une onde incidente se propageant le long de l'axe x de la gauche vers la droite et heurtant une surface à vitesse nulle constituée par le plan $x = 0$ Figure 8.2. La pression acoustique dans un système 1D est toujours de la forme :

$$p(x, \omega) = p^+(\omega)e^{-ikx} + p^-(\omega)e^{ikx} \quad (8.6)$$

La vitesse associée est donnée par :

$$v_x(x, \omega) = \frac{p^+(\omega)}{\rho c} e^{-ikx} - \frac{p^-(\omega)}{\rho c} e^{ikx} \quad (8.7)$$

mais elle doit être nulle en $x = 0$ ce qui impose :

$$v_x(0, \omega) = \frac{p^+(\omega) - p^-(\omega)}{\rho c} = 0 \rightarrow p^+ = p^- \doteq p_i \quad (8.8)$$

d'où :

$$p(x, \omega) = p_i(\omega) (e^{-ikx} + e^{ikx}) = 2p_i(\omega) \cos kx \quad (8.9)$$

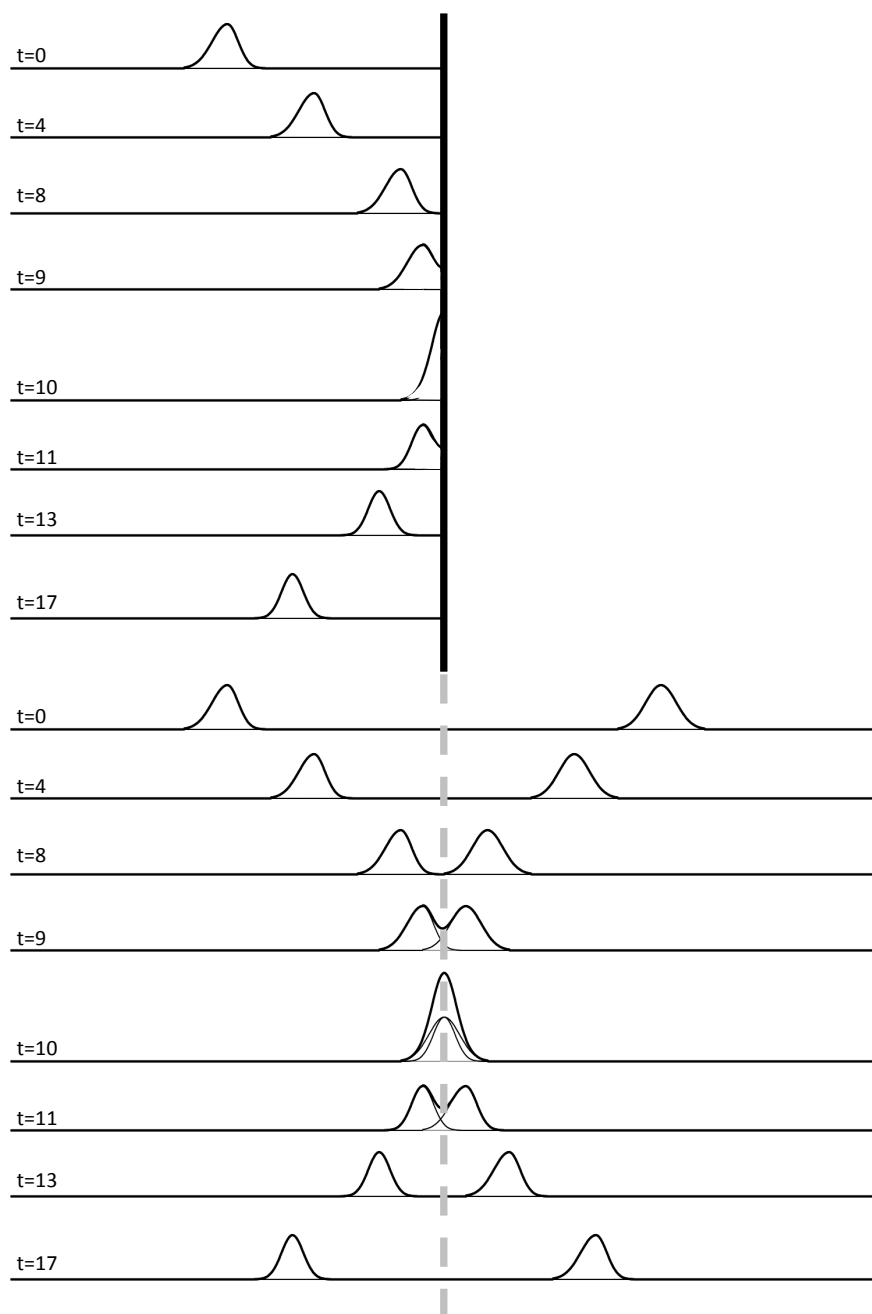


Figure 8.1: Réflexion d'une onde plane sur une paroi rigide (figure du haut). Cette paroi agit en fait comme un miroir superposant à l'onde incidente une onde réfléchie symétrique de la première (figure du bas).

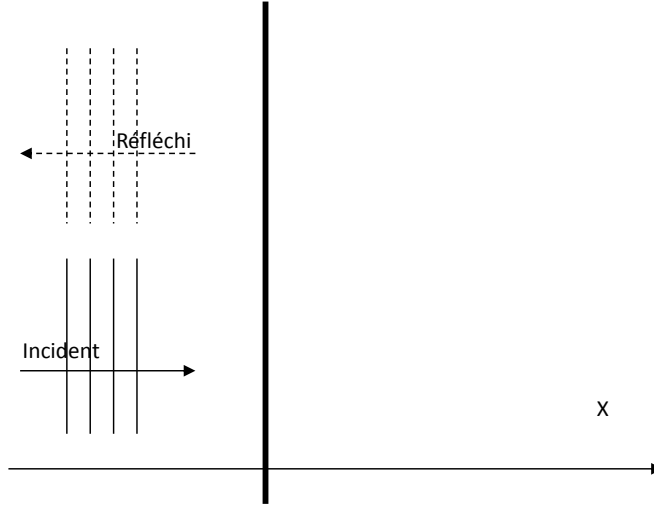


Figure 8.2: Réflexion d'une onde plane sur une surface rigide (incidence normale).

ce qui est bien la transformée de Fourier de l'équation 8.5. La vitesse est donnée par :

$$v_x(x, \omega) = \frac{p_i}{\rho c} (e^{-ikx} - e^{ikx}) = \frac{-2ip_i(\omega)}{\rho c} \sin kx \quad (8.10)$$

L'impédance en tout point du champ sonore est donnée par :

$$Z_x(x, \omega) = \frac{p(x, \omega)}{v_x(x, \omega)} = i\rho c \frac{\cos(kx)}{\sin(kx)} \quad (8.11)$$

L'impédance est *purement imaginaire* car pression et vitesse sont en quadrature de phase. L'intensité active est donc nulle car, à l'intensité propagée de gauche à droite par l'onde incidente, correspond une intensité, égale mais opposée, correspondant à l'onde réfléchi : les deux ondes interfèrent entre elles pour former une onde stationnaire. Sur la surface rigide, la pression est double de celle correspondant à l'onde incidente :

$$p(0, \omega) = 2p_i(\omega) \quad (8.12)$$

Absorption, épaisseur de matériau et longueur d'onde

On constate que la vitesse est maximale pour $x = \lambda/4$. La plupart des matériaux absorbants sont de type résistif et la dissipation d'énergie y est proportionnelle à la vitesse des particules d'air. On en tire les conclusions intuitives suivantes :

1. Une couche de matériau absorbant posée sur une paroi ne sera efficace, à une fréquence donnée, que si l'épaisseur est d'au moins un quart de longueur d'onde.
2. L'efficacité d'un tel matériau dépend de la fréquence : une épaisseur de moquette d'un centimètre d'épaisseur ne deviendra par exemple efficace qu'au-delà de 8 kHz.
3. Une mince couche de matériau placée à une distance $\lambda/4$ de la paroi sera beaucoup plus efficace que la même couche placée à même la paroi.

8.1.2 Surface à pression nulle

Analyse dans le domaine du temps

Supposons qu'on veuille imposer une pression acoustique nulle en $x = x_0$. On peut inférer, par une analyse similaire à celle du paragraphe précédent, une solution générale de l'équation d'onde satisfaisant à cette condition. Cette solution apparaît comme la somme de deux fonctions **antisymétriques** par rapport à $x = x_0$:

$$p(x, t) = p_i \left(t - \frac{x}{c} \right) - p_i \left(t + \frac{x - 2x_0}{c} \right) \quad (8.13)$$

Un cas particulier est illustré à la figure 8.3. Une condition de pression nulle agit comme un *antimiroir* : tout se passe comme si une onde antisymétrique se superposait à l'onde incidente pour garantir que la condition est bien respectée. Une condition de pression acoustique nulle n'est pas rencontrée couramment en pratique mais on peut par exemple considérer, comme on le fait en acoustique sous-marine, que la surface libre d'un liquide porte une telle condition. L'extrémité ouverte d'un tube, d'une flûte par exemple, est bien

approximée par une condition de pression nulle aux fréquences où la longueur d'onde est nettement plus grande que le diamètre du tube.

Analyse dans le domaine des fréquences

La solution dans le domaine des fréquences s'écrit simplement :

$$p(x, \omega) = p_i(\omega) (e^{-ikx} - e^{ikx}) = -2ip_i(\omega) \sin kx \quad (8.14)$$

L'onde réfléchie est identique à l'onde incidente mais elle est cette fois *déphasée de π* par rapport à celle-ci.

8.1.3 Surface absorbante

Analyse dans le domaine des fréquences

Considérons maintenant un plan partiellement absorbant. Le point de départ est toujours la solution générale :

$$p(x, \omega) = p^+(\omega) e^{-ikx} + p^-(\omega) e^{ikx} \quad (8.15)$$

La vitesse à la paroi vaut :

$$v_x(0, \omega) = \frac{p^+(\omega) - p^-(\omega)}{\rho c} \quad (8.16)$$

La pression à la paroi vaut :

$$p(0, \omega) = p^+(\omega) + p^-(\omega) \quad (8.17)$$

L'impédance à la paroi vaut donc :

$$Z(\omega) = \rho c \frac{p^+(\omega) + p^-(\omega)}{p^+(\omega) - p^-(\omega)} \quad (8.18)$$

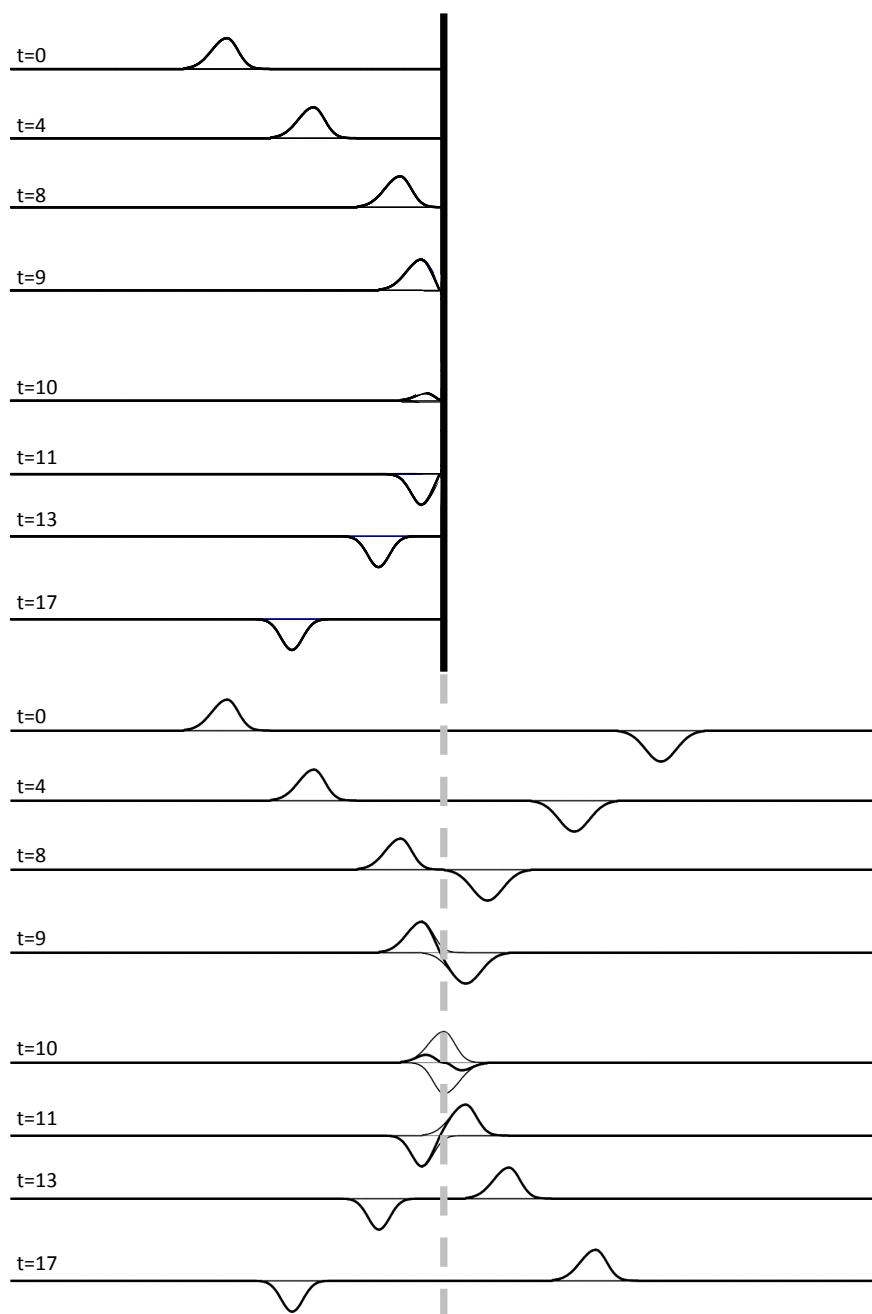


Figure 8.3: Réflexion d'une onde plane sur une paroi à pression acoustique nulle (figure du haut). Cette paroi agit en fait comme un miroir superposant à l'onde incidente une onde réfléchie antisymétrique de la première (figure du bas).

Introduisons le facteur de réflexion $R(\omega)$:

$$R(\omega) = \frac{p^-(\omega)}{p^+(\omega)} \quad (8.19)$$

L'impédance peut alors s'écrire :

$$Z(\omega) = \rho c \frac{1 + R(\omega)}{1 - R(\omega)} \quad (8.20)$$

Cette relation peut être inversée pour donner :

$$R(\omega) = \frac{Z(\omega) - \rho c}{Z(\omega) + \rho c} \quad (8.21)$$

En termes énergétiques, on peut définir les intensités incidente, réfléchie et absorbée :

$$I_{inc} = \frac{|p^+(\omega)|^2}{2\rho c} \quad (8.22)$$

$$I_{ref} = \frac{|p^+(\omega)|^2 |R(\omega)|^2}{2\rho c} \quad (8.23)$$

$$I_{abs} = I_{inc} - I_{ref} = \frac{|p^+(\omega)|^2 (1 - |R(\omega)|^2)}{2\rho c} \quad (8.24)$$

Le rapport entre l'intensité absorbée et l'intensité incidente définit le coefficient d'absorption α :

$$\alpha = \frac{I_{abs}}{I_{inc}} = 1 - |R(\omega)|^2 \quad (8.25)$$

Le rapport entre les intensités réfléchie et incidente définit le coefficient de réflexion r :

$$r = \frac{I_{ref}}{I_{inc}} = |R(\omega)|^2 = 1 - \alpha \quad (8.26)$$

Différence entre Z_n , R , α et r comme mesures de l'absorption

La réflexion ou l'absorption partielle de l'onde acoustique à la paroi peuvent être décrites par chacun des termes suivants : impédance normale Z_n , facteur de réflexion R , coefficient d'absorption α , coefficient de réflexion r . L'impédance et le facteur de réflexion sont des grandeurs *complexes* qui représentent l'effet du matériau recouvrant la surface sur l'amplitude de l'onde réfléchie

et sur sa phase. Les coefficients d'absorption et de réflexion sont des grandeurs *réelles* de nature énergétique ; elles ne donnent qu'une information sur le niveau de l'onde réfléchie et pas sur le déphasage induit par le matériau.

Impédance caractéristique du milieu et impédance réduite

Si l'impédance normale de la surface est égale à ρc , le facteur de réflexion R , le coefficient de réflexion r et l'intensité réfléchie sont nuls, le coefficient d'absorption α vaut 1 et l'intensité absorbée est égale à l'intensité incidente. Une onde d'incidence normale frappant une paroi portant cette impédance est donc totalement absorbée. On appelle ρc l'**impédance caractéristique du milieu**. On rapporte souvent, de ce fait, l'impédance d'un matériau à cette valeur caractéristique ; on parle alors d'impédance réduite z :

$$z = \frac{Z}{\rho c} \quad (8.27)$$

Transposition dans le domaine temporel

Réécrivons l'équation 8.15 sous la forme :

$$p = p_i \left(e^{-ikx} + R e^{ikx} \right) \quad (8.28)$$

L'histoire temporelle de la pression, en un point donné, est obtenue en prenant la transformée de Fourier inverse de cette relation soit :

$$p(x, t) = p_i \left(t - \frac{x}{c} \right) + p_i \left(t + \frac{x}{c} \right) \otimes r \left(t + \frac{x}{c} \right) \quad (8.29)$$

où le symbole \otimes désigne le produit de convolution et où $r(t)$ est la réponse impulsionnelle associée au facteur de réflexion ($r(t) \Leftrightarrow R(\omega)$).

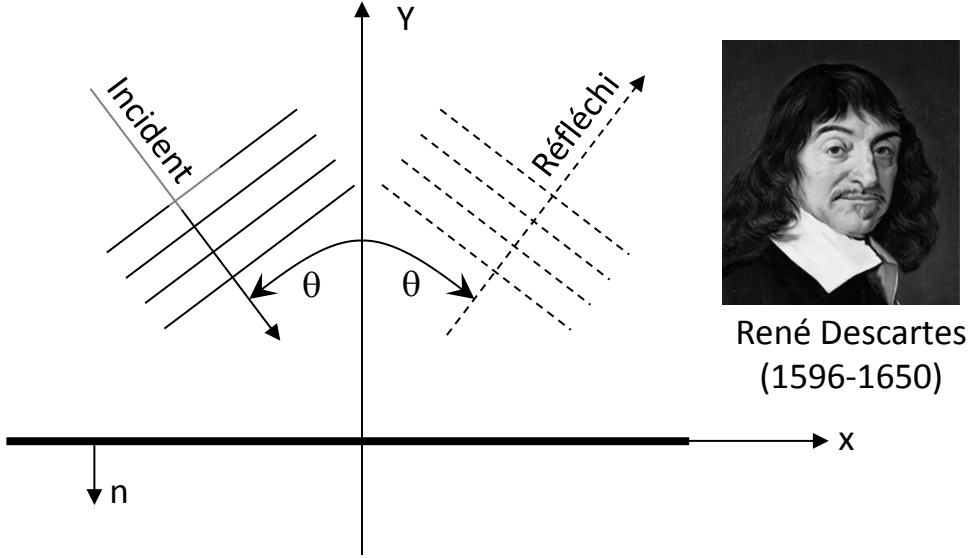


Figure 8.4: Réflexion d'une onde plane sur une surface rigide (incidence oblique).

Réflexion d'une onde plane

8.2

sous incidence oblique

8.2.1

Surface rigide - Loi de Descartes

Considérons une onde plane, de vecteur d'onde $(k_x, -k_y, 0)$, incidente à un plan rigide $y = 0$ Figure 8.4. La normale au plan est définie comme entrant dans le plan (c'est un choix *conventionnel*) et a donc comme composantes $(0, -1, 0)$. À l'onde incidente va se superposer une onde réfléchie de vecteur d'onde (k_x^r, k_y^r) :

$$p(\vec{r}, \omega) = p_i(\omega)e^{-i(k_x x - k_y y)} + p_i(\omega)R(\omega)e^{-i(k_x^r x + k_y^r y)} \quad (8.30)$$

La vitesse normale à la paroi vaut :

$$v_n(x, 0, z, \omega) = -v_y(x, 0, z, \omega) = \frac{k_y p_i(\omega)}{\rho \omega} e^{-ik_x x} - \frac{k_y^r p_i(\omega) R(\omega)}{\rho \omega} e^{-ik_x^r x} \quad (8.31)$$

On voit aisément que cette vitesse ne peut être nulle, *pour tout* x , que si deux conditions sont remplies :

$$k_x^r = k_x \quad (8.32)$$

$$k_y^r R(\omega) = k_y \quad (8.33)$$

Mais la relation de dispersion impose par ailleurs que

$$k_x^{r2} + k_y^{r2} = k_x^2 + k_y^2 = k^2 \quad (8.34)$$

En conséquence :

$$k_y^r = k_y \quad (8.35)$$

$$R(\omega) = 1 \quad (8.36)$$

La pression totale est alors donnée par :

$$p(\vec{r}, \omega) = p_i(\omega) \left(e^{-i(k_x x - k_y y)} + e^{-i(k_x x + k_y y)} \right) \quad (8.37)$$

On retrouve la **loi de Descartes**¹ qui exprime que l'onde incidente et l'onde réfléchie forment le même angle avec la normale au plan.

8.2.2 Surface absorbante

Considérons maintenant une paroi absorbante caractérisée par un facteur de réflexion R . On peut aisément démontrer que la loi de Descartes reste valide dans ce cas, ce qui permet d'écrire la pression totale sous la forme :

$$p(\vec{r}, \omega) = p_i(\omega) \left(e^{-i(k_x x - k_y y)} + R(\omega) e^{-i(k_x x + k_y y)} \right) \quad (8.38)$$

1. **René Descartes**, philosophe, physicien et mathématicien français, né à La Haye (Indre-et-Loire, ville désormais appelée Descartes) en 1596 et mort à Stockholm en 1650. On lui doit de nombreuses contributions à l'optique et aux mathématiques mais surtout une méthode de questionnement scientifique, qu'on qualifia plus tard de *cartésienne*, et qui rompt avec la scolastique médiévale.

Soit, en introduisant l'angle θ formé par les ondes incidente et réfléchie avec l'axe y ($\cos \theta = k_y/k$) :

$$p(\vec{r}, \omega) = p_i(\omega) \left(e^{-ik(x \sin \theta - y \cos \theta)} + R(\omega) e^{-ik(x \sin \theta + y \cos \theta)} \right) \quad (8.39)$$

Pression, vitesse normale et impédance à la paroi valent :

$$p(x, 0, \omega) = p_i(\omega)(1 + R(\omega))e^{-ikx \sin \theta} \quad (8.40)$$

$$v_n(x, 0, \omega) = -v_y(x, 0, \omega) = \frac{p_i(\omega)}{\rho c} (1 - R(\omega)) \cos \theta e^{-ikx \sin \theta} \quad (8.41)$$

$$Z(\omega) = \rho c \frac{1 + R(\omega)}{1 - R(\omega)} \frac{1}{\cos \theta} \quad (8.42)$$

Cette dernière relation peut être inversée :

$$R(\omega) = \frac{Z(\omega) \cos \theta - \rho c}{Z(\omega) \cos \theta + \rho c} \quad (8.43)$$

Pour une surface d'impédance normale donnée le facteur de réflexion *dépend donc de l'angle d'incidence*. Le coefficient d'absorption α peut être explicité en introduisant les composantes réelles et imaginaires de l'impédance $Z = \rho c(z_r + iz_i)$:

$$\alpha(\omega, \theta) = 1 - |R(\omega)|^2 = \frac{4z_r(\omega) \cos \theta}{(1 + z_r(\omega) \cos \theta)^2 + z_i^2(\omega) \cos^2 \theta} \quad (8.44)$$

La figure 8.5 donne la variation de $\alpha(\theta)$ pour différentes valeurs de l'impédance. Pour $|z| > 1$ on observe toujours une croissance de α avec θ jusqu'à un maximum α_m pour un angle d'incidence θ_m puis une décroissance rapide jusqu'à une absorption nulle sous incidence rasante². Si Z est purement réel, l'angle d'incidence $\theta_m(\omega)$ est donné par :

$$\cos \theta_m(\omega) = \frac{1}{z_r(\omega)} \quad (8.45)$$

2. Cette absorption nulle sous incidence rasante est un *artefact* lié au fait que le matériau responsable de l'absorption, modélisé par une valeur donnée de l'impédance de la surface, a une épaisseur nulle. En réalité l'épaisseur finie du matériau serait responsable d'une absorption non nulle sous incidence rasante. Voir la section 8.4.4 pour une discussion plus approfondie.

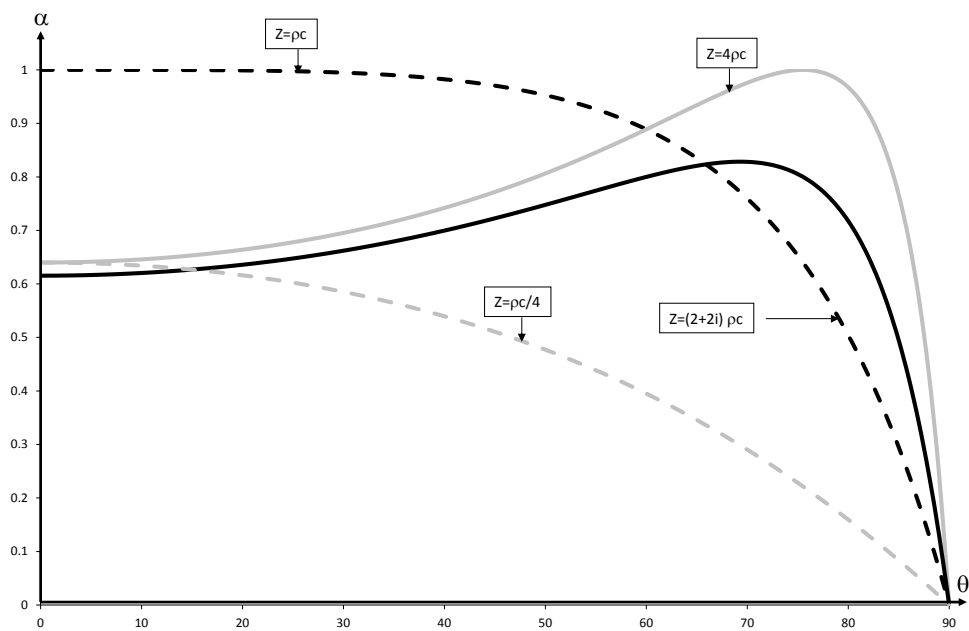


Figure 8.5: Variation du facteur d'absorption α en fonction de l'angle d'incidence θ pour différentes valeurs de l'impédance Z .

et $\alpha_m = 1$. Si l'impédance est complexe l'absorption n'est jamais complète ($\alpha_m < 1$). Pour $|z| \leq 1$ l'absorption est uniformément décroissante.

8.3 Réflexion d'une source monopolaire

8.3.1 Source image

Onde plane

Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents consacrés à la réflexion d'ondes planes sur des plans rigides ou absorbants peuvent être interprétés en remplaçant ce plan par une source image, symétrique de la source originale et d'amplitude $p^+(\omega)R(\omega)$ (figures 8.6 et 8.7). L'onde incidente *pénètre* dans l'obstacle mais un champ exactement symétrique (au facteur $R(\omega)$ près) provient de l'autre côté de celui-ci et constitue le champ *réfléchi*.

Onde sphérique

Considérons un monopôle situé au point P au-dessus d'une surface rigide S (figure 8.8a.). La pression engendrée par ce monopôle, en champ libre, au point Q est donnée par Section 6.6.1 :

$$p(Q) = A \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (8.46)$$

où r est la distance entre P et Q . Ce champ ne respecte pas la condition de vitesse normale nulle sur S . Si on y ajoute, par analogie avec le cas des ondes planes, le champ d'une source image placée au point P' symétrique de P par rapport à S (figure 8.8b.), on obtient :

$$p(Q) = A \frac{e^{-ikr}}{r} + A \frac{e^{-ikr'}}{r'} \quad (8.47)$$

On comprend intuitivement, et on vérifie aisément, que l'ajout de cette source image permet de respecter la condition de paroi rigide (figure 8.8c.) puisque les composantes de vitesse verticale engendrées par les deux sources au niveau de la paroi sont égales et opposées.

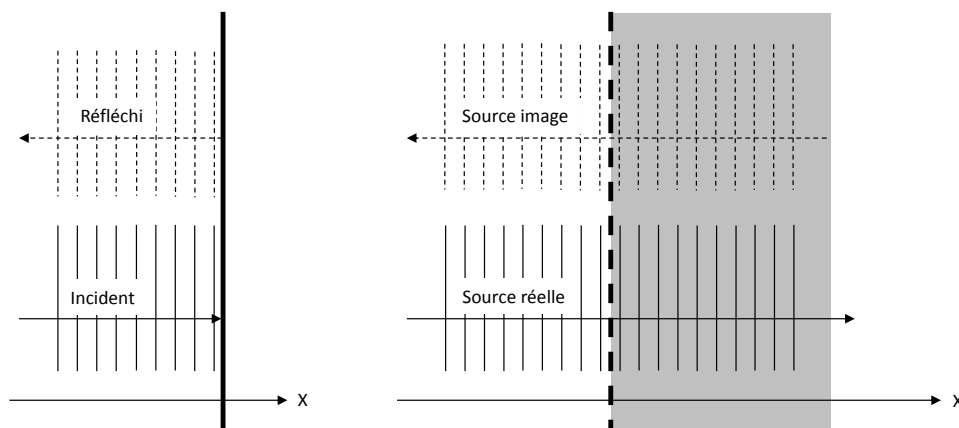


Figure 8.6: Réflexion et source image (incidence normale).

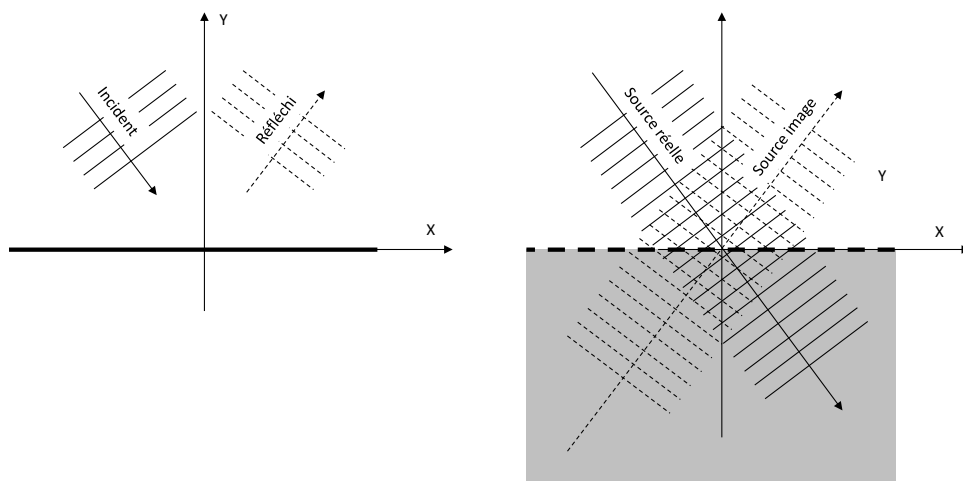


Figure 8.7: Réflexion et source image (incidence oblique).

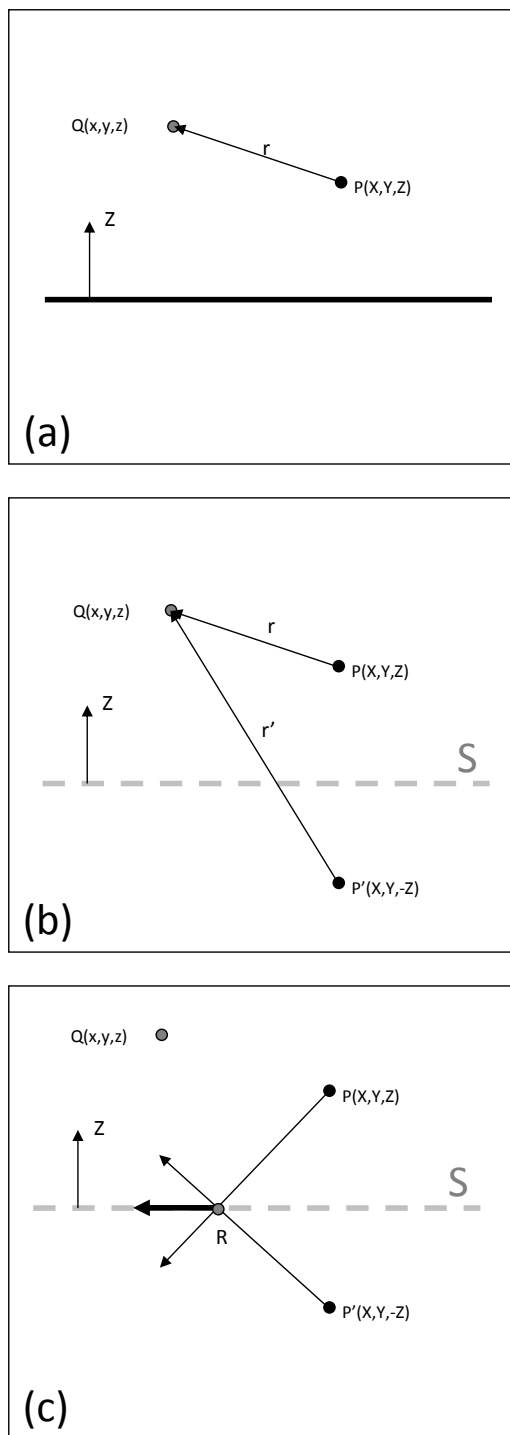


Figure 8.8: Réflexion d'un monopôle sur une surface rigide : sources réelles et virtuelles.

Paroi absorbante

Dans le cas d'une onde plane, on peut encore utiliser la notion de source image lorsque la paroi est absorbante ; il suffit de donner à la source image une amplitude réduite du facteur R . Ceci ne fonctionne en revanche pas dans le cas d'une source sphérique. On vérifie en effet aisément que le champ de pression :

$$p(Q) = A \frac{e^{-ikr}}{r} + A \cdot R \frac{e^{-ikr'}}{r'} \quad (8.48)$$

n'induit pas une valeur constante du rapport p/v_n sur le plan de symétrie.

8.3.2 Réflectogramme

Cas d'une paroi unique

Abandonnons, pour un temps, le contexte harmonique et considérons plutôt que les sources en P et P' ont un caractère impulsionnel. La figure 8.9 montre les fronts d'ondes associés à la source et à son image (dessin de gauche) et les fronts d'ondes réels (dessin de droite). Le son au point Q est perçu une première fois lorsque le front d'ondes de la source réelle lui parvient, soit après un temps de parcours égal à $\frac{r}{c}$. Il perçoit un écho lorsque le son de la source image lui parvient au temps $\frac{r'}{c}$. Outre le décalage entre le *son direct* et le *son réfléchi* les deux composantes ont également des amplitudes différentes qui sont dans un rapport $\frac{r}{r'}$: l'onde réfléchie s'est propagée plus longtemps et son énergie s'est distribuée sur un front d'ondes plus large. On peut représenter les événements acoustiques au point Q par un réflectogramme Figure 8.10 montrant les impulsions successives en termes d'amplitude et de temps d'arrivée.

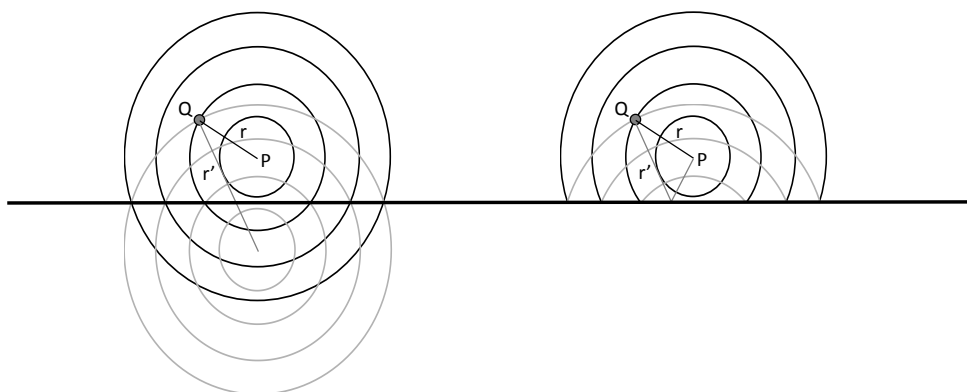


Figure 8.9: Réflexion d'un monopôle sur une surface rigide. À gauche : fronts d'ondes de la source et de son image. À droite : fronts d'ondes réels.

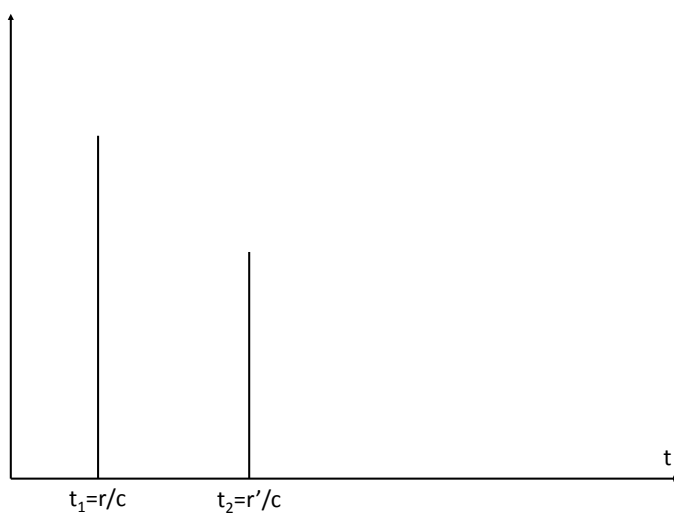


Figure 8.10: Réflectogramme : cas de la paroi unique.

Cas de deux parois rigides perpendiculaires

Considérons maintenant le cas d'une source P placée au voisinage de deux parois rigides planes et perpendiculaires S_1 et S_2 Figure 8.11. Pour garantir les conditions de vitesse nulle nous devons créer deux sources images P_1 et P_2 mais aussi une source P_{12} . En effet, sur S_1 , la vitesse associée à P est bien compensée par P_1 mais P_2 engendre aussi une vitesse horizontale non nulle qui sera compensée par P_{12} . La même analyse peut être faite pour S_2 . L'image de la source par rapport à chaque paroi doit donc être considérée mais aussi l'image de chaque image. Le champ sonore induit au point Q par une source située au point P apparaît donc comme la combinaison de quatre contributions Figure 8.12 et le réflectogramme montre quatre impulsions distinctes d'amplitudes décroissantes Figure 8.13. On peut visualiser les fronts d'ondes lors de l'arrivée du champ direct et des trois réflexions successives au point Q Figure 8.14.

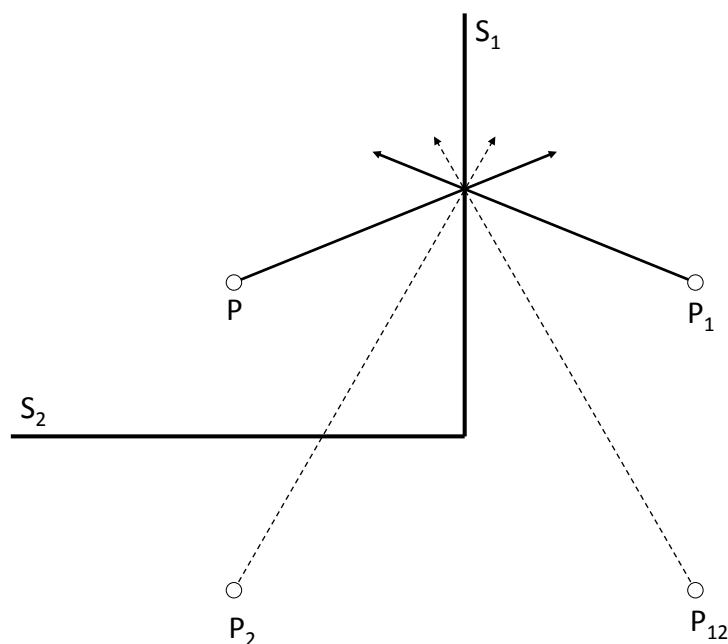


Figure 8.11: Sources images dans le cas de deux surfaces perpendiculaires.

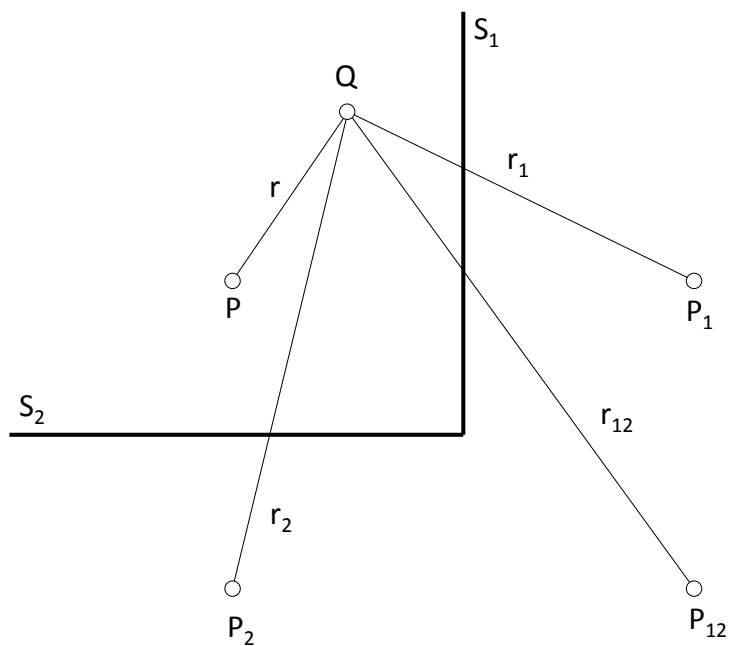


Figure 8.12: Le son au point Q apparaît comme la combinaison de quatre sources distinctes.

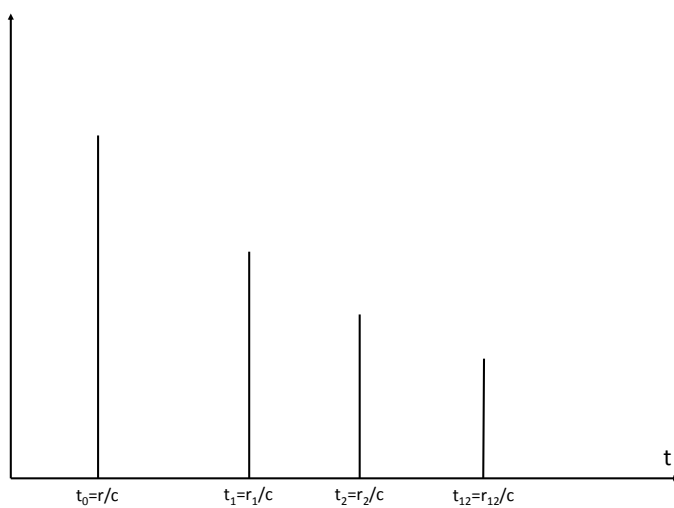


Figure 8.13: Le réflectogramme montre bien quatre impulsions.

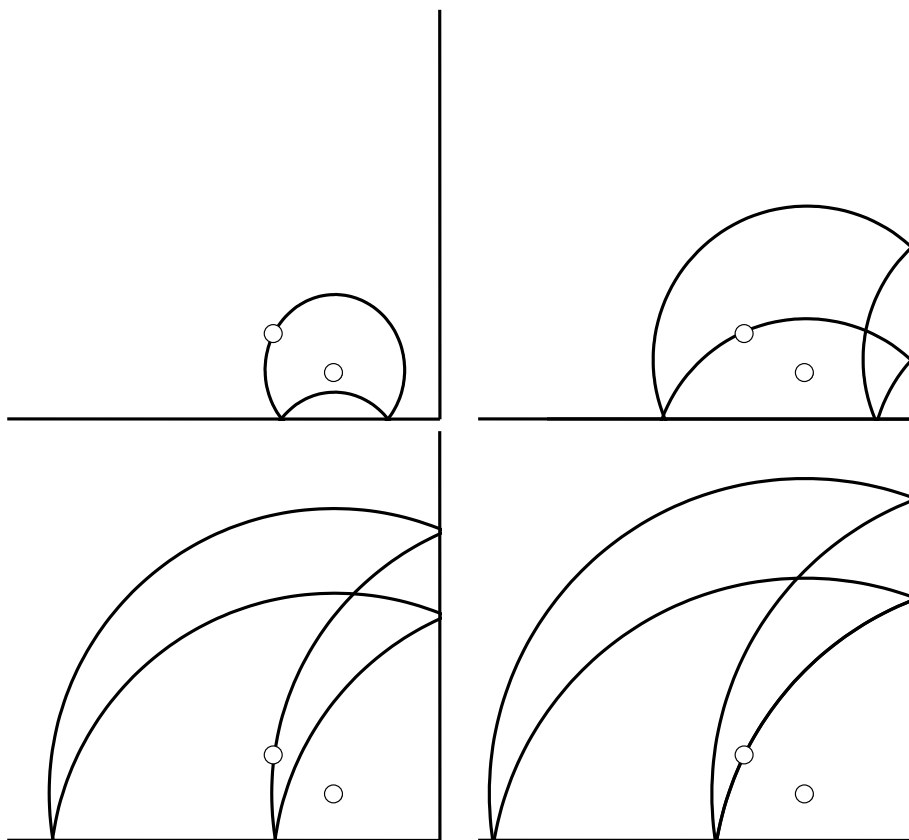


Figure 8.14: Fronts d'ondes aux instants t_0 , t_1 , t_2 et t_{12} .

Cas d'un domaine rectangulaire fermé

Si nous avons maintenant quatre murs formant une cavité rectangulaire Figure 8.15 l'image de la source doit être prise par rapport à chaque paroi (ordre 1). L'image de chaque image doit également être considérée (ordre 2) et ainsi de suite (ordres 3, 4 ...). On a donc un nombre infini de sources images et, par conséquent, un nombre infini d'impulsions dans le réflectogramme Figure 8.21.

8.3.3 Méthode des tirs de rayons

La méthode des sources images fonctionne bien pour des domaines de géométrie parallélipédique. Dès que la géométrie est plus complexe, il faut gérer le fait que chaque source image ne rayonne que sous un angle déterminé ce qui complique la méthode et la rend, en fait, inapplicable. La méthode des tirs de rayons évite ces difficultés et est extrêmement générale et largement utilisée en acoustique des salles. Observons d'abord à la figure 8.16 le fait que les angles que forment les normales aux fronts d'ondes sphériques avant et après réflexion obéissent à la loi de Descartes. Un élément infinitésimal du front d'ondes sphérique se comporte donc comme une onde plane. La figure 8.17 montre également que le problème de la réflexion d'une source sur deux plans perpendiculaires peut s'analyser en termes de rayons se réfléchissant de manière spéculaire sur les parois. Les quatre impulsions du réflectogramme de la figure 8.13 s'analysent comme l'arrivée du signal sonore par chacun des quatre *chemins* représentés (P-Q, P-(2)-Q, P-(3)-Q, P-(4a)-(4b)-Q). Dans un contexte général, la méthode des tirs de rayons se base sur les étapes suivantes :

1. on définit la position de la source et d'un ou plusieurs récepteurs (zone de petite extension centrée sur un point auquel on souhaite connaître le niveau sonore) ;
2. on affecte un matériau à chaque paroi et on précise son coefficient d'absorption α (en pratique on donne une valeur différente dans chaque bande d'octave) ;

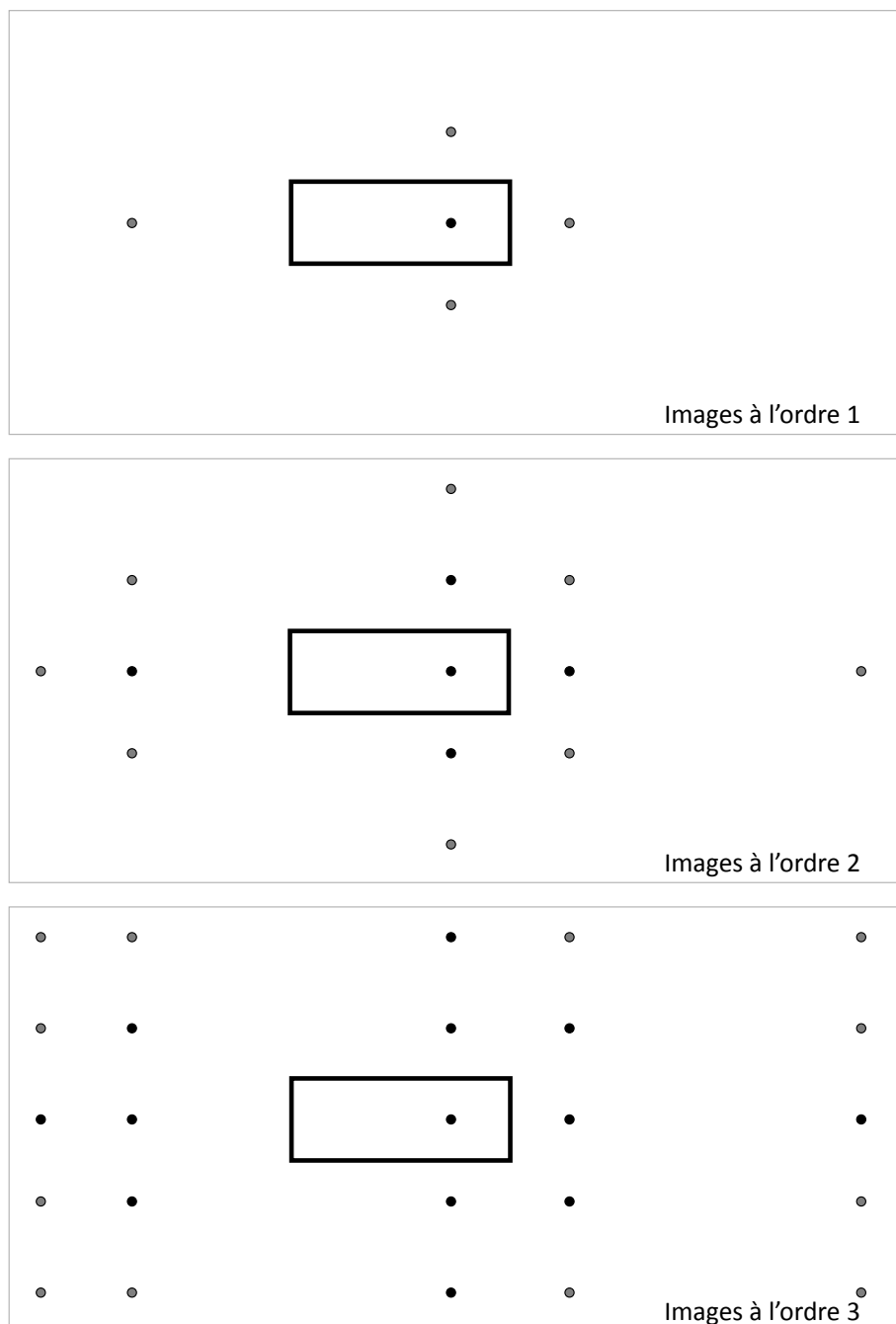


Figure 8.15: Sources images dans le cas d'une cavité rectangulaire.

3. la source est remplacée par un nombre élevé de rayons (typiquement plusieurs dizaines de milliers) également répartis spatialement et portant chacun une fraction de l'énergie totale de la source (la répartition peut être homogène ou intégrer une certaine directivité de la source) ;
4. on va suivre le chemin de chaque rayon individuel au cours de ses réflexions spéculaires sur les parois Figure 8.18 ;
5. lorsque le rayon traverse un récepteur on enregistre une impulsion sur le réflectogramme :
 - le temps d'arrivée est simplement la longueur totale du chemin parcouru (r) divisée par la vitesse du son ;
 - l'énergie apportée au récepteur par le rayon est l'énergie initiale du rayon réduite de trois facteurs :
 - un facteur $\frac{1}{r^2}$ qui prend en compte le phénomène de divergence sphérique (plus le chemin parcouru est long plus l'énergie est distribuée sur une surface importante) ;
 - le produit des coefficients $(1 - \alpha)$ de toutes les parois rencontrées en chemin et
 - un coefficient $e^{-\gamma r}$ prenant en compte l'atténuation du milieu ;
6. on peut alors tracer le réflectogramme Figure 8.21 mais aussi, si on a défini suffisamment de récepteurs, des *cartes* représentant la distribution spatiale de différentes grandeurs acoustiques Figure 8.20.

Quelques remarques sur la méthode des tirs de rayons :

1. Pour avoir une bonne définition spatiale du champ acoustique dans le volume considéré, il faut définir des récepteurs de petites tailles. Le nombre de rayons traversant un récepteur étant inversement proportionnel à la taille de celui-ci, il faut en même temps augmenter le nombre de rayons et donc le coût du calcul. Pour résoudre ce problème, on utilise en pratique une variante de la méthode utilisant des récepteurs ponctuels et tirant des *cônes* plutôt que des rayons Figure 8.22. La distribution du son au sein de chaque cône n'est pas uniforme mais gaussienne afin que la distribution globale autour de la source soit homogène.
2. La méthode classique néglige totalement les effets de cohérence : on suppose que les rayons qui se recombinaient ont une relation de phase arbitraire et qu'on peut donc combiner le carré des amplitudes. En pratique, il y a une certaine forme de cohérence, notamment dans les premières réflexions, et des variantes plus sophistiquées de la méthode des tirs de

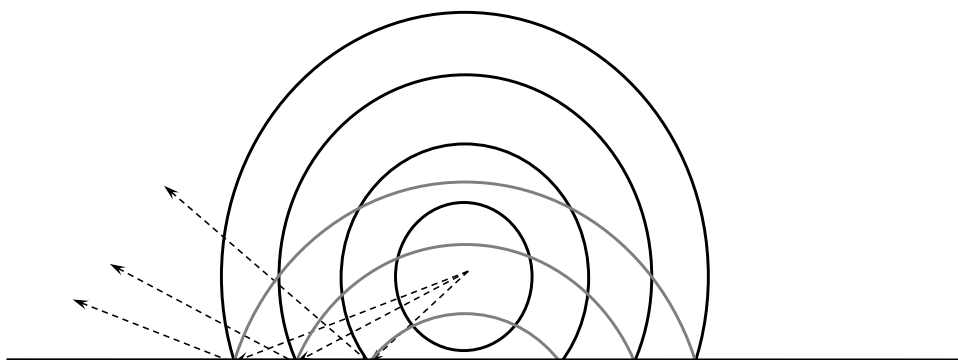


Figure 8.16: La normale aux fronts d'ondes obéit à la loi de Descartes.

rayons prennent en compte cette cohérence. Il serait alors idéal de disposer de l'impédance des matériaux et pas seulement de leur coefficient d'absorption.

3. La réflexion d'une onde sonore sur un matériau réel combine une partie spéculaire (obéissant à la loi de Descartes) et une partie diffuse. La réflexion spéculaire domine à basse fréquence (tant que les irrégularités géométriques du matériau sont significativement plus petites que la longueur d'onde) alors que la réflexion diffuse devient progressivement moins négligeable lorsque la fréquence augmente. Il est possible de prendre en compte, de manière simplifiée, la réflexion diffuse sur une paroi en réémettant une partie de l'énergie incidente dans une ou plusieurs directions aléatoires. Un rayon incident donne alors naissance à plusieurs rayons réfléchis ce qui alourdit le calcul.
4. La diffraction est souvent traitée de la même manière : lorsqu'un rayon vient frapper une arête diffractante, il donne naissance à plusieurs rayons émis dans différentes directions.
5. On cesse de suivre un rayon lorsque celui-ci a perdu une fraction η de son énergie par atténuation, absorption et divergence sphérique. L'énergie résiduelle est distribuée statistiquement sur la queue du réflectogramme en faisant l'hypothèse que le champ acoustique est devenu *diffus*, c'est-à-dire que toutes les directions de propagation de l'énergie sont équiprobables.

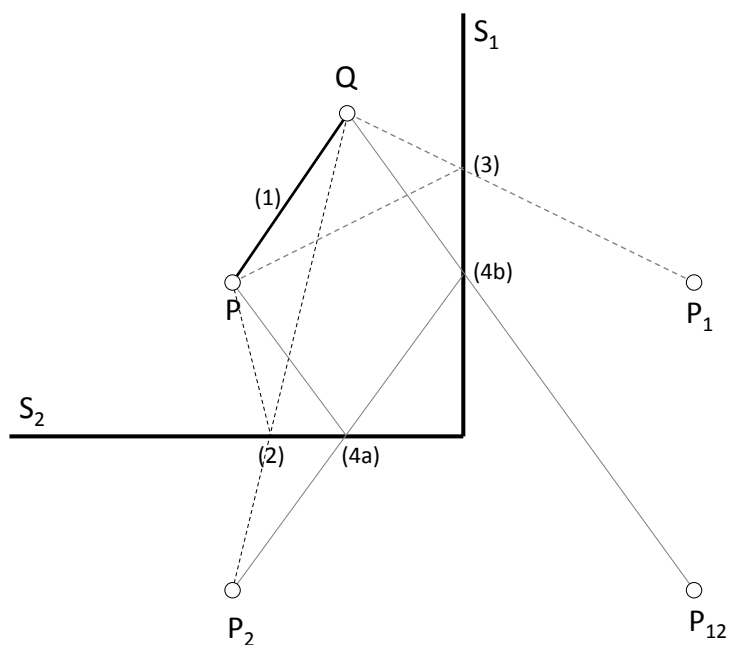


Figure 8.17: La méthode des sources images peut s'analyser en termes de rayons.

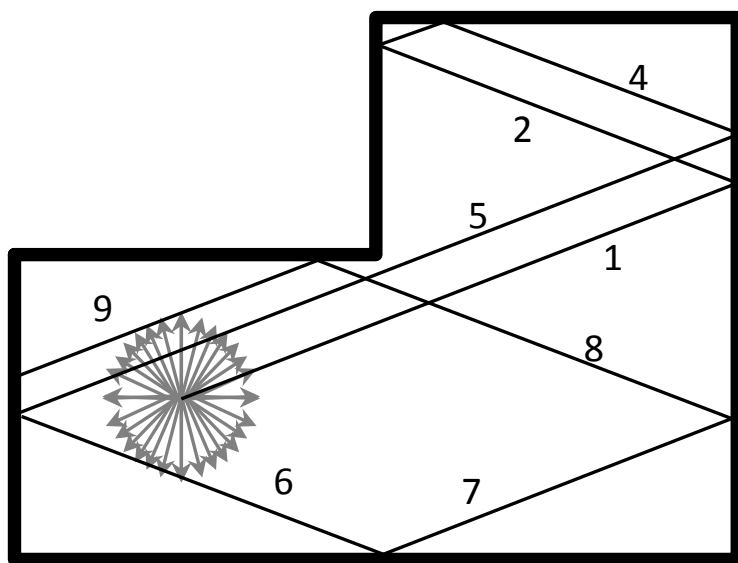
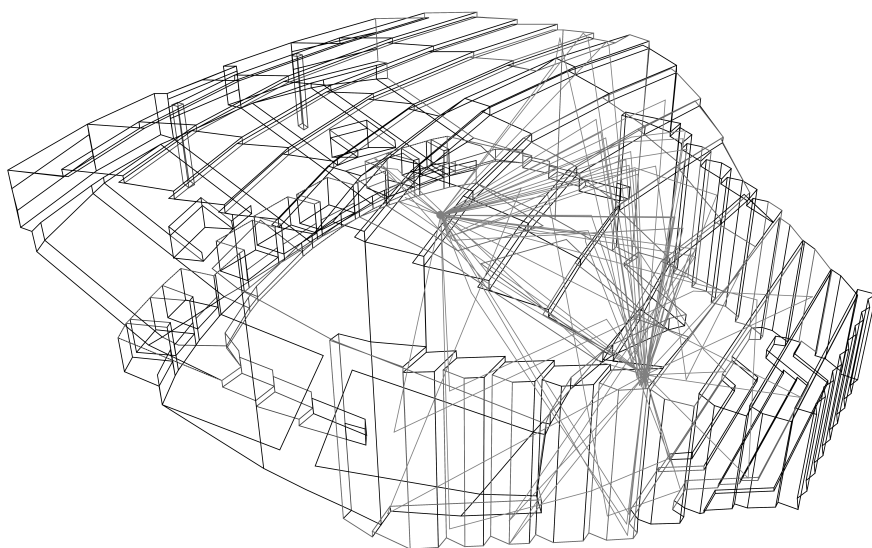
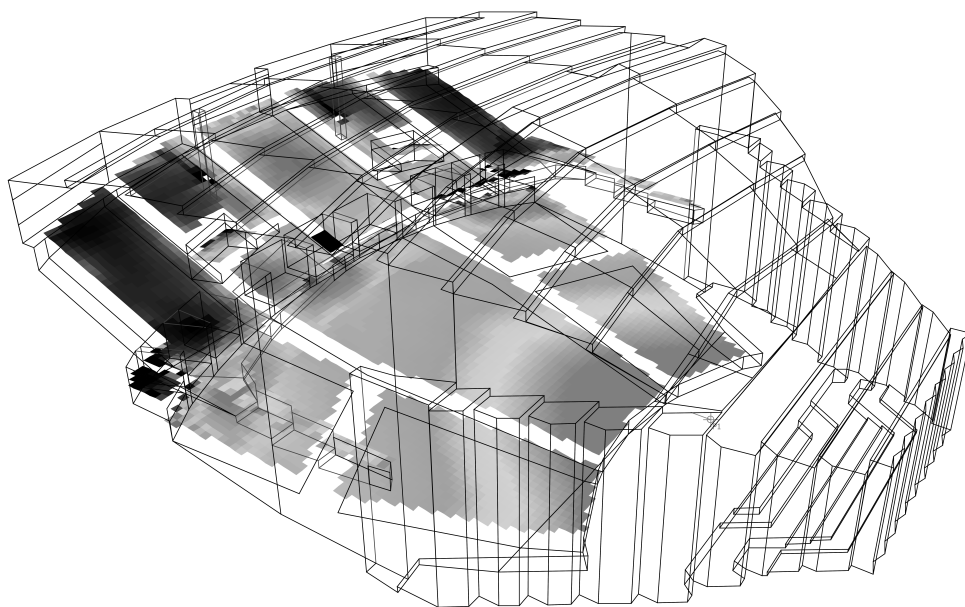


Figure 8.18: Tracé du parcours d'un rayon dans une cavité en L.



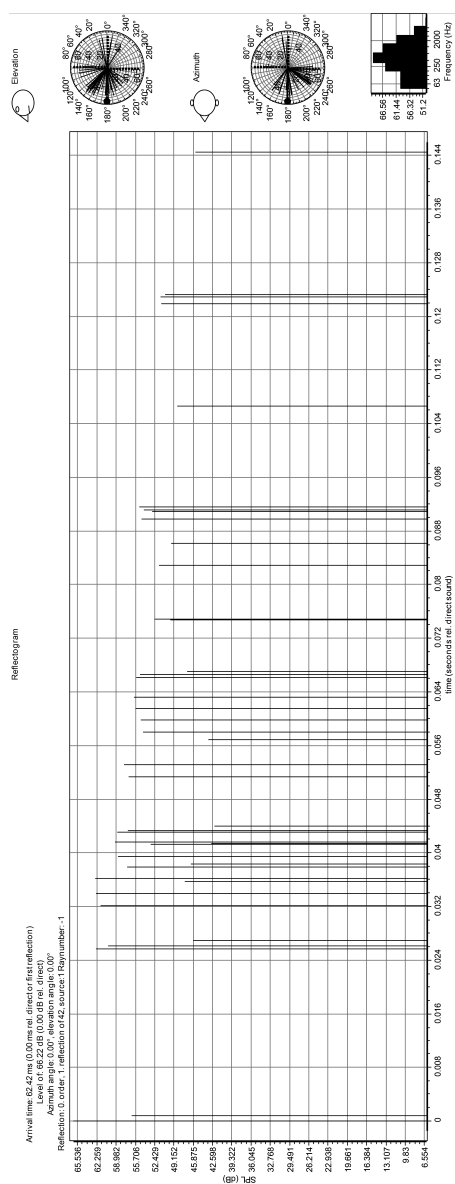
© Odeon Room Acoustics Software. Used by Permission.

Figure 8.19: Tracé du parcours d'un rayon dans une salle de concert.



© Odeon Room Acoustics Software. Used by Permission.

Figure 8.20: Distribution du niveau sonore (SPL) dans une salle réelle.



© Odeon Room Acoustics Software. Used by Permission.

Figure 8.21: Réfectogramme d'une salle réelle calculé par la méthode des tirs de rayons. Le détail du tracé du rayon étant connu, on peut également tracer pour un récepteur donné les angles d'arrivées. Les petits diagrammes situés à droite du réfectogramme représentent schématiquement un visage avec le nez, les yeux et les oreilles ; les rayons donnent une image de la directivité du champ sonore perçu par ce récepteur.

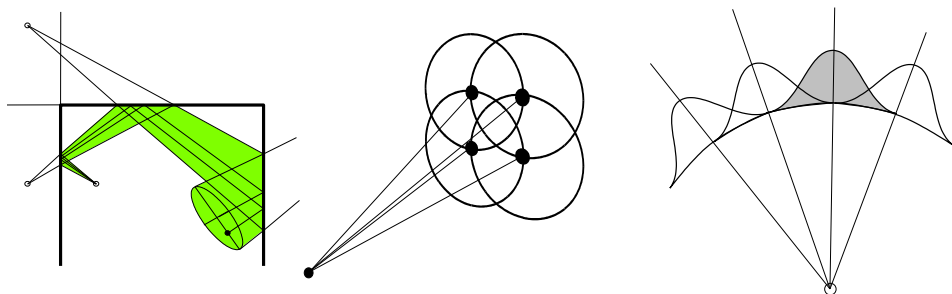


Figure 8.22: Le remplacement des rayons par des cônes améliore la résolution spatiale de la méthode.

8.4 Notes sur la notion d'impédance

8.4.1 Signe de l'impédance

*Cette Madone, plantée comme un regret bien en chair, devait donner le **mauvais signe** à la pauvre algèbre qui hantait parfois le cerveau de l'Aurélié.*

Marcel Aymé (1902-1967) *in* La Table-aux-Crevés (1929).

L'impédance est définie comme le rapport entre la pression et la vitesse. L'impédance est donc fonction de la direction suivant laquelle la vitesse est mesurée. On peut par exemple s'intéresser à l'impédance suivant x , y ou z ou à l'impédance normale à une surface déterminée. C'est ce dernier concept qui est pertinent pour décrire l'absorption. Soit Z_n l'impédance normale caractérisant une surface et p la pression acoustique en un point de cette surface. L'intensité acoustique normale en ce point est donnée par :

$$I_n = \frac{\Re(Z_n)}{|Z_n|^2} \frac{|p|^2}{2} \quad (8.49)$$

L'intensité normale est orientée suivant la normale si la partie réelle de l'impédance normale est positive et a une direction opposée si la partie réelle est

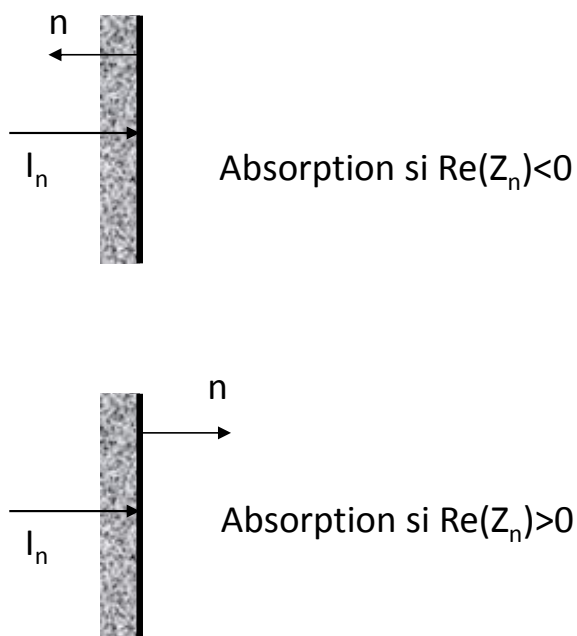


Figure 8.23: La valeur de l'impédance normale dépend de l'orientation de la normale.

négative Figure 8.23. Pour qu'il y ait absorption, c'est-à-dire transfert d'énergie du fluide acoustique vers la surface absorbante, il faut soit que la normale pointe vers le fluide et que $\Re(Z_n)$ soit négatif, soit que la normale pointe vers la surface absorbante et que $\Re(Z_n)$ soit positif.

8.4.2 Dépendance fréquentielle de l'impédance

La variation de l'impédance avec la fréquence indique que la relation pression-vitesse n'est pas locale dans le temps mais qu'au contraire la vitesse instantanée reflète l'évolution temporelle de la pression et réciproquement. En effet, la relation de proportionnalité simple qui existe entre les spectres de pression et de vitesse se transforme en une relation de convolution dès qu'on passe dans le domaine du temps :

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \cdot v(t - \tau) \cdot d\tau \quad (8.50)$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) \cdot p(t - \tau) \cdot d\tau \quad (8.51)$$

avec

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.52)$$

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{Z(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \quad (8.53)$$

Le principe de causalité impose que la pression instantanée ne dépende pas de la vitesse *future* et réciproquement. Les fonctions $z(t)$ et $a(t)$ doivent donc être nulles pour $t < 0$. Ceci limite les formes physiquement réalisables pour $Z(\omega)$ et son inverse $A(\omega)$.

Si la variation de l'impédance avec ω est suffisamment régulière, on peut créer une approximation $\tilde{Z}(\omega)$ de $Z(\omega)$ prenant la forme d'un quotient de deux polynômes en $(i\omega)$ (approximant de Padé) :

$$\tilde{Z}(\omega) = \frac{\sum_{j=1}^n A_j \cdot (i\omega)^j}{\sum_{k=1}^m B_k \cdot (i\omega)^k} \quad (8.54)$$

Sous cette forme la relation pression-vitesse peut s'écrire :

$$p(\omega) \cdot \sum_{k=1}^m B_k \cdot (i\omega)^k = v(\omega) \cdot \sum_{j=1}^n A_j \cdot (i\omega)^j \quad (8.55)$$

soit, en prenant la transformée de Fourier inverse de chaque membre :

$$\sum_{k=1}^m B_k \frac{d^k p(t)}{dt^k} = \sum_{j=1}^n A_j \frac{d^j v(t)}{dt^j} \quad (8.56)$$

On voit que la dépendance fréquentielle de l'impédance s'apparente, dans le domaine temporel, à une relation linéaire entre la pression et ses dérivées temporelles successives d'une part et la vitesse et ses dérivées temporelles successives d'autre part.

8.4.3 Paroi vibrante et absorbante

D'un point de vue purement mathématique, l'équation de Helmholtz permet la définition en un point donné d'une des trois conditions aux limites suivantes :

- une condition de Dirichlet fixant la pression p ;
- une condition de Neumann fixant la dérivée normale de la pression ou la vitesse normale ;
- une condition de Robin ou condition mixte qui impose une relation linéaire entre les deux termes précédents : $ap + bv_n = c$.

La condition d'impédance est un cas particulier de la dernière relation ($a = 1$, $b = -Z_n$, $c = 0$). On peut généraliser cette relation au cas d'une paroi à la fois flexible et absorbante : si la paroi a une vitesse v_s et que le matériau couvrant la paroi a une impédance Z_n , la relation entre la pression p et la vitesse v_f des particules de fluide au droit de la paroi est la suivante :

$$Z_n = \frac{p}{v_f - v_s} \quad (8.57)$$

Le caractère fini de l'impédance du matériau permet au fluide de vibrer avec une vitesse différente de celle de la paroi qui porte ce matériau.

8.4.4 Réaction locale et non locale

La condition aux limites d'impédance s'applique directement sur la paroi. On considère que l'onde vient frapper la paroi et qu'elle y est partiellement réfléchi et partiellement absorbée. On suppose en outre, implicitement, que le phénomène est *local*, c'est-à-dire que le matériau impose une relation entre la pression en chaque point et la vitesse normale au même point. En pratique, on ne peut imaginer un matériau absorbant qui n'ait pas une épaisseur non nulle Figure 8.24. Pour qu'il y ait dissipation d'énergie, il faut qu'il y ait interaction entre l'onde sonore et un milieu dissipatif et ce milieu doit nécessairement avoir une certaine extension spatiale. Si on veut représenter fidèlement le matériau absorbant il faut soit :

- créer un modèle à deux matériaux, l'air d'une part, le matériau absorbant de l'autre³, avec, à l'interface, une condition de continuité entre les deux milieux et, sous le matériau absorbant, une condition aux limites représentant le substrat sur lequel ce matériau est posé ou collé (figure 8.24A) ;
- ne considérer que le champ acoustique et définir à l'interface entre l'air et le matériau absorbant une condition aux limites représentant les phénomènes complexes qui se produisent dans ce matériau (figure 8.24B). Une condition de ce type devrait, pour être réellement représentative, être *non locale* car l'onde qui sort du matériau en un point Q donné est la résultante d'ondes qui sont rentrées dans le matériau en plusieurs points, P et P' par exemple (figure 8.24D).

En pratique toutefois, on se contentera très souvent de modéliser un matériau par son impédance locale et on négligera le caractère non localement réactif du matériau et donc le caractère fini de son épaisseur (figure 8.24C). Notons encore que, à la figure 8.5, l'absorption tend vers 0 pour $\theta = 90^\circ$ uniquement parce que le modèle ne prend pas en considération l'épaisseur non nulle du traitement. En effet, sous incidence rasante, la vitesse normale à la paroi est nulle et le champ acoustique ne peut interagir avec la paroi : quelle que soit l'impédance du matériau, la dissipation est nulle. Si le matériau avait une épaisseur non nulle, il y aurait interaction et, par ailleurs, les fronts d'ondes

3. Il existe des modèles décrivant la propagation des ondes sonores dans les milieux poreux : modèles de Craggs ou de Biot par exemple (voir le chapitre 14).

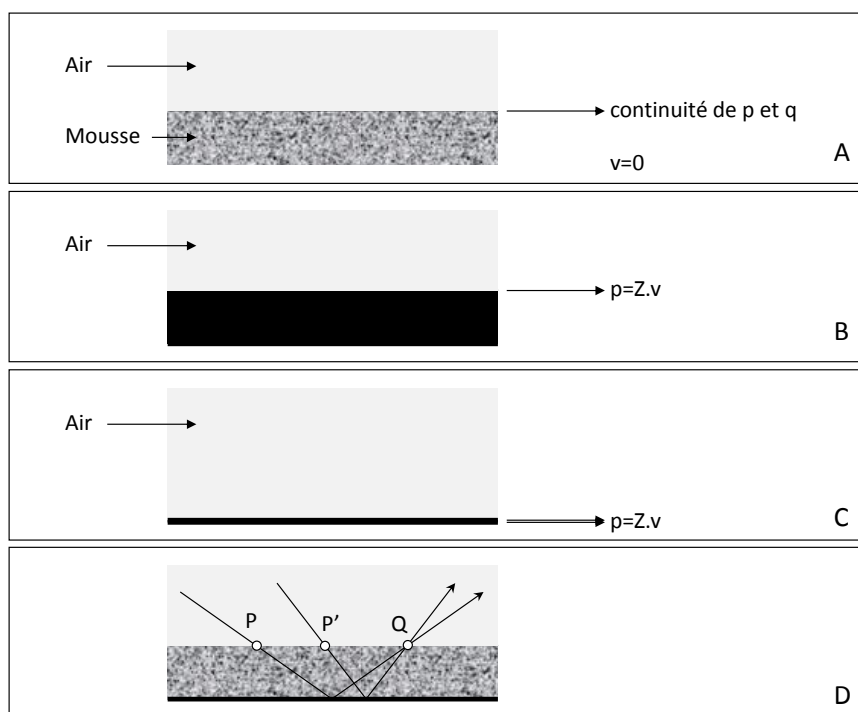
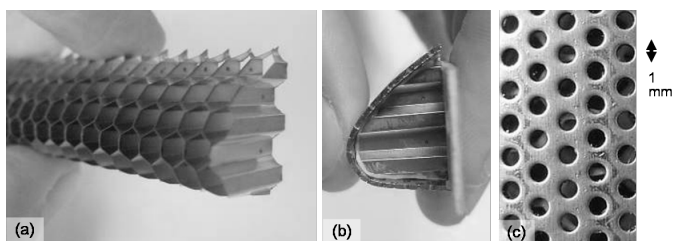


Figure 8.24: Impédance localement ou non localement réactive. Dans la première figure le symbole q désigne le débit acoustique soit v côté air et $\Omega \cdot v$ côté poreux, Ω désignant la porosité du milieu.

initialement plans se déformeraient du fait de la différence de vitesse de propagation entre l'air et le traitement. Notons qu'on peut artificiellement créer des traitements acoustiques qui garantissent une réaction locale Figure 8.25.



© ATECA dans le cadre du projet européen TIMPAN coordonné par Airbus.

Figure 8.25: Exemple de traitement acoustique localement réactif constitué d'une paroi perforée couvrant un matériau en nid d'abeille.

8.4.5 Mesure d'impédance au tube de Kundt

L'impédance d'un matériau se mesure au tube de Kundt⁴. Le principe de la mesure est présenté ci-dessous.

4. **August Kundt**, physicien allemand né à Schwerin le 18 novembre 1839 et décédé le 21 mai 1894 à Lübeck. Principalement connu pour son tube permettant de matérialiser les ondes sonores, Kundt a travaillé dans de nombreux domaines et a notamment démontré le caractère mono-atomique du mercure. Il a été l'assistant de Hermann von Helmholtz et a eu lui-même un assistant célèbre : Wilhelm Conrad Röntgen, découvreur des rayons X et premier récipiendaire du prix Nobel de physique en 1901.

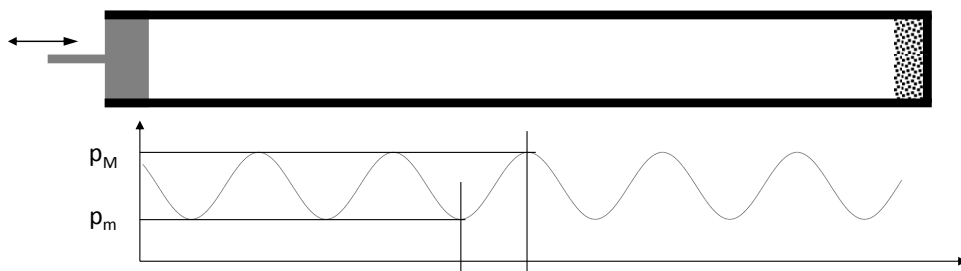


Figure 8.26: Mesure d'impédance au tube de Kundt : schéma de principe.

Solution analytique

Considérons un tube de longueur ℓ excité à gauche par un piston oscillant et plaçons à son extrémité droite un échantillon de matériau d'impédance $Z = z \cdot \rho c$ Figure 8.26. La pression acoustique générée dans le tube par les oscillations du piston s'écrit :

$$p(\omega) = p^+(\omega)e^{-ikx} + p^-(\omega)e^{ikx} \quad (8.58)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{aligned} v_x(0) &= \frac{i}{\rho\omega} \left[\frac{dp}{dx} \right]_{x=0} = \bar{v}(\omega) \\ Z \cdot v_x(\ell) &= p(\ell) \Leftrightarrow \frac{iZ}{\rho\omega} \left[\frac{dp}{dx} \right]_{x=\ell} = p(\ell) \end{aligned} \quad (8.59)$$

soit :

$$\begin{aligned} p^+ - p^- &= \rho c \bar{v} \\ z \left(p^+ e^{-ik\ell} - p^- e^{ik\ell} \right) &= p^+ e^{-ik\ell} + p^- e^{ik\ell} \end{aligned} \quad (8.60)$$

Après résolution de ce système d'équations on trouve :

$$p = i\rho c \bar{v} \frac{\sin k(\ell - x) - iz \cos k(\ell - x)}{\cos k\ell + iz \sin k\ell} \quad (8.61)$$

Pour $z = 0$ on trouve la solution correspondant à un conduit *ouvert* :

$$p = i\rho c \bar{v} \frac{\sin k(\ell - x)}{\cos k\ell} \quad (8.62)$$

et pour $z \rightarrow \infty$, celle d'un tube fermé :

$$p = -i\rho c \bar{v} \frac{\cos k(\ell - x)}{\sin k\ell} \quad (8.63)$$

Pour $z = 1$ ($Z = \rho c$), on trouve :

$$p = \rho c \bar{v} e^{-ikx} \quad (8.64)$$

ce qui représente bien une absorption parfaite de l'onde plane incidente puisque il n'y a aucune composante réfléchie ($p^- = 0$).

Procédure de mesure de l'impédance

La procédure de mesure de l'impédance consiste à déplacer un micro à l'intérieur du tube et à mesurer quatre quantités : les pressions quadratiques minimum et maximum $|p_m|^2$ et $|p_M|^2$ et les positions x_m et x_M correspondantes. De ces quatre grandeurs on déduit deux coefficients :

$$\alpha \doteq \tan 2k(\ell - x_m) = \tan 2k(\ell - x_M) \quad (8.65)$$

$$\beta \doteq \frac{|p_m|^2}{|p_M|^2} \quad (8.66)$$

La pression quadratique dans le tube s'exprime de la manière suivante (en introduisant les parties réelle (z_r) et imaginaire (z_i) et le module ($|z|$) de l'impédance) :

$$|p|^2 = \rho^2 c^2 |\bar{v}|^2 \frac{(|z|^2 + 1) + (|z|^2 - 1) \cos 2k(\ell - x) + 2z_i \sin 2k(\ell - x)}{(|z|^2 + 1) - (|z|^2 - 1) \cos 2k\ell - 2z_i \sin 2k\ell} \quad (8.67)$$

On démontre aisément que cette pression quadratique atteint un extremum pour tout x tel que :

$$\tan 2k(\ell - x) = \frac{2z_i}{(z^2 - 1)} \quad (8.68)$$

Dont on déduit :

$$z_i = \frac{\alpha}{2}(z^2 - 1) \quad (8.69)$$

Exprimons maintenant la valeur théorique de β en utilisant également la relation précédente :

$$\beta = \frac{|p_m|^2}{|p_M|^2} = \frac{\left((|z|^2 + 1) + (|z|^2 - 1) \cos 2k(\ell - x_m) + \alpha(|z|^2 - 1) \sin 2k(\ell - x_m) \right)}{\left((|z|^2 + 1) + (|z|^2 - 1) \cos 2k(\ell - x_M) + \alpha(|z|^2 - 1) \sin 2k(\ell - x_M) \right)} \quad (8.70)$$

Cette relation peut être inversée :

$$|z|^2 = \frac{\left(1 - \beta - \cos 2k(\ell - x_m) + \beta \cos 2k(\ell - x_M) + \alpha \sin 2k(\ell - x_m) + \alpha \beta \sin 2k(\ell - x_M) \right)}{\left(\beta - 1 - \cos 2k(\ell - x_m) + \beta \cos 2k(\ell - x_M) + \alpha \sin 2k(\ell - x_m) + \alpha \beta \sin 2k(\ell - x_M) \right)} \quad (8.71)$$

On déduit alors les parties réelles et imaginaires comme suit :

$$z_i = \frac{\alpha}{2}(z^2 - 1) \quad (8.72)$$

$$z_r = +\sqrt{|z|^2 - z_i^2} \quad (8.73)$$

Le signe positif est choisi pour garantir qu'il y a bien absorption d'énergie en $x = \ell$ Section 8.4.1. En résumé :

1. on mesure x_m , x_M , p_m et p_M ;
2. on calcule α (Equation 8.65) et β (Equation 8.66) ;
3. on calcule $|z|^2$ en fonction de β , x_m et x_M (Equation 8.71) ;
4. on calcule z_i connaissant $|z|^2$ et α (Equation 8.72) ;
5. on calcule z_r connaissant $|z|^2$ et z_i (Equation 8.73).

L'impédance d'un matériau étant dépendante de la fréquence, la mesure est faite indépendamment pour chaque fréquence. En pratique, aujourd'hui, on ne procède plus de cette manière ; plusieurs microphones placés le long de l'axe du tube enregistrent simultanément le signal de pression engendré, dans toute la gamme de fréquence pertinente, par une source large bande. Le traitement digital de ces signaux donne instantanément la valeur de l'impédance.

8.5 Temps de réverbération

Le soir au réfectoire, nous avons la liberté de parole. Bien que nous ne fussions que cent cinquante, le bruit croissait régulièrement, proprio motu, selon une loi constante puisque chacun était obligé d'élever la voix de plus en plus pour se faire entendre. Lorsque le vacarme ayant atteint son plein épanouissement formait comme un édifice sonore qui remplissait exactement la vaste pièce, un surveillant le détruisait d'un seul coup de sifflet à roulette. Le silence qui succédait avait quelque chose de vertigineux. Puis un murmure courait de table en table, une fourchette tintait sur une assiette, un rire fusait, le réseau des sons et des bruits

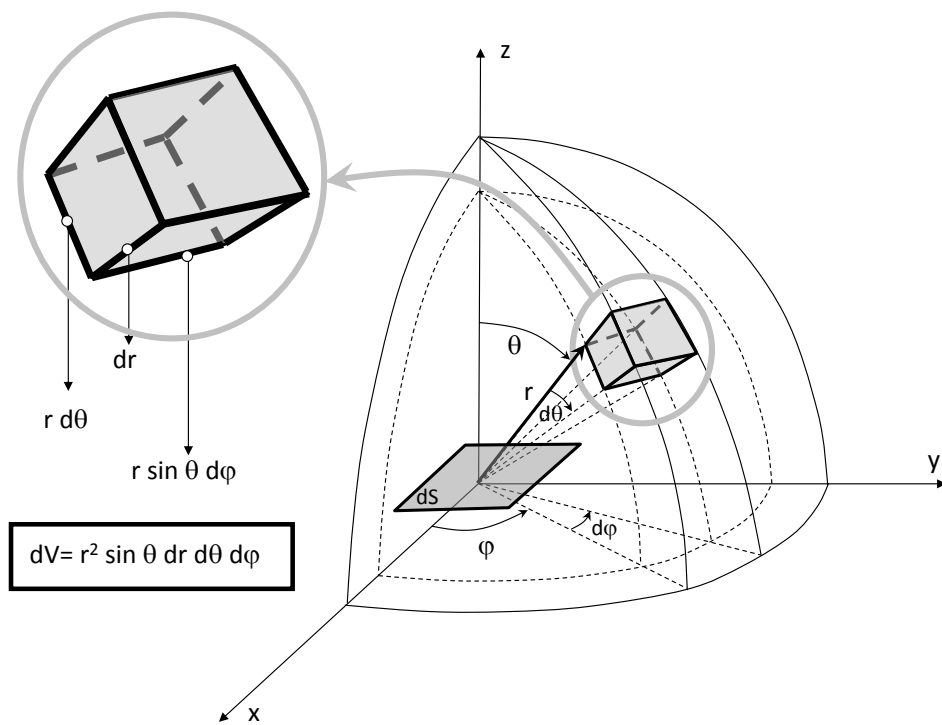


Figure 8.27: Puissance émise par l'élément de volume dV et interceptée par l'élément de surface dS . Définition de l'élément de volume en coordonnées sphériques.

retissait sa toile, et le cycle recommençait.

Michel Tournier (1924-) *in* Le Roi des Aulnes (1970).

Lorsqu'une salle est suffisamment réverbérante, au bout d'un certain temps, le jeu des réflexions successives engendre dans la salle un champ acoustique *diffus* : la densité d'énergie est uniforme et toutes les directions de propagation de l'intensité sont équiprobables. Si on retient cette hypothèse de densité d'énergie constante on peut développer un modèle simple pour l'établissement et l'extinction du son dans une salle.

8.5.1 Établissement du son

Soit une salle de volume V bordée par une surface S . Le champ acoustique est décrit par une densité d'énergie uniforme ϵ [J/m^3]. Considérons une source de puissance E [W] commençant à débiter au temps $t = 0$ ($\epsilon(0) = 0$). L'énergie fournie par la source pendant le temps dt est $E dt$; elle produit un accroissement $d\epsilon$ de la densité d'énergie dans la cavité :

$$E dt = V d\epsilon \rightarrow \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{E}{V} \rightarrow \epsilon = e^{\frac{Et}{V}} - 1 \quad (8.74)$$

La densité d'énergie croît donc de manière infinie dans la salle. En pratique, toutefois, une partie de la puissance émise par la source est absorbée à la paroi; l'énergie absorbée pendant le temps dt est :

$$dE_{abs} = \alpha S I dt \quad (8.75)$$

où α est le coefficient d'absorption moyen des parois de la salle ($\alpha S = \sum \alpha_i S_i$ où les S_i constituent une partition de S et où α_i est le coefficient d'absorption attaché à la paroi de surface S_i) et I est l'intensité normale à la paroi que l'on supposera également uniforme. L'intensité reçue par un élément de surface dS pendant un temps dt est l'intégrale sur une sphère Σ de rayon $c \cdot dt$ de la contribution reçue de chaque élément de volume dV Figure 8.27 :

$$I \cdot dt \cdot dS = \int_{\Sigma} \frac{\epsilon \cdot dV}{4\pi r^2} \cos \theta \cdot dS \quad (8.76)$$

En effet, le volume situé à l'extérieur de Σ ne peut contribuer puisque le son, qui se propage à la vitesse c , ne peut atteindre dS dans le temps dt . Si on prend en compte le fait que, en coordonnées sphériques Figure 8.27 :

$$dV = r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi \quad (8.77)$$

on trouve :

$$\begin{aligned} I \cdot dt \cdot dS &= \int_0^{c \cdot dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon}{4\pi} \sin \theta \cos \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi \\ &= \frac{\epsilon c}{4} \cdot dt \cdot dS \end{aligned} \quad (8.78)$$

et donc :

$$I = \frac{\epsilon c}{4} \quad (8.79)$$

Le bilan énergétique de la salle s'écrit alors :

$$Edt = Vd\epsilon + \frac{\epsilon c}{4}\alpha Sdt \quad (8.80)$$

soit :

$$V\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{\alpha Sc}{4}\epsilon = E \rightarrow \epsilon = \frac{4E}{\alpha Sc} \left(1 - e^{-\frac{\alpha Sc}{4V}t}\right) \quad (8.81)$$

La densité d'énergie croît donc de manière à se stabiliser à la valeur asymptotique :

$$\epsilon_{max} = \frac{4E}{\alpha Sc} \quad (8.82)$$

Pour cette valeur de la densité d'énergie, l'intensité totale dissipée à la paroi est égale à la puissance injectée par la source :

$$I_{max} = \frac{\epsilon_{max}c}{4} \rightarrow \alpha SI_{max} = E \quad (8.83)$$

8.5.2 Extinction du son

Si au temps t_e , suffisamment long pour que ϵ ait atteint la valeur ϵ_{max} , on désactive la source, ϵ va évoluer suivant l'équation suivante :

$$V\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{\alpha Sc}{4}\epsilon = 0 \rightarrow \epsilon = \frac{4E}{\alpha Sc} e^{-\frac{\alpha Sc}{4V}(t-t_e)} \quad (8.84)$$

Les deux solutions (établissement et extinction) sont schématiquement représentées à la figure 8.28.

8.5.3 Loi de Sabine

Par définition, le temps de réverbération T_R est le temps qu'il faut attendre, après avoir coupé la source, pour observer une réduction du niveau sonore de

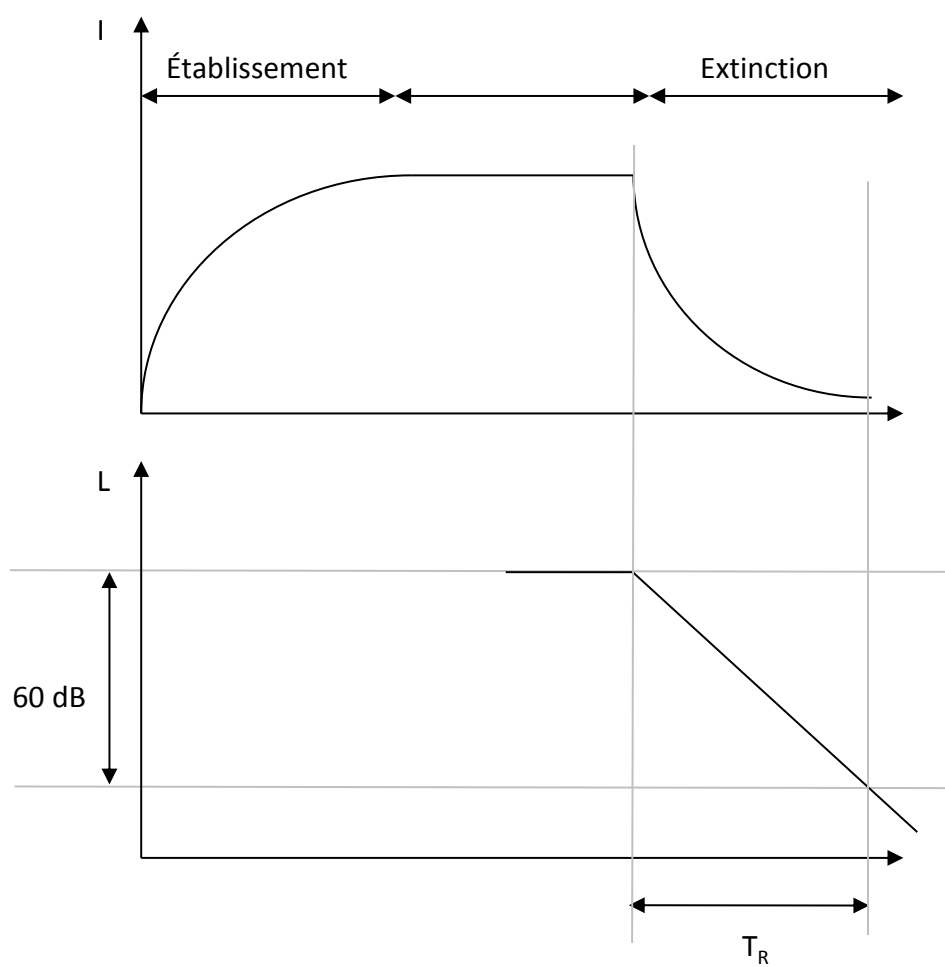


Figure 8.28: Établissement et extinction du son dans une salle.



Figure 8.29: Wallace Sabine (1868-1919).

60 dB :

$$10 \log \frac{\epsilon(t_e)}{\epsilon(t_e + T_R)} = 60 \quad (8.85)$$

Or :

$$\frac{\epsilon(t_e)}{\epsilon(t_e + T_R)} = e^{\frac{\alpha S c T_R}{4V}} \quad (8.86)$$

et donc :

$$10 \log \frac{\epsilon(t_e)}{\epsilon(t_e + T_R)} = \frac{\alpha S c T_R}{4V} 10 \log e = 60 \quad (8.87)$$

On obtient finalement :

$$T_R = \frac{60}{10 \log e} \cdot \frac{4}{c} \cdot \frac{V}{\alpha S} = 0.16 \frac{V}{\alpha S} = 0.16 \frac{V}{\sum_i \alpha_i S_i} \quad (8.88)$$

C'est la formule de Sabine Figure 8.29 qu'on peut encore écrire :

$$T_R = 0.16 \frac{V}{A} \quad (8.89)$$

où

$$A = \sum_i \alpha_i S_i \quad (8.90)$$

est appelé l'aire d'absorption du local.

Remarques :

- Cette formule a été établie sur la base d’une répartition homogène de l’énergie dans la salle ce qui n’est jamais exactement vérifié.
- Les coefficients α_i étant en général dépendants de la fréquence, le temps de réverbération sera lui aussi dépendant de la fréquence Figure 8.30 ; on peut bien sûr toujours parler d’un T_R moyen mais il est souvent plus pertinent de considérer des T_R par bande d’octave.
- Le T_R sera d’autant plus faible que A sera grand. On peut augmenter A en choisissant des matériaux plus absorbants (α plus élevé) mais aussi en augmentant la surface traitée Figure 8.31.
- Sabine n’est pas arrivé à sa formule par le schéma théorique repris ci-dessus mais par une approche expérimentale. Enseignant à Harvard, il fut en effet chargé en 1895 de trouver une solution à la très mauvaise acoustique de l’auditorium du musée *Fogg*. Il réalisa à cette occasion, par une série de mesure, que le produit du temps de réverbération par l’aire d’absorption de la salle était proportionnel au volume de la salle. La théorie que nous avons développée est une justification *a posteriori* de cette loi expérimentale.

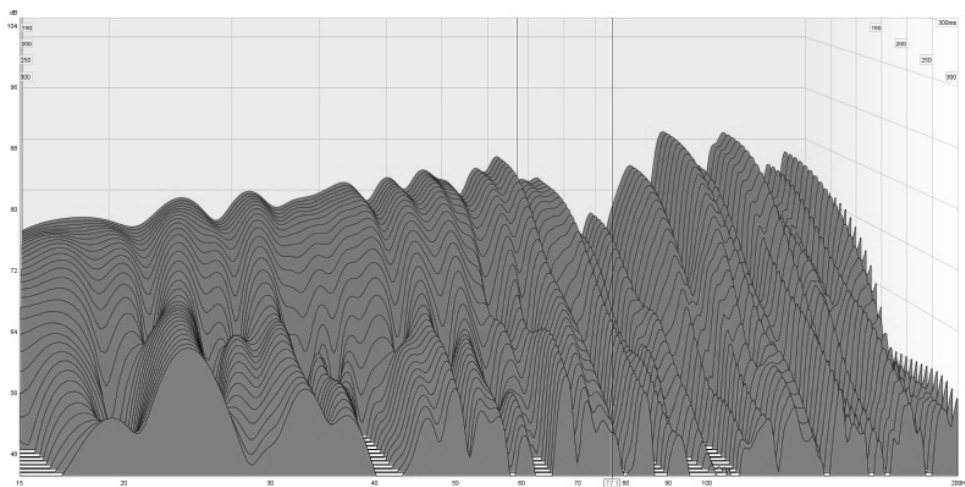
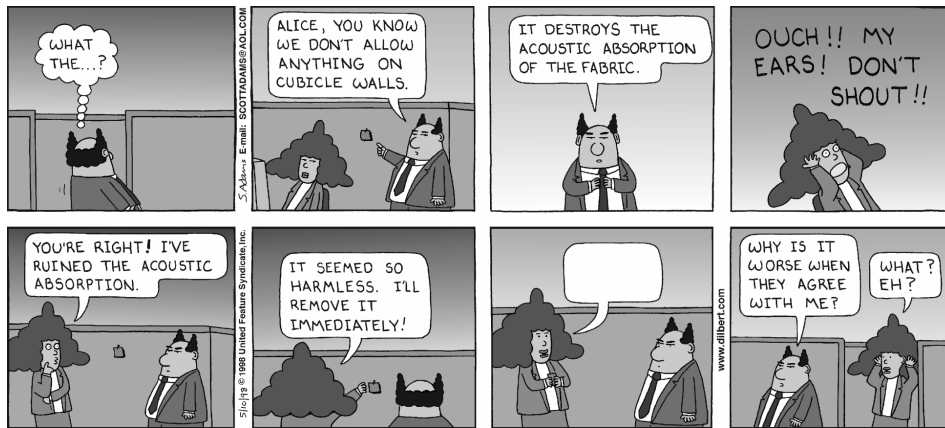


Figure 8.30: Extinction du son dans une salle réelle : le temps de réverbération dépend de la bande de fréquence observée.



DILBERT © 1998 Scott Adams. Used By permission of UNIVERSAL UCLICK. All rights reserved.

Figure 8.31: Absorption : une question de surface.

8.5.4 Chambres anéchoïques et réverbérantes

Les acousticiens réalisent leurs expériences dans trois types de salles :

- Une **chambre anéchoïque** Figure 8.32 a toutes ses parois recouvertes de cônes remplis de matériaux absorbants (mousses). La mousse est choisie pour son haut coefficient α et les cônes ont pour but d'accroître la surface S ; le temps de réverbération est donc extrêmement faible. Une chambre anéchoïque approxime les conditions qu'on aurait en *champ libre* c'est-à-dire en l'absence de toute réflexion.
- Une **chambre réverbérante** Figure 8.33 est conçue pour favoriser l'établissement d'un champ diffus et cherche à maximiser le temps de réverbération. Pour éviter les directions privilégiées de propagation de l'intensité sonore, les parois ne sont pas parallèles et des diffuseurs sont suspendus au plafond de la salle. Les parois sont aussi parfaitement réfléchissantes que possible ($\alpha \simeq 0$).
- On utilise également souvent, notamment dans l'industrie automobile, des **chambres semi-anéchoïques** Figure 8.34 dont toutes les parois sont anéchoïques sauf le sol qui est réfléchissant. Ces salles représentent les condi-



© IAC Acoustics. Used by permission.

Figure 8.32: Chambre complètement anéchoïque avec surface de travail en fils tendus.

tions sur route : propagation libre dans toutes les directions mais réflexions sur le sol.

8.5.5 Formule d'Eyring et de Millington

Pour un local parfaitement réverbérant ($\alpha = 0$), la loi de Sabine donne correctement un temps de réverbération infini ; en revanche, pour un local parfaitement absorbant ($\alpha = 1$), on trouve un temps de $0.16 \frac{V}{S}$ alors que le temps



© IAC Acoustics. Used by permission.

Figure 8.33: Chambre réverbérante.



© IAC Acoustics. Used by permission.

Figure 8.34: Chambre semi-anéchoïque pour la mesure du bruit de générateur.

de réverbération devrait être nul⁵. En conséquence, Eyring⁶ et Millington⁷ ont proposé des formules modifiées mieux adaptées aux environnements très absorbants Figure 8.35 :

$$A_{Eyring} = -S \ln \left(1 - \frac{\sum_i \alpha_i S_i}{S} \right) \quad (8.91)$$

$$A_{Millington} = - \sum_i S_i \ln (1 - \alpha_i) \quad (8.92)$$

8.5.6 Mesure du coefficient d'absorption

La formule de Sabine fournit un moyen simple de mesurer le coefficient α d'un matériau. Soit une chambre réverbérante caractérisée par un temps de réverbération T_{R1} ; on peut donc en déduire que ses parois, dont la surface totale est S_r , ont un coefficient d'absorption moyen α_r :

$$\alpha_r = \frac{0.16V}{T_{R1}S_r} \quad (8.93)$$

Si on place sur le sol un échantillon de superficie S_s d'un matériau de coefficient d'absorption inconnu α_s et qu'on mesure alors un temps de réverbération T_{R2} on peut écrire :

$$T_{R2} = \frac{0.16V}{\alpha_s S_s + \alpha_r (S_r - S_s)} \quad (8.94)$$

Dont on déduit :

$$\alpha_s = \frac{0.16V (S_r T_{R1} - (S_r - S_s) T_{R2})}{S_r T_{R1} S_s T_{R2}} \quad (8.95)$$

5. En fait égal au rapport de la plus grande distance entre la source et une paroi divisée par la vitesse du son.

6. **Eyring C.F.**, *Reverberation time in dead rooms*, Journal of the Acoustical Society of America, pp. 217-241, 1930. Carl Ferdinand Eyring (1889-1951) est l'oncle du chimiste Henry Eyring (1901-1981), père de la célèbre théorie cinétique d'Eyring-Polanyi.

7. **Millington G.**, *A Modified Formula for Reverberation*, J. Acoust. Soc. Amer., 69-82 (1932).

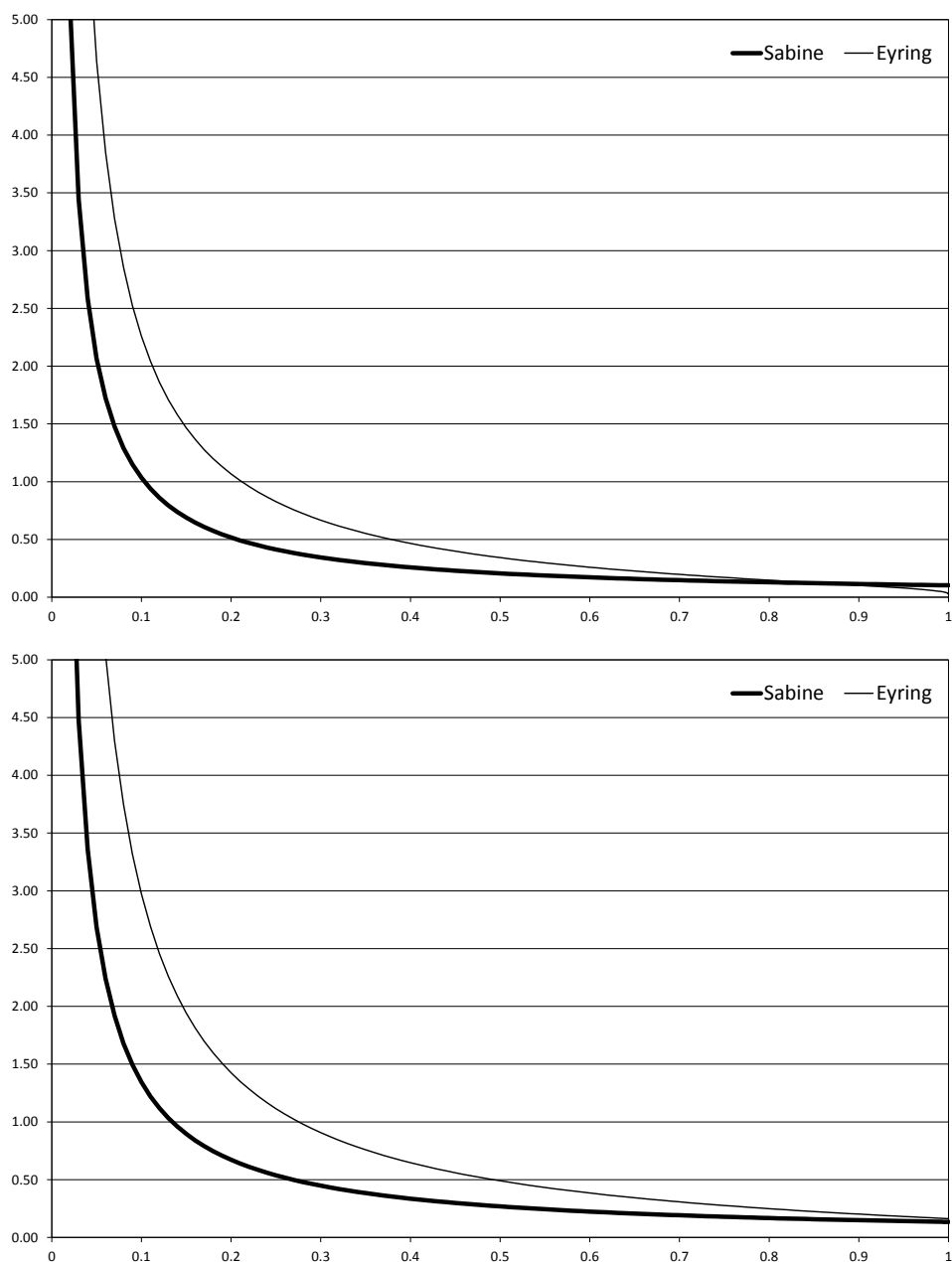


Figure 8.35: Temps de réverbérations suivant les formules d'Eyring et de Sabine. La salle a une longueur de 6 m, une largeur de 4 m et une hauteur de 2 m 80. Dans le premier graphe toutes les parois sont couvertes d'un même matériau dont le coefficient d'absorption varie de 0 à 1 ; le temps de réverbération devrait, dans ce cas, tendre vers 0 pour $\alpha = 1$. Dans le second graphe seul le sol et les murs sont couverts de ce même matériau, le plafond étant considéré comme parfaitement réfléchissant ($\alpha = 0$).

C'est la méthode la plus couramment utilisée pour la mesure de l'absorption ; c'est en effet une mesure extrêmement rapide et simple : elle ne demande que la mesure de deux temps de réverbération et l'échantillon, qui ne doit avoir ni forme ni dimensions particulières, peut être posé à même le sol.

9

RÉSONANCES

Contents

9.1	Résonances d'un tube fermé	198
9.2	Analyse modale	203
9.3	Cavité parallélépipédique	209
9.4	Résonances d'une cavité quelconque	211

Nous montrerons ici que les domaines acoustiques bornés sont le siège de phénomènes de résonance. Nous introduirons sur un simple tube la notion de fréquence propre, de mode propre et montrerons comment la réponse acoustique du tube à une excitation générale peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de ses modes propres (superposition modale). Nous étendrons ensuite l'analyse des résonances aux cavités de forme parallélépipédique (solution analytique) puis de forme quelconque (solution numérique). Le concept de résonateur (quart d'onde ou de Helmholtz) sera abordé au chapitre 10.

9.1 Résonances d'un tube fermé

9.1.1 Source de vitesse

Considérons un tube de longueur ℓ fermé à droite par une paroi rigide et à gauche par un piston oscillant à la vitesse $\bar{v}(\omega)$ Figure 9.1. La pression acoustique générée dans le tube par les oscillations du piston s'écrit :

$$p(\omega) = p^+(\omega)e^{-ikx} + p^-(\omega)e^{ikx} \quad (9.1)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{aligned} v_x(x=0) &= \bar{v}(\omega) \\ v_x(x=\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

soit :

$$\begin{aligned} p^+ - p^- &= \rho c \bar{v} \\ p^+ e^{-ik\ell} - p^- e^{ik\ell} &= 0 \end{aligned} \quad (9.3)$$

Après résolution de ce système d'équations et quelques manipulations élémentaires il vient :

$$p(\omega, x) = -i\rho c \bar{v} \frac{\cos k(\ell - x)}{\sin k\ell} \quad (9.4)$$

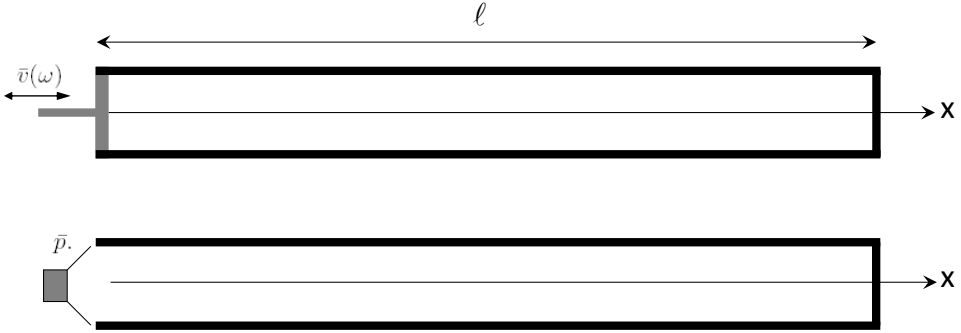


Figure 9.1: Tubes fermés excités par une source de vitesse (dessin du dessus) ou de pression (dessin du dessous).

$$v(\omega, x) = \bar{v} \frac{\sin k(\ell - x)}{\sin k\ell} \quad (9.5)$$

La pression dans le tube devient infinie lorsque :

$$\sin k\ell = 0 \Leftrightarrow k\ell = n\pi \Leftrightarrow f = n \frac{c}{2\ell} \Leftrightarrow \ell = n \frac{\lambda}{2} \quad (9.6)$$

soit lorsque la longueur du tube est un nombre entier de demi-longueur d'onde.

9.1.2 Source de pression

Considérons toujours le tube fermé à droite par une paroi rigide mais supposons que nous disposions à l'extrémité gauche d'un dispositif permettant d'imposer la pression (acoustique) $\bar{p}(\omega)$. La pression induite dans le tube par ce dispositif s'écrit toujours :

$$p(\omega) = p^+(\omega)e^{-ikx} + p^-(\omega)e^{ikx} \quad (9.7)$$

mais les conditions aux limites sont à présent :

$$\begin{aligned} p(x=0) &= \bar{p} \\ v_x(x=\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (9.8)$$

soit :

$$\begin{aligned} p^+ + p^- &= \bar{p} \\ p^+ e^{-ik\ell} - p^- e^{ik\ell} &= 0 \end{aligned} \quad (9.9)$$

ce qui donne :

$$p(\omega, x) = \bar{p} \frac{\cos k(\ell - x)}{\cos k\ell} \quad (9.10)$$

$$v(\omega, x) = \frac{i\bar{p}}{\rho c} \frac{\sin k(\ell - x)}{\cos k\ell} \quad (9.11)$$

La pression dans le tube devient infinie lorsque :

$$\cos k\ell = 0 \Leftrightarrow k\ell = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f = (2n - 1) \frac{c}{4\ell} \Leftrightarrow \ell = (2n - 1) \frac{\lambda}{4} \quad (9.12)$$

soit lorsque la longueur du tube est un nombre impair de quart de longueur d'onde.

9.1.3 Comparaison des deux cas

On peut tout d'abord constater que l'impédance *que le tube fermé impose à la source* est indépendante de la source. Qu'on considère une source de pression ou de vitesse on a toujours :

$$Z(\omega, x = 0) = \frac{p(\omega, x = 0)}{v(\omega, x = 0)} = -i\rho c \frac{\cos k\ell}{\sin k\ell} \quad (9.13)$$

Cette impédance est donc *une caractéristique intrinsèque du tube*. Les fréquences de résonances sont, en revanche, *co-déterminées* par la nature de la source et les caractéristiques du tube puisque les spectres correspondant à une source de pression et une source de vitesse excitant le même tube sont décalés de $\frac{c}{4\ell}$ Figure 9.2.

Pour comprendre cette différence de comportement, il faut de réfléchir à la cause physique de la croissance sans limite de la pression à la résonance. Prenons d'abord le cas de la source de vitesse. Au champ incident $p_i e^{-ikx}$ généré par la source s'ajoute le champ réfléchi à l'extrémité gauche du tube $p_i e^{+ikx}$

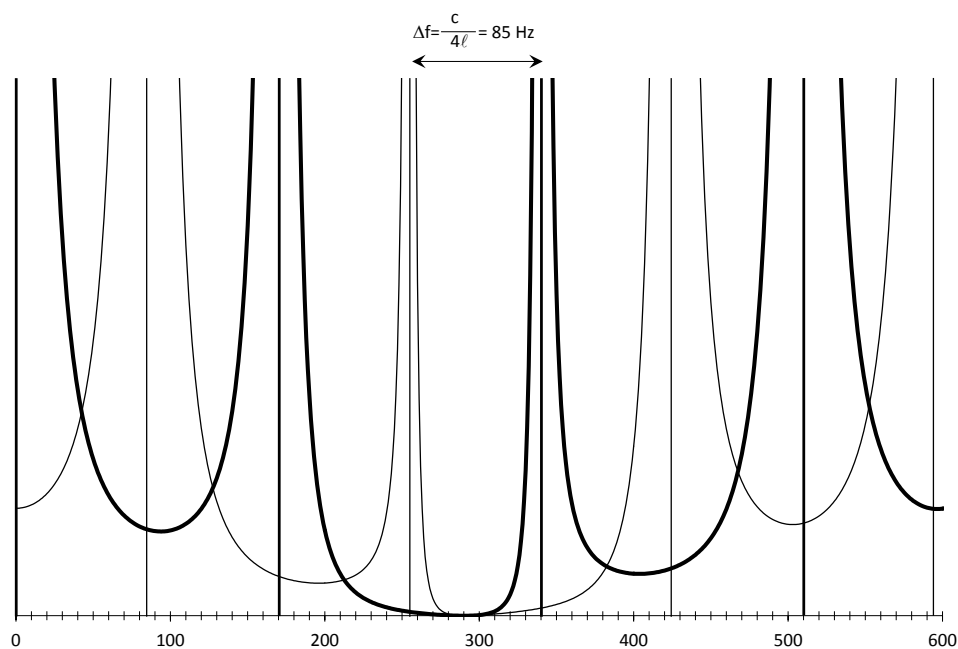


Figure 9.2: Réponse en fréquence de la pression dans un tube fermé ($\ell = 1 \text{ m}$, vitesse du son : 340 m/s , pression calculée en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$). La courbe en trait gras correspond à une source de vitesse, la courbe en trait fin à une source de pression.

mais aussi la réflexion de cette réflexion sur le piston $p_i e^{-ikx}$ et ainsi de suite. À une fréquence quelconque toutes ces ondes interfèrent globalement de manière destructive et la pression totale reste finie. À la résonance, en revanche, toutes ces ondes interfèrent constructivement et la pression tend vers l'infini. Cette interférence constructive intervient lorsque le trajet total de l'onde (aller-retour) est un multiple de la longueur d'onde, c'est-à-dire lorsque la longueur du tube est un nombre entier de demi-longueur d'onde.

Dans le cas du tube excité par une source de pression, on a toujours les champs incident ($p_i e^{-ikx}$) et réfléchi ($p_i e^{+ikx}$) mais lorsque celui-ci se réfléchit à son tour sur la source *de pression* il subit un déphasage de 180 degrés ($-p_i e^{-ikx}$). Pour que la *réflexion de la réflexion* soit en phase avec le champ incident il faut que l'aller-retour soit égal à un nombre impair de demi-longueur d'onde, c'est-à-dire que le tube ait une longueur égale à un nombre impair de quart de longueur d'onde. En un certain sens on pourrait dire que la réflexion sur la source de pression fait instantanément parcourir à l'onde une demi-longueur d'onde supplémentaire.

On peut aussi expliquer la différence de comportement par un argument quasi géométrique sur la forme de la distribution de pression. Si on excite le tube par une source de pression on fixe par définition la valeur de pression dans la section gauche du tube et celle-ci ne peut donc pas être infinie. Le maximum de pression se produit donc nécessairement à une certaine distance de la source à l'intérieur du tube (disons en $x = x_{max}$). Quelle que soit la pression \bar{p} imposée par la source, celle-ci est infiniment petite par rapport à la pression (infinie) qu'on observe en $x = x_{max}$ et donc x_{max} tend vers $\frac{\lambda}{4}$. Comme par ailleurs le gradient de pression doit être nul en $x = l$, la résonance se produit pour un tube dont la longueur a la longueur indiquée plus haut.

Même type d'argument pour le tube excité par une source de vitesse : la vitesse finie imposée fixe la pente à l'origine de la distribution de pression mais plus la pression augmente au gré des réflexions successives, plus x_{max} se rapproche de 0. On a donc une pression maximale (pente nulle) à une distance infiniment petite de la source et à nouveau une pente nulle à l'extrémité droite du tube : celui-ci doit donc avoir une longueur multiple de $\frac{\lambda}{2}$.

Note

Les notions de source de pression et de source de vitesse seront discutées plus en détail à la section 10.4.1 qui introduira notamment la notion d'*impédance de source*.

9.2 Analyse modale

9.2.1 Modes et fréquences propres

Tube fermé-fermé

Considérons un conduit fermé aux deux extrémités par une paroi rigide. Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{aligned} p^+ - p^- &= 0 \\ p^+ e^{-ik\ell} - p^- e^{ik\ell} &= 0 \end{aligned} \quad (9.14)$$

ce qui est toujours vérifié si $p^+ = p^- = 0$ (solution triviale) mais aussi pour tout $p^+ = p^-$ lorsque :

$$e^{-ik\ell} = e^{ik\ell} \Leftrightarrow \sin k\ell = 0 \Leftrightarrow k\ell = n\pi \Leftrightarrow f = n \frac{c}{2\ell} \Leftrightarrow \ell = n \frac{\lambda}{2} \quad (9.15)$$

Les fréquences de résonances sont donc les fréquences pour lesquelles un champ acoustique peut exister en l'absence de cause extérieure. Plus concrètement ce sont les fréquences pour lesquelles un signal induit par une source peut continuer à subsister indéfiniment (il n'y a pas d'absorption dans le modèle considéré) lorsque la source a cessé d'agir. La distribution de pression aux fréquences propres est définie, à une constante multiplicative près, par l'expression suivante :

$$p = A \cos \frac{n\pi x}{\ell} \quad (9.16)$$

qui sont les modes propres correspondant aux fréquences propres $f = \frac{nc}{2\ell}$.

Tube ouvert-fermé

Pour $p_0 = 0$ et $v_\ell = 0$ par exemple on trouve :

$$\begin{aligned} p(x=0) &= p^+ + p^- = 0 \\ v_x(x=\ell) &= \frac{1}{\rho c} (p^+ e^{-ik\ell} - p^- e^{ik\ell}) = 0 \end{aligned} \quad (9.17)$$

ce qui est toujours vérifié si $p^+ = p^- = 0$ (solution triviale) mais aussi pour tout $p^+ = -p^-$ lorsque :

$$\begin{aligned} e^{-ik\ell} + e^{ik\ell} &= 0 \Leftrightarrow \cos k\ell = 0 \Leftrightarrow k\ell = (2n-1)\frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow f &= (2n-1)\frac{c}{4\ell} \Leftrightarrow \ell = (2n-1)\frac{\lambda}{4} \end{aligned} \quad (9.18)$$

Les modes propres correspondants sont :

$$p = A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} \quad (9.19)$$

Notons que la dénomination *tube ouvert* est abusive dans la mesure où l'impédance à la sortie d'un tube ouvert n'est pas nulle ; ce n'est qu'une approximation valable à basse fréquence ($\lambda \gg \phi$ où ϕ désigne le diamètre du tube ou une dimension équivalente).

Tube ouvert-ouvert

Pour $p_0 = p_\ell = 0$ on a :

$$\begin{aligned} p(x=0) &= p^+ + p^- = 0 \\ p(x=\ell) &= p^+ e^{-ik\ell} + p^- e^{ik\ell} = 0 \end{aligned} \quad (9.20)$$

ce qui est toujours vérifié si $p^+ = p^- = 0$ (solution triviale) mais aussi pour tout $p^+ = -p^-$ lorsque :

$$e^{-ik\ell} = e^{ik\ell} \Leftrightarrow \sin k\ell = 0 \Leftrightarrow k\ell = n\pi \Leftrightarrow f = n\frac{c}{2\ell} \Leftrightarrow \ell = n\frac{\lambda}{2} \quad (9.21)$$

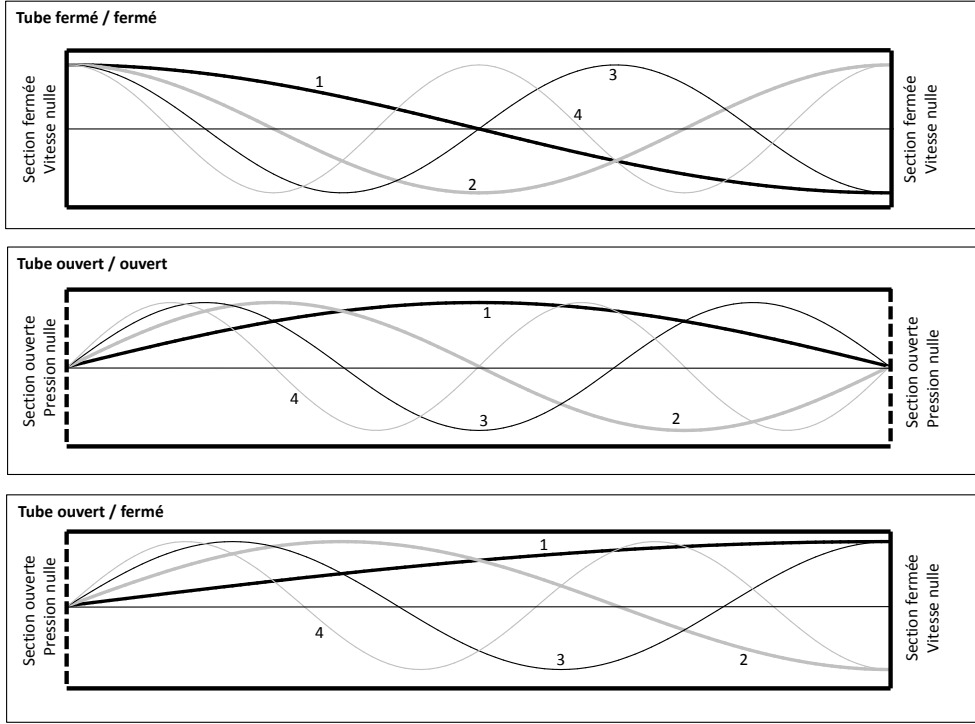


Figure 9.3: Distribution de pression correspondant aux premiers modes de tubes fermé-fermé, ouvert-fermé et ouvert-ouvert.

Les modes propres correspondants sont :

$$p = A \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (9.22)$$

Les modes propres des trois systèmes considérés (fermé-fermé, fermé-ouvert et ouvert-ouvert) sont présentés à la figure 9.3.

9.2.2 Superposition modale

La pression dans un tube fermé à droite et excité à gauche par un piston est donnée par :

$$p(\omega, x) = -i\rho c \bar{v} \frac{\cos k(\ell - x)}{\sin k\ell} \quad (9.23)$$

Cette distribution peut être approchée sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres associés au tube fermé-fermé :

$$p(\omega, x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\omega) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \quad (9.24)$$

Pour trouver les facteurs de participation modaux A_m il suffit de multiplier chaque côté par $\cos \frac{m\pi x}{\ell}$ puis d'intégrer sur l'intervalle $[0, \ell]$. En tenant compte du fait que pour $m, n \neq 0$ on a :

$$\int_0^{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{\ell}{2} \delta_{mn} \quad (9.25)$$

et que pour $m, n = 0$ on a :

$$\int_0^{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \int_0^{\ell} dx = \ell \quad (9.26)$$

on trouve les expressions suivantes pour A_m :

$$A_0(\omega) = \frac{-i\rho c \bar{v}}{\sin k\ell} \int_0^{\ell} \cos k(\ell - x) dx = \frac{-i\rho c \bar{v}}{k\ell} \quad (9.27)$$

$$\begin{aligned} A_m(\omega) &= \frac{-2i\rho c \bar{v}}{\ell \sin k\ell} \int_0^{\ell} \cos k(\ell - x) \cos \frac{m\pi x}{\ell} dx \\ &= \frac{-i\rho c \bar{v}}{\sin k\ell} \left(\frac{\sin k\ell + \sin m\pi}{k\ell + m\pi} + \frac{\sin k\ell - \sin m\pi}{k\ell - m\pi} \right) \end{aligned} \quad (9.28)$$

La figure 9.4 montre le champ de pression exact et l'approximation pour un nombre croissant de modes. On voit que le développement modal converge rapidement vers la solution exacte sauf au voisinage de la condition aux limites. Des modes qui, par construction, ont une vitesse nulle en $x = 0$ ne peuvent en effet pas se combiner pour engendrer un champ à vitesse non nulle ($v = \bar{v}$) au droit du piston. Ceci se voit encore plus nettement à la figure 9.5 qui compare la distribution de vitesse acoustique dans le tube à son approximation modale.

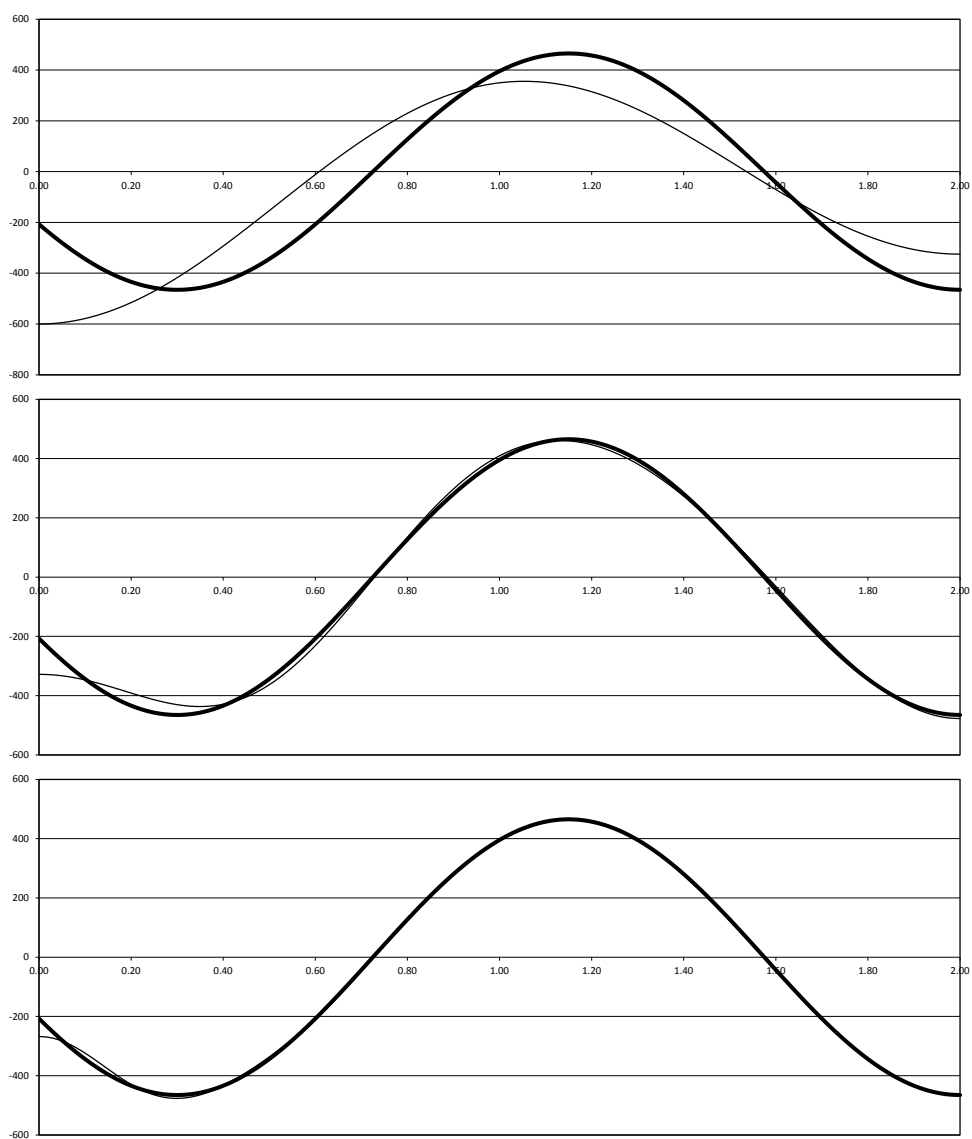


Figure 9.4: Approximation de la pression dans un tube ($\ell = 2$ m, $f = 200$ Hz, $\bar{v} = 1$ m/s) par superposition modale. On limite le développement à $m = 2$ dans le premier graphe, $m = 5$ dans le second et à $m = 10$ dans le dernier.

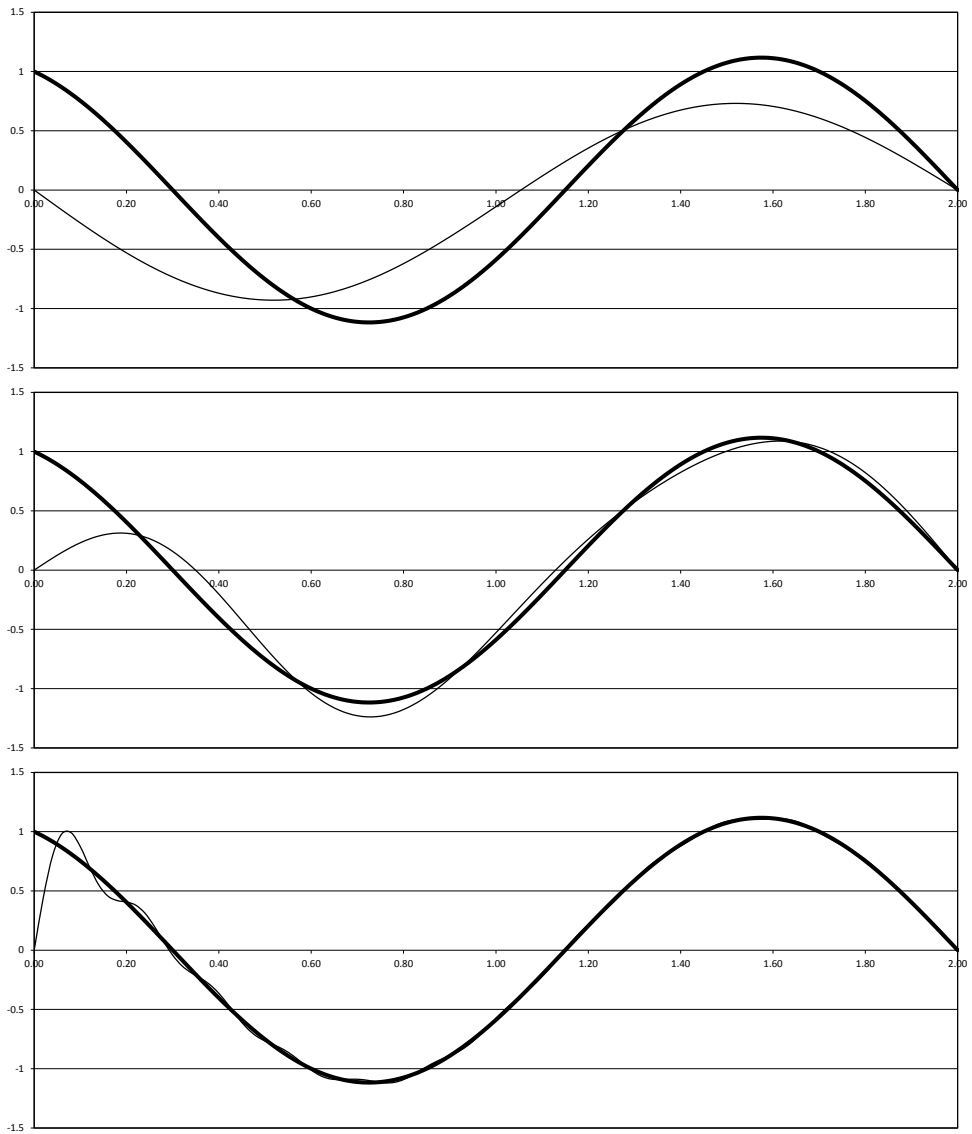


Figure 9.5: Approximation de la vitesse dans un tube ($\ell = 2$ m, $f = 200$ Hz, $\bar{v} = 1$ m/s) par superposition modale. On limite le développement à $m = 2$ dans le premier graphe, $m = 5$ dans le second et à $m = 25$ dans le dernier.

9.3 Cavité parallépipédique

Considérons une cavité parallépipédique de dimensions $a \times b \times d$ dont les parois sont infiniment rigides. L'équation de Helmholtz s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0 \quad (9.29)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{x=0} &= \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{x=a} = 0 \\ \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=0} &= \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=b} = 0 \\ \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right]_{z=0} &= \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right]_{z=d} = 0 \end{aligned} \quad (9.30)$$

De manière générale ce problème n'admet que des solutions triviales. Toute fonction de la forme :

$$A \cos k_x x \cos k_y y \cos k_z z \quad (9.31)$$

est toutefois solution de l'équation pour autant que :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (9.32)$$

et satisfait aux conditions aux limites si les trois nombres d'ondes peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} k_x &= i \frac{\pi}{a} \\ k_y &= j \frac{\pi}{b} \\ k_z &= m \frac{\pi}{d} \end{aligned} \quad (9.33)$$

  chaque triplet (i, j, m) correspond un mode propre :

$$\phi_{ijm} = \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \cos \frac{m\pi z}{d} \quad (9.34)$$

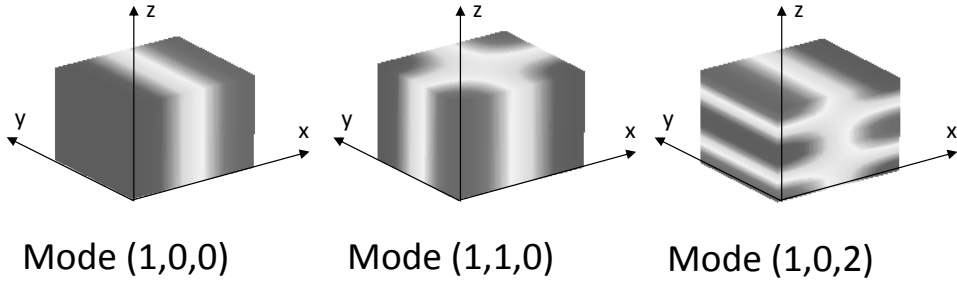


Figure 9.6: Distribution de pression correspondant à trois modes propres d'une cavité parallélépipédique.

dont la fréquence propre est donnée par :

$$f_{ijm} = \frac{kc}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{d}\right)^2} \quad (9.35)$$

La figure 9.6 montre la distribution de pression associée à différents modes d'une cavité parallélépipédique.

Mode à fréquence nulle

On peut noter que le triplet $(0,0,0)$, auquel correspond une fréquence propre nulle et une distribution de pression constante, est bien un mode propre. Il est en effet solution de l'équation de Helmholtz pour $k = 0$ et satisfait aux conditions aux limites sur toutes les parois ($\partial_n p = 0$). Ce mode à pression constante correspond aux *modes de corps rigide* de la dynamique des structures. On en voit la trace dans les fonctions de réponse acoustiques caractérisant une cavité fermée ; celles-ci présentent toujours un premier pic à l'origine de l'axe des fréquences (voir par exemple la figure 9.2).

9.4 Résonances d'une cavité quelconque

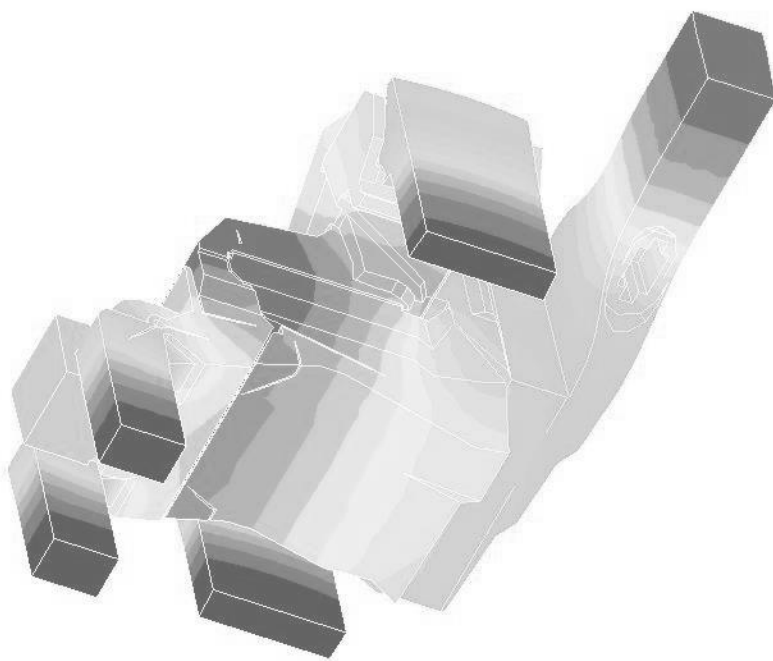
Les résonances d'une cavité de forme quelconque peuvent être calculées par la méthode des éléments finis. Considérons un domaine Ω aux parois non traitées. Le système d'équations résultant de la discrétisation de Ω en éléments finis¹ s'écrit, en l'absence d'amortissement et d'excitation :

$$\left[K - \omega^2 M \right] (p(\omega)) = 0 \quad (9.36)$$

où K est la matrice de rigidité et M la matrice de masse. Ce système homogène n'admet une solution non triviale (les modes propres ϕ_i) que pour un ensemble discret de fréquences (les fréquences propres $f_i = \omega_i/2\pi$) qu'on obtient en appliquant au système 9.36 une méthode classique de recherche de valeurs et vecteurs propres (méthode de Krylov ou méthode du sous-espace itéré par exemple).

La figure 9.7 montre, à titre d'exemple, un mode acoustique de la cavité d'un module de climatisation automobile calculé par la méthode des éléments finis.

1. Le formalisme de la méthode des éléments finis est supposé connu, dans ses principes généraux tout du moins.



©ACTRAN by Free Field Technologies. Used by permission.

Figure 9.7: Mode acoustique à 444 Hz de la cavité intérieure d'un module de conditionnement d'air de voiture.

10

PROPAGATION GUIDÉE

Contents

10.1	Fréquence de coupure	214
10.2	Matrices de transfert	216
10.3	<i>Transmission Loss</i> (TL)	229
10.4	<i>Insertion Loss</i> (IL)	234
10.5	Fréquences de coupure de conduits circulaires	238
10.6	Rôle des modes évanescents	242
10.7	Silencieux réactifs et dissipatifs	250

Nous allons à présent étudier la propagation du son dans des systèmes de conduits : entrée d'air ou échappement de moteurs, gaines de climatisation par exemple. Nous démontrerons dans un premier temps que, sous une certaine fréquence appelée fréquence de coupure, le son se propage exclusivement sous forme d'ondes planes dans un conduit. Nous verrons ensuite comment caractériser la propagation d'ondes planes dans des conduits de formes diverses par une simple matrice de transfert. Les notions de *Transmission Loss* et d'*Insertion Loss* seront enfin présentées.

10.1 Fréquence de coupure

Considérons un tube de section rectangulaire de dimensions $a \times b$. Les parois sont supposées rigides. Le champ acoustique dans le tube obéit à l'équation de Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0 \quad (10.1)$$

et aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{x=0} &= \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{x=a} = 0 \\ \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=0} &= \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=b} = 0 \end{aligned} \quad (10.2)$$

De manière générale, ce problème n'admet que des solutions triviales. Toute fonction de la forme :

$$A \cos k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \quad (10.3)$$

est toutefois solution de l'équation pour autant que :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (10.4)$$

et satisfait aux conditions aux limites si les deux nombres d'ondes k_x et k_y peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} k_x &= m \frac{\pi}{a} \\ k_y &= n \frac{\pi}{b} \end{aligned} \quad (10.5)$$

k_z est alors obtenu à partir de la loi de dispersion :

$$k_z = \sqrt{k^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \quad (10.6)$$

On peut donc avoir deux situations :

1. Si k_z est réel, la solution représente bien une onde se propageant dans le conduit : on dit que le mode (m,n) est *propagatif*.
2. Si, en revanche, k_z est imaginaire, la solution devient ($k_z = ik_i$) :

$$A \cos k_x x \cos k_y y e^{-k_i z} \quad (10.7)$$

qui représente une distribution de pression dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la distance. On parle d'onde *évanescence* et on dit que le mode (m,n) est non propagatif Figure 10.1.

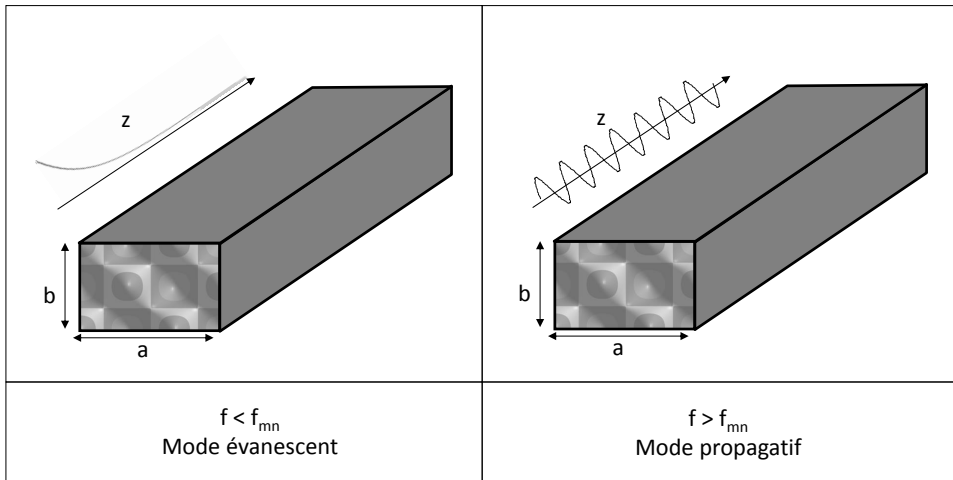


Figure 10.1: Fréquences de coupure, modes évanescents et modes propagatifs.

À un ordre (m,n) donné correspond une *fréquence de coupure* f_{mn} en dessous de laquelle le mode ne se propage pas. Pour le conduit rectangulaire considéré, cette fréquence de coupure est donnée par :

$$f_{mn} = \sqrt{\frac{m^2 c^2}{4a^2} + \frac{n^2 c^2}{4b^2}} \quad (10.8)$$

Pour un mode plan (m=n=0), $f_{mn} = 0$: une onde plane se propage donc à toutes les fréquences. Le premier mode non plan est, si $a > b$, le mode (1,0) pour lequel la fréquence de coupure est :

$$f_{10} = \frac{c}{2a} \quad (10.9)$$

Cette fréquence de coupure du premier mode non plan définit la limite de validité des modèles qui vont être présentés ci-dessous (méthode des matrices de transfert) qui supposent que le champ acoustique est décrit, en tous points du système, par des ondes planes. Pour fixer les idées, considérons un tube dont la section a pour plus grande dimension 5 cm ; on trouve $f_{10} = 3.400$ Hz ; on pourra donc utiliser les modèles ci-dessous en deçà de cette fréquence.

10.2 Matrices de transfert

10.2.1 Conduit de section constante

Soit un tube de longueur ℓ et de section constante S dans lequel se propage une onde plane. Le champ acoustique dans la section *d'entrée* est défini par la pression et la vitesse dans cette section (p_e, v_e). De même, dans la section *de sortie*, ce champ est décrit par le couple (p_s, v_s). On peut définir une relation linéaire entre ces deux couples de grandeurs :

$$\begin{aligned} p_e &= Ap_s + Bv_s \\ v_e &= Cp_s + Dv_s \end{aligned} \quad (10.10)$$

La matrice :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

est appelée la matrice de transfert du conduit. On peut en calculer les coefficients en considérant deux jeux de conditions aux limites différents. Imposons d'abord au tube les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} v_e &= 1 \\ v_s &= 0 \end{aligned} \quad (10.12)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A &= \frac{p_e}{p_s} \\ C &= \frac{1}{p_s} \end{aligned} \quad (10.13)$$

mais nous connaissons (Equation 8.63) la solution du problème :

$$p = -i\rho c \frac{\cos k(\ell - x)}{\sin k\ell} \quad (10.14)$$

On en déduit les valeurs de p_e et p_s et donc celles de A et C :

$$\begin{aligned} A &= \cos k\ell \\ C &= \frac{i}{\rho c} \sin k\ell \end{aligned} \quad (10.15)$$

Imposons maintenant d'autres conditions aux limites :

$$\begin{aligned} v_e &= 1 \\ p_s &= 0 \end{aligned} \quad (10.16)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} B &= \frac{p_e}{v_s} \\ D &= \frac{1}{v_s} \end{aligned} \quad (10.17)$$

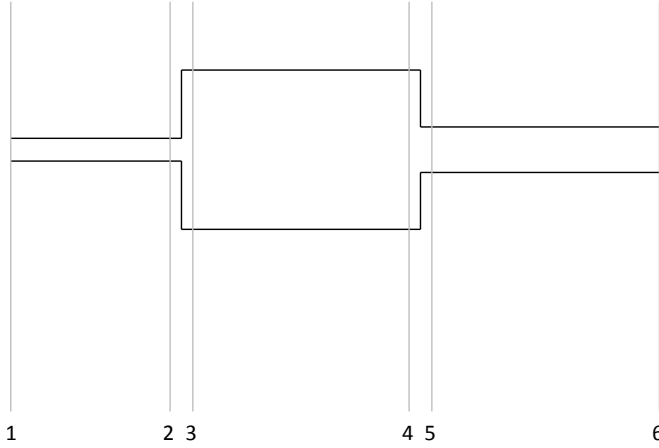


Figure 10.2: Assemblage de trois tubes.

La solution de ce problème est également connue (Equation 8.62) :

$$p = i\rho c \frac{\sin k(\ell - x)}{\cos k\ell} \quad (10.18)$$

On en déduit les valeurs de v_e et p_s et donc celles de B et D :

$$\begin{aligned} B &= i\rho c \sin k\ell \\ D &= \cos k\ell \end{aligned} \quad (10.19)$$

La matrice de transfert d'un tube de section constante est donc :

$$\begin{pmatrix} \cos k\ell & i\rho c \sin k\ell \\ \frac{i \sin k\ell}{\rho c} & \cos k\ell \end{pmatrix} \quad (10.20)$$

10.2.2 Assemblage de trois tubes

Considérons maintenant l'assemblage de trois tubes de la figure 10.2. Les tubes ont respectivement les longueurs ℓ_a , ℓ_b et ℓ_c et les sections S_a , S_b et S_c . Les sections 2 et 3 sont respectivement situées juste avant et juste après la discontinuité de section entre le premier et le deuxième tube. De même, les sections

4 et 5 sont situées juste avant et juste après celle entre le deuxième et le troisième tube. Les matrices de transfert liant les couples pression-vitesse entre les sections 1-2, 3-4 et 5-6 sont celles calculées au paragraphe précédent :

$$T_{12} = \begin{pmatrix} \cos k\ell_a & i\rho c \sin k\ell_a \\ \frac{i \sin k\ell_a}{\rho c} & \cos k\ell_a \end{pmatrix} \quad (10.21)$$

$$T_{34} = \begin{pmatrix} \cos k\ell_b & i\rho c \sin k\ell_b \\ \frac{i \sin k\ell_b}{\rho c} & \cos k\ell_b \end{pmatrix} \quad (10.22)$$

$$T_{56} = \begin{pmatrix} \cos k\ell_c & i\rho c \sin k\ell_c \\ \frac{i \sin k\ell_c}{\rho c} & \cos k\ell_c \end{pmatrix} \quad (10.23)$$

Entre les sections 2 et 3 on peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p_2 &= p_3 \\ S_a v_2 &= S_b v_3 \end{aligned} \quad (10.24)$$

dont on déduit la matrice de transfert associée au changement de section $S_a \rightarrow S_b$:

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_b}{S_a} \end{pmatrix} \quad (10.25)$$

De même on a :

$$T_{45} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_c}{S_b} \end{pmatrix} \quad (10.26)$$

On peut à présent construire la matrice de transfert du composant tout entier en multipliant entre elles les différentes matrices de transfert :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= T_{12} \cdot T_{23} \cdot T_{34} \cdot T_{45} \cdot T_{56} \cdot \begin{pmatrix} p_6 \\ v_6 \end{pmatrix} \\ &= T_{16} \cdot \begin{pmatrix} p_6 \\ v_6 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.27)$$

Cet exemple met en évidence les principes de la méthode des matrices de transfert :

- décomposition du système en composants élémentaires pour lesquels les matrices de transfert sont connues ;
- calcul de la matrice de transfert globale comme produit des matrices

élémentaires.

L'hypothèse fondamentale de cette méthode est que le champ acoustique peut, en tout point, être assimilé à une onde plane. Cette hypothèse est vérifiée si la fréquence reste, en tout point du système, inférieure à la fréquence de coupure du premier mode non plan.

10.2.3 Connexion en T

Théorème de Thévenin

En électricité, le théorème de Thévenin¹ permet de scinder un circuit en deux parties connectées l'une à l'autre en deux points : la partie *active* inclut la ou les sources et un ensemble de composants (résistances, capacités, inductances, mutuelles) ; la partie *passive* contient un autre ensemble de composants. Pour tout ce qui concerne la partie active (différence de potentiels entre deux points, intensité dans chaque branche du circuit), le théorème de Thévenin indique qu'on peut remplacer la partie passive par une impédance équivalente complexe et dépendante de la fréquence.

Ce théorème s'applique également aux champs acoustiques unidimensionnels (onde plane). Montrons-le sur un exemple simple et considérons à nouveau le problème du tube excité par un piston. Coupons le tube en deux parties, respectivement de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 ($\ell_1 + \ell_2 = \ell$, voir figure 10.3). On sait (Equation 9.13) que l'impédance à l'endroit de la coupure vaut :

$$Z_2 = Z(\omega, x = \ell_2) = -i\rho c \frac{\cos k\ell_2}{\sin k\ell_2} \quad (10.28)$$

Le champ acoustique dans un tube de longueur ℓ_1 excité par une source de vitesse et fermé par une surface portant une impédance Z_2 est donnée par (Equation 8.61) :

$$p = i\rho c \bar{v} \frac{\sin k(\ell_1 - x) - iz \cos k(\ell_1 - x)}{\cos k\ell_1 + i \frac{Z_2}{\rho c} \sin k\ell_1} \quad (10.29)$$

1. **Léon Charles Thévenin**, né à Meaux en 1857 et mort à Paris en 1926, ingénieur électricien français.

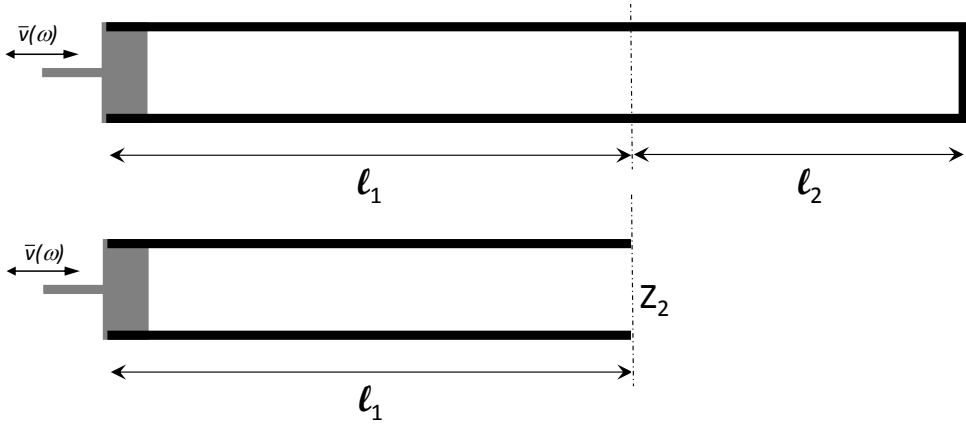


Figure 10.3: Application du théorème de Thévenin au cas du tube rigide excité par une source de vitesse.

En substituant l'expression 10.28 dans la relation 10.29 on trouve, après quelques calculs :

$$p(\omega, x) = -i\rho c\bar{v} \frac{\cos k(\ell - x)}{\sin k\ell} \quad (10.30)$$

Ce qui est bien identique à l'équation 9.4 : pour tout ce qui concerne la partie gauche du tube (pression, vitesse, intensité) les deux problèmes de la figure 10.3 sont strictement équivalents. Ce résultat important va être exploité à la section suivante.

Matrice de transfert d'une connexion en T

Considérons la connexion en T de la figure 10.4a. On peut écrire les relations suivantes entre les pression et les vitesses dans les différentes sections (qu'on considère infiniment proches l'une de l'autre) :

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 = p_3 \\ S_1 v_1 &= S_2 v_2 + S_3 v_3 \end{aligned} \quad (10.31)$$

Si la branche 3 débouche sur un composant généralement quelconque et caractérisée par une impédance Z_3 connue (théorème de Thévenin), on peut

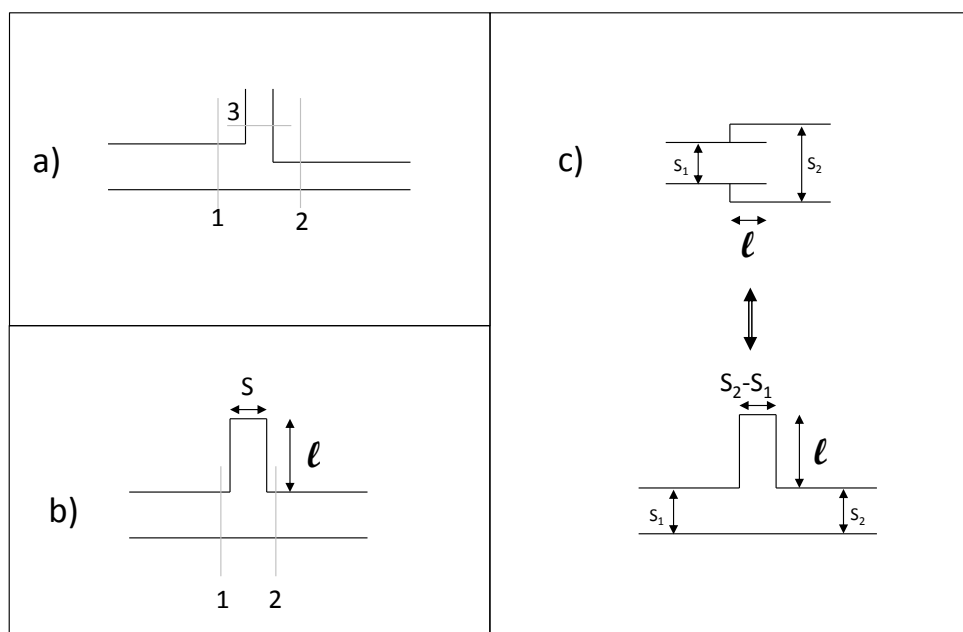


Figure 10.4: Différentes connexions en T.

écrire la deuxième relation sous la forme :

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 + \frac{S_3}{Z_3 S_1} p_2 \quad (10.32)$$

Et donc la matrice de transfert liant les sections 1 et 2 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S_3}{Z_3 S_1} & \frac{S_2}{S_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (10.33)$$

10.2.4 Résonateur quart d'onde

Considérons le cas d'un conduit de section constante connecté à un résonateur de longueur ℓ et de section S (figure 10.4b). L'impédance d'un tel résonateur est donnée par :

$$Z_3 = -i\rho c \frac{\cos k\ell}{i \sin k\ell} \quad (10.34)$$

de telle sorte que la matrice de transfert entre l'amont et l'aval du résonateur est donnée par :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S}{\rho c S_1} \tan k\ell & \frac{S_2}{S_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (10.35)$$

Z_3 est nulle lorsque $\ell = \lambda/4$; dans ce cas, toute onde injectée à l'entrée du résonateur se propage dans le tube sur un quart de longueur d'onde avant d'être réfléchi à l'extrémité et de revenir vers l'entrée après avoir parcouru à nouveau un quart de longueur d'onde. Le signal original et le signal réfléchi ont donc la même amplitude mais sont exactement décalés d'une demi-longueur d'onde : ils s'annulent l'un l'autre Figure 10.5. Ces dispositifs, baptisés *résonateurs quart d'onde*, sont très fréquemment utilisés dans l'industrie, dans des conduits ou en sortie d'un ventilateur par exemple.

Un tube débouchant est un exemple particulier de résonateur de section $S_2 - S_1$ (figure 10.4c).

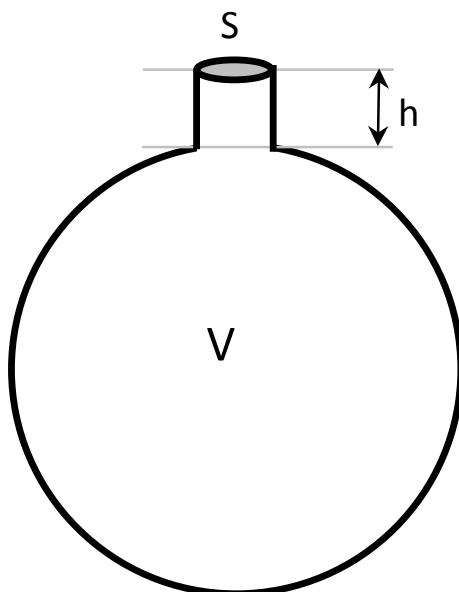


Figure 10.6: Résonateur de Helmholtz.

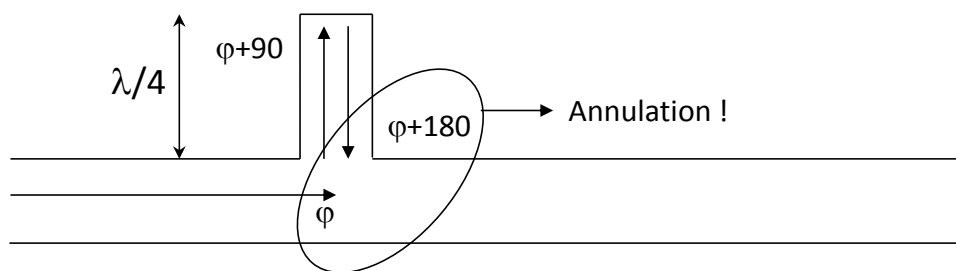


Figure 10.5: Principe de fonctionnement du résonateur quart d'onde.

10.2.5 Résonateur de Helmholtz

Un résonateur de Helmholtz est constitué d'un volume d'air V et d'une petite ouverture de section S et de hauteur h (figure 10.6). À basse fréquence,

l'air contenu dans le col du résonateur peut être considéré comme une masse ponctuelle ($m = \rho h S$) et l'air contenu dans le volume comme un ressort dont la rigidité k s'évalue en considérant qu'un petit déplacement δ du col produit un surcroît de pression Δp dans le volume :

$$\Delta p = \kappa \frac{\Delta V}{V} = \kappa \frac{\delta \cdot S}{V} \quad (10.36)$$

où $\kappa = \rho c^2$ est le module de compressibilité de l'air. La rigidité est le rapport entre la force de rappel que subit le col ($F = S \Delta p$) et le déplacement δ soit :

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{\rho c^2 S^2}{V} \quad (10.37)$$

La fréquence de résonance de ce système masse-ressort est alors donnée par :

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{hV}} \quad (10.38)$$

L'impédance mécanique locale (force sur déplacement) est de :

$$Z_m = k - \omega^2 m = \frac{\rho c^2 S^2}{V} - \rho \omega^2 h S \quad (10.39)$$

Si on place un résonateur de Helmholtz en dérivation dans un conduit, on impose donc localement une impédance acoustique (pression sur vitesse) qui vaut :

$$Z_a = \frac{Z_m}{i\omega S} \quad (10.40)$$

Cette impédance est nulle à la résonance et le résonateur renvoie alors vers la source la totalité du champ incident : il n'y a pas de champ transmis.

Dissipation dans le résonateur

Pour être précis il y a lieu de tenir compte de la dissipation visqueuse dans le col du résonateur (R_v) et de la perte par rayonnement (R_r). L'impédance mécanique locale a donc une composante réelle et une composante imaginaire :

$$Z_m = \left(\frac{\rho c^2 S^2}{V} - \rho \omega^2 h S \right) + i\omega (R_r + R_v) \quad (10.41)$$

Ingard² propose les expressions suivantes pour R_r et R_v (a est le rayon du col) :

$$R_r = \frac{\rho c k^2 S^2}{2\pi} \quad (10.42)$$

$$R_v = 0.00166 \sqrt{f} \cdot S \cdot \frac{h + a}{\rho c a} \quad (10.43)$$

Le champ résiduel transmis à la résonance est intégralement dû aux pertes dans le résonateur.

10.2.6 Autres formes des matrices de transfert

Ayant fait l'hypothèse que le champ acoustique est uniforme dans toute section du système, on peut le caractériser par trois couples de grandeurs : soit les amplitudes p^+ et p^- des ondes se propageant dans les deux directions le long de l'axe du conduit, soit la pression p et la vitesse acoustique v , soit encore la pression p et le débit acoustique $q = pS$ où S est l'aire de la section considérée. Suivant le choix des descripteurs on définit la matrice de transfert sous la forme :

$$\begin{pmatrix} p_e \\ v_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_s \\ v_s \end{pmatrix} \quad (10.44)$$

$$\begin{pmatrix} p_e \\ q_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_s \\ q_s \end{pmatrix} \quad (10.45)$$

$$\begin{pmatrix} p_e^+ \\ p_e^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_s^+ \\ p_s^- \end{pmatrix} \quad (10.46)$$

Suivant les cas il s'avérera plus facile d'utiliser l'une ou l'autre forme : la première est classique, la deuxième intègre automatiquement les changements de section alors que les coefficients de la troisième ont un sens physique important qui sera exploité plus loin. Il existe bien entendu des équivalences entre

2. **Uno Ingard**, *On the Theory and Design of Acoustic Resonators*, J. Acoust. Soc. Am. 25, 1037 (1953).

les éléments des trois matrices. Il est par exemple évident que :

$$\begin{aligned} A' &= A \\ B' &= \frac{B}{S_s} \\ C' &= S_e C \\ D' &= \frac{S_e}{S_s} D \end{aligned} \quad (10.47)$$

Pour passer des coefficients $[A, B, C, D]$ aux coefficients $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ il faut noter que :

$$p_e = p_e^+ + p_e^- \quad (10.48)$$

et

$$v_e = \frac{1}{\rho c} (p_e^+ - p_e^-) \quad (10.49)$$

d'où il découle, après quelques calculs :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{\rho c} + \rho c C + D \right) \\ \beta &= \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{\rho c} + \rho c C - D \right) \\ \gamma &= \frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{\rho c} - \rho c C - D \right) \\ \delta &= \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{\rho c} - \rho c C + D \right) \end{aligned} \quad (10.50)$$

10.2.7 Mesure d'une matrice de transfert à l'aide de quatre microphones

La mesure des quatre coefficients d'une matrice de transfert se fait en combinant deux ensembles de mesures prises avec deux impédances différentes Z_a et Z_b dans la section de sortie, par exemple en laissant la sortie ouverte puis en la fermant avec un dispositif quelconque. Notons que la valeur de ces deux impédances ne doit pas être connue ; il suffit qu'elles soient différentes. Plaçons deux microphones juste en aval de la section d'entrée et deux autres juste en amont de la section de sortie (voir le schéma de principe à la figure 10.7 et un système de mesure réel à la figure 10.8) et mesurons les quatre pressions

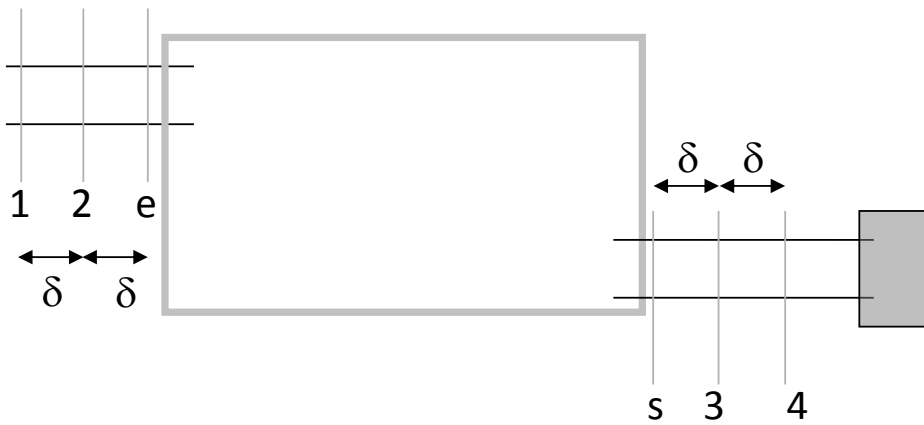


Figure 10.7: Mesure de la matrice de transfert d'un composant par la méthode des quatre microphones : principe de la méthode.



© Bias Muhendislik. Used by permission.

Figure 10.8: Mesure de la matrice de transfert d'un composant par la méthode des quatre microphones : dispositif expérimental.

dans les deux configurations. La même distance δ sépare les sections 1 et 2, 2 et e, s et 3 et 3 et 4. On peut écrire les relations suivantes entre les huit pressions ainsi mesurées :

$$\begin{aligned}
 p_{1a} &= p_{ea}^+ e^{2ik\delta} + p_{ea}^- e^{-2ik\delta} \\
 p_{2a} &= p_{ea}^+ e^{ik\delta} + p_{ea}^- e^{-ik\delta} \\
 p_{3a} &= p_{sa}^+ e^{-ik\delta} + p_{sa}^- e^{ik\delta} \\
 p_{4a} &= p_{sa}^+ e^{-2ik\delta} + p_{sa}^- e^{2ik\delta}
 \end{aligned} \tag{10.51}$$

$$\begin{aligned}
 p_{1b} &= p_{eb}^+ e^{2ik\delta} + p_{eb}^- e^{-2ik\delta} \\
 p_{2b} &= p_{eb}^+ e^{ik\delta} + p_{eb}^- e^{-ik\delta} \\
 p_{3b} &= p_{sb}^+ e^{-ik\delta} + p_{sb}^- e^{ik\delta} \\
 p_{4b} &= p_{sb}^+ e^{-2ik\delta} + p_{sb}^- e^{2ik\delta}
 \end{aligned} \tag{10.52}$$

La résolution de ces deux systèmes de quatre équations à quatre inconnues donne l'amplitude des ondes progressive et régressive dans la section d'entrée et de sortie pour les deux configurations. Connaissant ces grandeurs, on peut écrire le nouveau système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{aligned}
 p_{ea}^+ &= \alpha p_{sa}^+ + \beta p_{sa}^- \\
 p_{ea}^- &= \gamma p_{sa}^+ + \delta p_{sa}^- \\
 p_{eb}^+ &= \alpha p_{sb}^+ + \beta p_{sb}^- \\
 p_{eb}^- &= \gamma p_{sb}^+ + \delta p_{sb}^-
 \end{aligned} \tag{10.53}$$

dont la résolution donne les coefficients α , β , γ et δ .

10.3 *Transmission Loss (TL)*

Les coefficients α , β , γ et δ ont chacun une signification physique importante. Si nous supposons que la section s est anéchoïque ($p_s^- = 0$) on a :

$$p_e^+ = \alpha p_s^+ \tag{10.54}$$

α mesure donc le rapport entre l'énergie qui sort du système :

$$I_s^+ = \frac{|p_s|^{+2}}{2\rho c} \quad (10.55)$$

et l'énergie qui y entre :

$$I_e^+ = \frac{|p_e|^{+2}}{2\rho c} = |\alpha|^2 I_s^+ \quad (10.56)$$

L'indice d'affaiblissement de la ligne (en anglais *Transmission Loss* ou TL) est la mesure du facteur de transmission en échelle logarithmique :

$$TL = -10 \log \frac{I_s^+}{I_e^+} = 10 \log |\alpha|^2 = 20 \log \left[\frac{1}{2} \left| A + \frac{B}{\rho c} + \rho c C + D \right| \right] \quad (10.57)$$

Le rapport des énergies réfléchie et incidente (facteur de réflexion), toujours dans le cas d'une terminaison anéchoïque, est donné par :

$$\frac{I_e^-}{I_e^+} = \frac{|\gamma|^2}{|\alpha|^2} \quad (10.58)$$

Dans le cas d'une terminaison parfaitement rigide empêchant toute transmission ($p_s^+ = 0$), ce rapport vaut :

$$\frac{I_e^-}{I_e^+} = \frac{|\delta|^2}{|\beta|^2} \quad (10.59)$$

10.3.1 TL d'une chambre d'expansion

Considérons une chambre cylindrique de section mS et de longueur l connectée en amont et en aval à des tubes de sections S . On cherche la perte en transmission entre les sections situées immédiatement en aval et en amont de la chambre d'expansion. La matrice de transfert entre les deux sections est

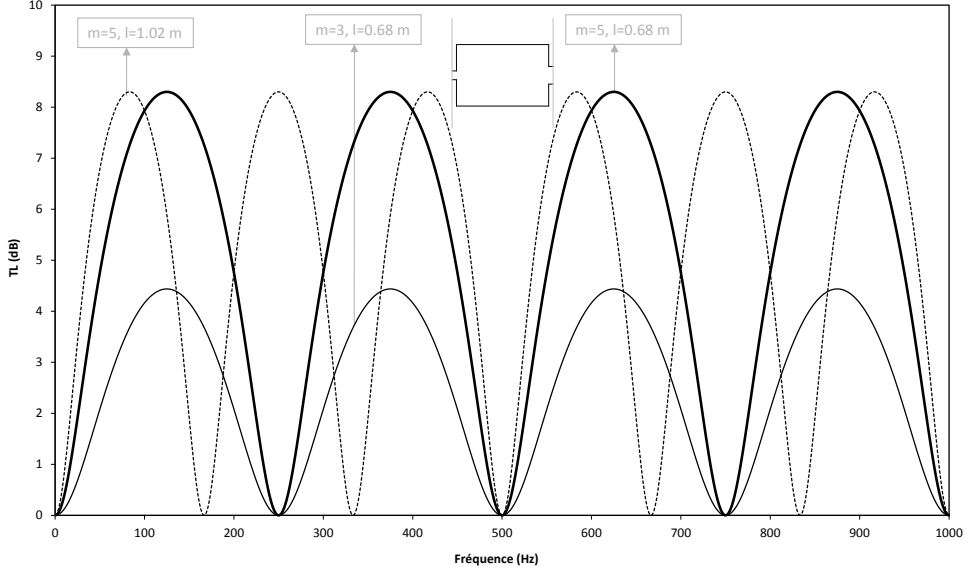


Figure 10.9: *Transmission Loss* d'une chambre d'expansion : le coefficient m influence le niveau de l'atténuation et la longueur ℓ définit les fréquences où le TL est maximum ou nul.

donnée par :

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos k\ell & i\rho c \sin k\ell \\ \frac{i \sin k\ell}{\rho c} & \cos k\ell \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos k\ell & \frac{i\rho c}{m} \sin k\ell \\ \frac{im}{\rho c} \sin k\ell & \cos k\ell \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{10.60}$$

et le TL vaut Figure 10.9 :

$$TL = -10 \log \left[1 + \left(\frac{m^2 - 1}{2m} \sin k\ell \right)^2 \right] \tag{10.61}$$

Dès que la fréquence d'excitation dépasse la première fréquence de coupure, pour l'un au moins des composants, le TL subit profondément l'effet des modes non plans. À titre d'exemple, la figure 10.10 compare le TL de la chambre d'expansion calculé avec et sans prise en compte des modes non plans.

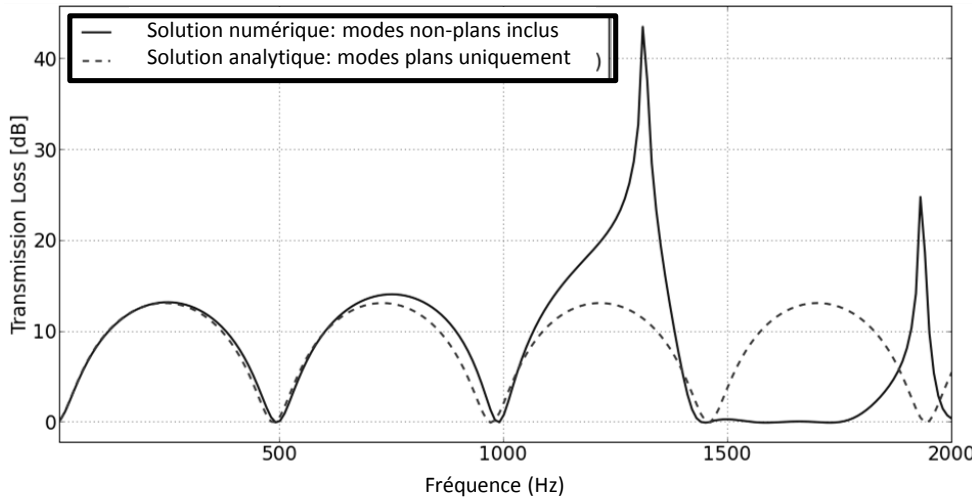


Figure 10.10: Effet des modes non plans sur le TL d'une chambre d'expansion : la solution analytique (équation 10.61, en traits interrompus) est comparée à une solution numérique (traits continus). Dès 1 000 Hz, les deux solutions décrochent.

10.3.2 TL d'un tube muni d'un résonateur

La figure 10.11 montre le TL d'un tube muni d'un résonateur et compare l'efficacité de trois résonateurs de même fréquence de résonance : deux résonateurs de Helmholtz de géométries différentes et un résonateur quart d'onde. On observe :

- qu'un résonateur de Helmholtz est efficace dans une plus large bande de fréquence que le résonateur quart d'onde équivalent ;
- que la gamme de fréquence où un résonateur de Helmholtz est efficace augmente, à fréquence de résonance constante, avec la masse de l'air contenue dans le col (m) ;
- que le résonateur de Helmholtz a une résonance unique³ alors que le quart d'onde est résonant pour les harmoniques impairs de son fondamental.

3. Tant que la fréquence d'excitation reste inférieure à la première fréquence de résonance du volume du résonateur ce qui est son mode de fonctionnement normal.

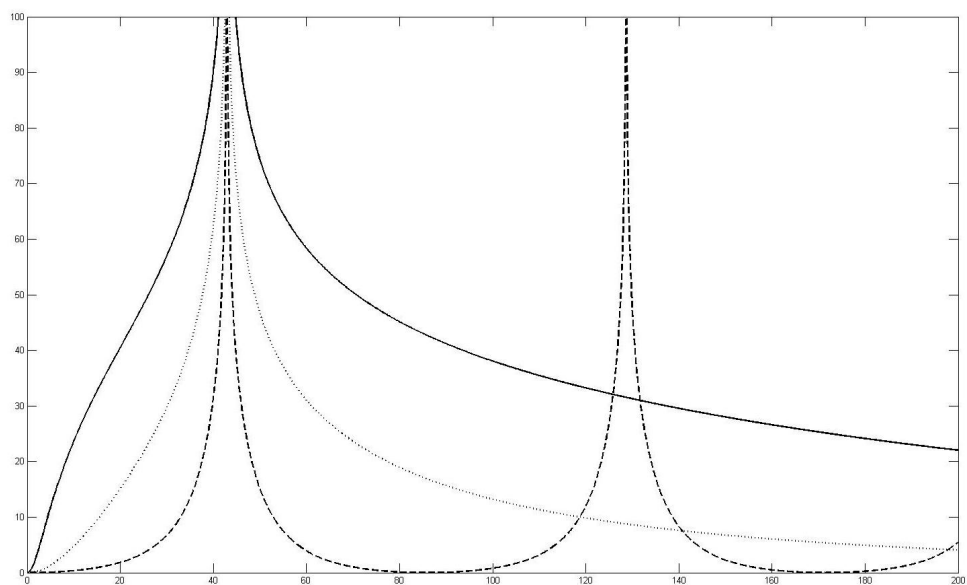


Figure 10.11: Comparaison du TL d'un conduit ($\ell = 1$) muni de trois résonateurs différents placés au milieu du conduit. Traits continus : résonateur de Helmholtz ($a=0.01$, $h=0.05$, $V=0.01$, section 10.2.5). Traits pointillés : résonateur de Helmholtz ($a=0.02$, $h=0.20$, $V=0.01$). Traits interrompus : résonateur quart d'onde. La fréquence de résonance est de 42.89 Hz pour les trois cas.

10.4 Insertion Loss (IL)

Nous avons vu que tout silencieux⁴ est intégralement décrit par une matrice de transfert liant les variables acoustiques (p et v ou p^+ et p^-) dans les sections d'entrée (e) et de sortie (s). Nous allons maintenant insérer le silencieux dans son environnement.

10.4.1 Impédance de source

En amont nous plaçons une source générale au droit de laquelle pression et vitesse sont liées par la relation :

$$\frac{v_e}{\bar{v}} - \frac{p_e}{\bar{p}} = \bar{q} \quad (10.62)$$

La grandeur $S = \frac{\bar{p}}{\bar{v}}$ est appelée impédance de la source ; lorsque $\bar{q} = 0$, $\frac{p_e}{v_e} = S$. Les cas limites $\bar{p} = \infty$ et $\bar{v} = \infty$ correspondent respectivement à une source de vitesse ($v_e = \bar{q}\bar{v}$) et à une source de pression ($p_e = -\bar{q}\bar{p}$).

10.4.2 Adaptation d'impédance

Supposons que l'impédance du système acoustique à l'aval de la source soit Z ; on trouve alors aisément que :

$$p_e = \bar{p}\bar{q} \frac{Z}{Z - S} \quad (10.63)$$

et

$$v_e = \bar{p}\bar{q} \frac{1}{Z - S} \quad (10.64)$$

4. Par *silencieux* nous entendons ici un ensemble de tubes et de cavités ne possédant qu'une section d'entrée et une section de sortie telles que la première fréquence de coupure de chacune de ces sections soit supérieure à la fréquence maximale de fonctionnement.

La puissance injectée par la source et transmise au système extérieur *via* l'impédance Z est donc égale à :

$$I_{e1} = I_{s1} = \frac{\Re(Z)}{2} \left| \frac{\bar{p}\bar{q}}{Z - S} \right|^2 \quad (10.65)$$

Cette intensité est maximale lorsque $Z = S$; on parle d'*adaptation d'impédance*.

10.4.3 Source généralisée débitant dans un silencieux

Connectons maintenant la source à un silencieux de matrice de transfert (A, B, C, D) débouchant sur un élément (milieu extérieur, cavité, terminaison anéchoïque) caractérisé par son impédance Z . Nous disposons de quatre équations liant les quatre variables acoustiques :

$$p_e = Ap_s + Bv_s \quad (10.66)$$

$$v_e = Cp_s + Dv_s \quad (10.67)$$

$$\frac{v_e}{\bar{v}} - \frac{p_e}{\bar{p}} = \bar{q} \quad (10.68)$$

$$p_s = Zv_s \quad (10.69)$$

D'où on tire :

$$v_s = \frac{\bar{p}\bar{v}\bar{q}}{\bar{p}(CZ + D) - \bar{v}(AZ + B)} \quad (10.70)$$

$$p_e = (AZ + B) \cdot v_s \quad (10.71)$$

$$v_e = (CZ + D) \cdot v_s \quad (10.72)$$

$$p_s = Z \cdot v_s \quad (10.73)$$

L'intensité sortant du système est donnée par :

$$I_{s2} = \frac{1}{2} \Re(p_s v_s^*) = \frac{\Re(Z)}{2} |v_s|^2 \quad (10.74)$$

10.4.4 *Insertion Loss* (IL)

L'*Insertion Loss* est défini comme le rapport des intensités sortant du système en présence et en l'absence du silencieux, c'est-à-dire les intensités exprimées dans les équations 10.65 et 10.74 :

$$IL = 10 \log \frac{I_{s1}}{I_{s2}} = 10 \log \left| \frac{S(CZ + D) - (AZ + B)}{(Z - S)} \right|^2 \quad (10.75)$$

10.4.5 Comparaison de l'*Insertion Loss* et du *Transmission Loss*

Le TL est une mesure *conventionnelle* de l'efficacité d'un composant ; c'est une propriété intrinsèque de celui-ci, indépendante des composants placés en amont (source, autres silencieux) et en aval (autres silencieux, rayonnement à la bouche de la ligne d'échappement) du composant considéré. L'IL, au contraire, caractérise l'efficacité du composant placé dans son environnement et est donc fonction de l'amont (S) et de l'aval (Z) du composant étudié. La figure 10.12 résume ces différences.

Notons qu'il existe plusieurs définitions alternatives de l'*Insertion Loss*. En fait, tout indicateur comparant la situation *avec* et *sans* un dispositif donné peut faire office d'IL. Prenons l'exemple d'une ligne d'échappement dans laquelle on souhaite insérer un silencieux supplémentaire. Les niveaux sonores en sortie de ligne avant et après insertion du silencieux supplémentaire sont, respectivement, de L_1 et L_2 dB. Une mesure de l'IL de ce silencieux pourrait être la différence $L_2 - L_1$.

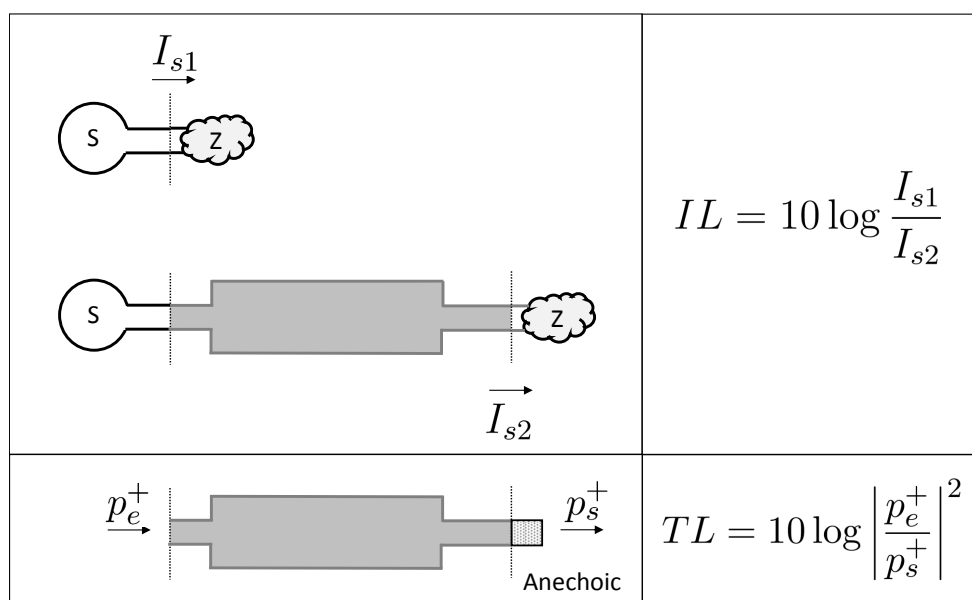


Figure 10.12: Comparaison entre *Transmission Loss* (TL) et *Insertion Loss* (IL). Le TL est une mesure conventionnelle de l'efficacité d'un composant, sans prise en compte de son environnement. L'IL mesure l'efficacité du composant placé dans un environnement (amont et aval) déterminé.

Fréquences de coupure de conduits

10.5 circulaires**10.5.1** Équation de Bessel

L'équation de Helmholtz s'écrit de la manière suivante en coordonnées sphériques :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 p = 0 \quad (10.76)$$

Cherchons une solution de la forme :

$$p(r, \phi, z; n, k_z) = J_n(r; k_z) \cdot e^{in\phi} \cdot e^{ik_z z} \quad (10.77)$$

On voit que J doit obéir à l'équation :

$$\frac{\partial^2 J_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_n}{\partial r} + \left((k^2 - k_z^2) - \frac{n^2}{r^2} \right) \cdot J_n = 0 \quad (10.78)$$

Posons $\xi = \kappa r$ avec $\kappa = \sqrt{k^2 - k_z^2}$; l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial^2 J_n(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial J_n(\xi)}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{n^2}{\xi^2} \right) J_n(\xi) = 0 \quad (10.79)$$

qui est une équation de Bessel⁵ d'ordre n .

5. **Friedrich Wilhelm Bessel** est un astronome et mathématicien allemand, né en 1784 à Minden et mort en 1846 à Königsberg. Il est principalement connu pour avoir effectué, en 1838, les premières mesures précises de la distance d'une étoile. Il introduit son équation différentielle et les fonctions associées dans le cadre de la résolution de problèmes de mécanique céleste.

10.5.2 Fonctions de Bessel

La solution de cette équation est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n . Admettons sans démonstration⁶ que cette fonction est définie par le développement⁷ :

$$J_n(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+n+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+n} \quad (10.81)$$

La fonction de Bessel de première espèce peut également être définie de manière intégrale :

$$J_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\tau - \xi \sin \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\tau - \xi \sin \tau)} d\tau \quad (10.82)$$

La figure 10.13 représente les fonctions de Bessel de première espèce d'ordres 0, 1, 2 et 3. Les fonctions de Bessel sont liées par une importante relation de récurrence :

$$J_n(\xi) = \frac{\xi}{2n} [J_{n-1}(\xi) + J_{n+1}(\xi)] \quad (10.83)$$

et leur dérivée s'obtient de la manière suivante :

– pour $n \neq 0$:

$$J'_n(\xi) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(\xi) - J_{n+1}(\xi)] \quad (10.84)$$

– pour $n = 0$:

$$J'_0(\xi) = -J_1(\xi) \quad (10.85)$$

6. Voir par exemple **Frank Bowman**, *Introduction to Bessel function*, Dover Publication Inc (1958). Ce livre est disponible en version électronique.

7. Cette définition et les propriétés qui suivent supposent que n est entier (positif, négatif ou nul). La définition des fonctions de Bessel peut être étendue au cas où n est un réel ; dans ce cas la définition devient :

$$J_\alpha(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+\alpha} \quad (10.80)$$

10.5.3 Fréquence de coupure

Considérons un conduit circulaire de rayon R dont les parois sont supposées parfaitement rigides. Le champ acoustique suivant

$$p(r, \phi, z; n, \kappa) = J_n(\kappa r) \cdot e^{in\phi} \cdot e^{ik_z z} \quad (10.86)$$

est solution de l'équation de Helmholtz mais il ne satisfait aux conditions aux limites que si :

$$J'_n(\kappa R) = 0 \quad (10.87)$$

Appelons ξ_{nm} le m -ième zéro de la fonction $J'_n(\xi)$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$). Ces zéros sont donnés à la figure 10.14. Les conditions aux limites ne sont donc satisfaites que si :

$$\kappa R = \xi_{nm} \rightarrow k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\xi_{nm}}{R}\right)^2} \quad (10.88)$$

De deux choses l'une :

1. soit k_z est réel et la distribution de pression $J_n(\xi_{nm} \frac{r}{R}) e^{in\phi}$ dans une section droite du conduit se propage le long de l'axe z avec le nombre d'onde k_z ; ceci se produit si :

$$f \geq \frac{c \cdot \xi_{nm}}{2\pi R} \doteq f_{nm} \quad (10.89)$$

2. soit f est inférieure à la fréquence de coupure f_{nm} définie ci-dessus et k_z est imaginaire : le mode ne se propage pas, il est évanescent.

On constate que :

- pour $n = 0$, $\xi_{00} = 0$ et le mode correspondant est plan :

$$J_0\left(\xi_{00} \frac{r}{R}\right) = J_0(0) = 1 \quad (10.90)$$

la fréquence de coupure f_{00} est nulle et le mode se propage quelle que soit la fréquence ;

- pour n pair, $\xi_{n0} = 0$ mais ce cas est sans intérêt puisque le mode correspondant est d'amplitude nulle (si $n > 0$, $J_n(\xi_{n0} \frac{r}{R}) = J_n(0) = 0$) ;

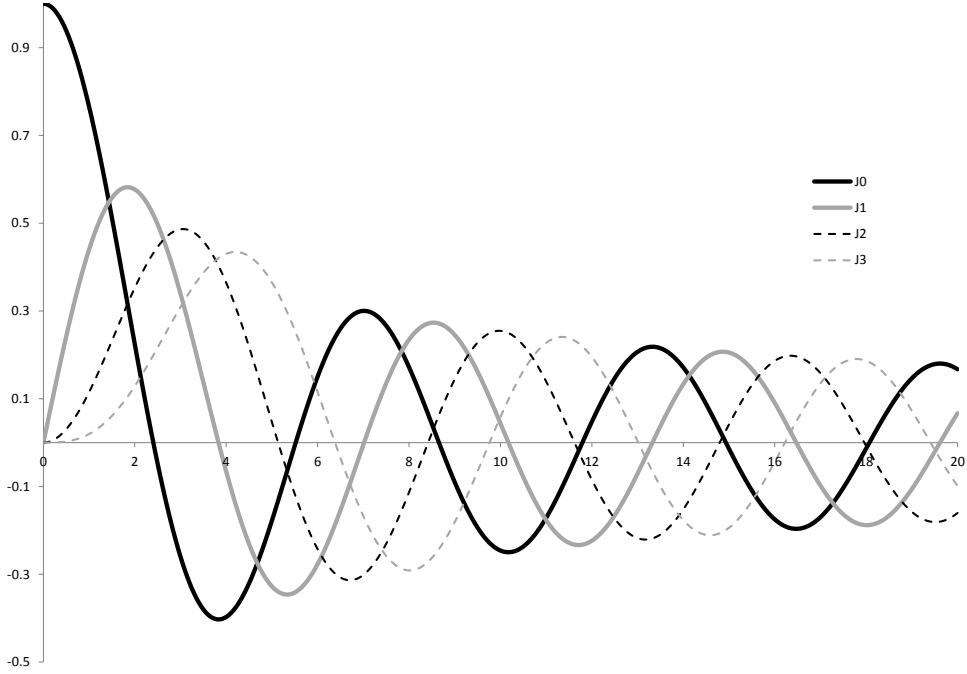


Figure 10.13: Graphes des fonctions de Bessel de première espèce $J_0(\xi)$, $J_1(\xi)$, $J_2(\xi)$ et $J_3(\xi)$.

- la première fréquence de coupure, en dessous de laquelle seuls les modes plans se propagent, est donnée, dans l'air, à température standard, par

$$f_{11} = \frac{c \cdot \xi_{11}}{2\pi R} = \frac{340 \times 1.8412}{2\pi R} \simeq \frac{100}{R} \quad (10.91)$$

- à section S égale, un conduit de section carrée ($S = a^2$) a une fréquence de coupure légèrement plus petite que le conduit de section circulaire ($S = \pi R^2$) correspondant :

$$f_{10}^{\square} = \frac{c}{2a} = \frac{c}{2\sqrt{S}} < f_{11}^{\circ} = \frac{c}{\frac{2\sqrt{\pi}}{1.8412}\sqrt{S}} = \frac{c}{1.925\sqrt{S}} \quad (10.92)$$

m	ξ_{0m}	ξ_{1m}	ξ_{2m}	ξ_{3m}	ξ_{4m}	ξ_{5m}
0	0.0000	-	0.0000	-	0.0000	-
1	3.8317	1.8412	3.0542	4.2012	5.3175	6.4156
2	7.0156	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824	10.5199
3	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872
4	13.3237	11.7060	13.1704	14.5858	15.9641	17.3128
5	16.4706	14.8636	16.3475	17.7887	19.1960	20.5755

Figure 10.14: Premiers zéros des fonctions $J'_0(\xi)$, $J'_1(\xi)$, $J'_2(\xi)$, $J'_3(\xi)$, $J'_4(\xi)$ et $J'_5(\xi)$.

10.6 Rôle des modes évanescents

Si les modes évanescents ne se propagent pas, ils jouent néanmoins un rôle important à la transition entre deux composants.

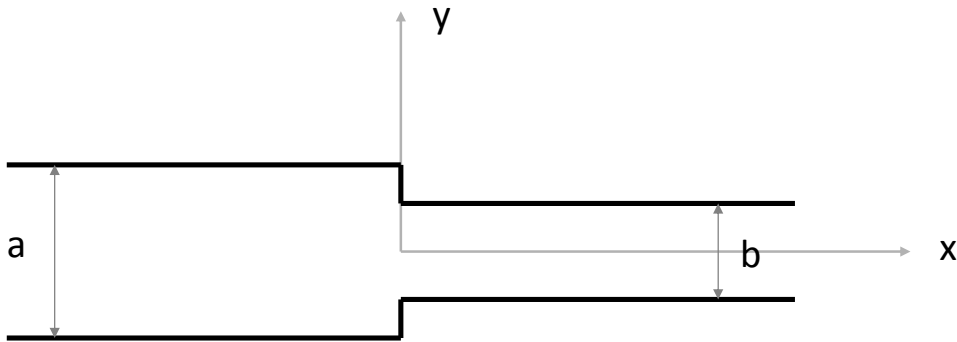


Figure 10.15: Changement de section.

Considérons par exemple Figure 10.15 deux tubes semi-infinis alignés sur l'axe y et se rejoignant en $x = 0$. Les tubes ont des hauteurs a et b ($a > b$). On suppose encore :

- que la dimension hors plan est très petite (problème 2D) ;
- que $k < \frac{\pi}{2a} < \frac{\pi}{2b}$: on est donc sous la première fréquence de coupure et seul le mode plan est propagatif tant à gauche qu'à droite.

Le champ acoustique dans le premier conduit peut s'écrire comme une combinaison linéaire des modes propres d'une section droite⁸ :

$$p_a(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \cos \left[\frac{n\pi}{2a} (y + a) \right] \quad (10.93)$$

Si seul le mode plan est propagatif, l'amplitude des modes évanescents n'est en effet pas pour autant nécessairement nulle. En injectant cette décomposition dans l'équation de Helmholtz on obtient une équation pour l'amplitude A_n de chaque mode n ($n = 0, \dots$) :

$$\frac{d^2 A_n(x)}{dx^2} - \left(\left(\frac{n\pi}{2a} \right)^2 - k^2 \right) A_n(x) = 0 \quad (10.94)$$

La solution générale de cette équation peut s'écrire :

$$A_n(x) = A_n^+ e^{-\alpha_n x} + A_n^- e^{\alpha_n x} \quad (10.95)$$

avec

$$\alpha_n = +\sqrt{\left(\frac{n\pi}{2a} \right)^2 - k^2} \quad (10.96)$$

α_0 est imaginaire pur alors que, pour $n > 0$, α_n est réel. Considérons que les termes A_n^+ sont nuls pour $n > 0$, c'est-à-dire que la source, située à l'amont gauche du changement de section, est constituée d'une simple onde plane. On trouve alors finalement :

$$p_a(x, y) = A_0^+ e^{-ikx} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^- e^{\alpha_n x} \cos \left[\frac{n\pi}{2a} (y + a) \right] \quad (10.97)$$

dont on tire la vitesse horizontale u_a :

$$\begin{aligned} u_a(x, y) &= \frac{i}{\rho\omega} \frac{dp_a}{dx} \\ &= \frac{A_0^+}{\rho c} e^{-ikx} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\alpha_n A_n^-}{\rho\omega} e^{\alpha_n x} \cos \left[\frac{n\pi}{2a} (y + a) \right] \end{aligned} \quad (10.98)$$

8. On inclut les modes symétriques et antisymétriques bien que ces derniers, dans le contexte choisi, soient d'amplitudes nulles.

Dans le tube de droite on trouvera, de manière similaire, mais en supposant que l'extrémité droite est parfaitement anéchoïque ($B_n^- = 0 \forall n$) :

$$p_b(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^+ e^{-\beta_n x} \cos \left[\frac{n\pi}{2b} (y + b) \right] \quad (10.99)$$

$$u_b(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\beta_n B_n^+}{\rho\omega} e^{-\beta_n x} \cos \left[\frac{n\pi}{2b} (y + b) \right] \quad (10.100)$$

avec :

$$\beta_n = + \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 - k^2} \quad (10.101)$$

Dans le plan $x = 0$ on doit avoir :

$$\begin{aligned} u_a(0, y) &= 0 & \text{pour } |y| > b \\ &= u_b(0, y) & \text{pour } |y| \leq b \end{aligned} \quad (10.102)$$

et

$$p_a(0, y) = p_b(0, y) \text{ pour } |y| \leq b \quad (10.103)$$

On a donc les égalités suivantes :

$$A_0^+ + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^- \cos \left[\frac{n\pi}{2a} (y + a) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^+ \cos \left[\frac{n\pi}{2b} (y + b) \right] \quad (10.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{A_0^+}{\rho c} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\alpha_n A_n^-}{\rho\omega} \cos \left[\frac{n\pi}{2a} (y + a) \right] = \\ -W(y, b) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\beta_n B_n^+}{\rho\omega} \cos \left[\frac{n\pi}{2b} (y + b) \right] \end{aligned} \quad (10.105)$$

où $W(y, b)$ est une fenêtre rectangulaire de largeur $2b$:

$$\begin{aligned} W(y, b) &= 0 & \text{pour } |y| > b \\ &= 1 & \text{pour } |y| \leq b \end{aligned} \quad (10.106)$$

Multiplions les deux membres de l'équation de continuité des vitesses par $\cos \left[\frac{m\pi}{2a} (y + a) \right]$

et intégrons sur $[-a, a]$:

$$\begin{aligned} & \frac{A_0^+}{\rho c} \int_{-a}^a \cos \left[\frac{m\pi}{2a} (y+a) \right] dy + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\alpha_n A_n^-}{\rho\omega} \int_{-a}^a \cos \left[\frac{n\pi}{2a} (y+a) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{2a} (y+a) \right] dy = \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\beta_n B_n^+}{\rho\omega} \int_{-b}^b \cos \left[\frac{n\pi}{2b} (y+b) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{2a} (y+a) \right] dy \end{aligned} \quad (10.107)$$

Les deux premières intégrales se calculent comme suit :

$$\int_{-a}^a \cos \left[\frac{m\pi}{2a} (y+a) \right] dy = 2a\delta_{m0} \quad (10.108)$$

$$\int_{-a}^a \cos \left[\frac{n\pi}{2a} (y+a) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{2a} (y+a) \right] dy = \begin{cases} 2a & m = n = 0 \\ a\delta_{mn} & m \neq 0 \end{cases} \quad (10.109)$$

Pour calculer la troisième intégrale posons :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{n\pi}{2a} + \frac{m\pi}{2b} \\ k_2 &= \frac{n\pi}{2a} - \frac{m\pi}{2b} \end{aligned} \quad (10.110)$$

et utilisons les formules de Simpson pour scinder l'intégrale en deux composantes :

$$\begin{aligned} I_{mn} &= I_{mn}^{(1)} + I_{mn}^{(2)} \\ I_{mn}^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b \cos \left[k_1 y + \frac{(m+n)\pi}{2} \right] dy \\ I_{mn}^{(2)} &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b \cos \left[k_2 y + \frac{(m-n)\pi}{2} \right] dy \end{aligned} \quad (10.111)$$

Le premier terme vaut :

– si $k_1 = 0$:

$$I_{mn}^{(1)} = b \cos \frac{(m+n)\pi}{2} \quad (10.112)$$

– si $k_1 \neq 0$:

$$I_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2k_1} \left(\sin \left[k_1 b + \frac{(m+n)\pi}{2} \right] - \sin \left[-k_1 b + \frac{(m+n)\pi}{2} \right] \right) \quad (10.113)$$

et le deuxième :

– si $k_2 = 0$:

$$I_{mn}^{(2)} = b \cos \frac{(m+n)\pi}{2} \quad (10.114)$$

– si $k_2 \neq 0$:

$$I_{mn}^{(2)} = \frac{1}{2k_2} \left(\sin \left[k_2 b + \frac{(m-n)\pi}{2} \right] - \sin \left[-k_2 b + \frac{(m-n)\pi}{2} \right] \right) \quad (10.115)$$

L'équation de continuité des vitesses projetée sur le mode $m = 0$ s'écrit :

$$\frac{2ia\alpha_0}{\rho\omega} A_0^- + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\beta_n I_{0n}}{\rho\omega} B_n^+ = -\frac{2a}{\rho c} A_0^+ \quad (10.116)$$

et sur le mode $m \neq 0$

$$\frac{ia\alpha_m}{\rho\omega} A_m^- + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\beta_n I_{mn}}{\rho\omega} B_n^+ = 0 \quad (10.117)$$

Multiplions maintenant les deux membres de l'équation de continuité des pressions par $\cos \left[\frac{m\pi}{2b} (y+b) \right]$ et intégrons sur $[-b, b]$:

$$\begin{aligned} & A_0^+ \int_{-b}^b \cos \left[\frac{m\pi}{2b} (y+b) \right] dy + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} A_n^- \int_{-b}^b \cos \left[\frac{n\pi}{2a} (y+a) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{2b} (y+b) \right] dy = \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} B_n^+ \int_{-b}^b \cos \left[\frac{n\pi}{2b} (y+b) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{2b} (y+b) \right] dy \end{aligned} \quad (10.118)$$

Les trois intégrales se calculent aisément :

$$\int_{-b}^b \cos \left[\frac{m\pi}{2b} (y+b) \right] dy = 2b\delta_{m0} \quad (10.119)$$

$$\int_{-b}^b \cos \left[\frac{n\pi}{2a} (y+a) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{2b} (y+b) \right] dy = I_{nm} \quad (10.120)$$

$$\int_{-b}^b \cos \left[\frac{n\pi}{2b} (y+b) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{2b} (y+b) \right] dy = \begin{cases} 2b & m = n = 0 \\ b\delta_{mn} & m \neq 0 \end{cases} \quad (10.121)$$

L'équation de continuité des pressions projetée sur le mode $m = 0$ s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{n0} A_n^- + 2b B_0^+ = -2b A_0^+ \quad (10.122)$$

et sur le mode $m \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{nm} A_n^- + b B_m^+ = 0 \quad (10.123)$$

Si l'on retient N modes non plans, les équations 10.116, 10.117, 10.122 et 10.123 constituent un système de $2(N+1)$ équations à $2(N+1)$ inconnues (les A_n^- et B_n^+) dont la solution donne la pression et la vitesse dans les deux conduits. Cette solution est représentée aux figures 10.16 et 10.17. Même sous la première fréquence de coupure il faut considérer un très grand nombre de modes pour obtenir une solution précise car le profil de vitesse $u_a(0, y)$ est difficile à approximer par une série de Fourier qui diverge par ailleurs aux points de discontinuité (phénomène de Gibbs, figure 10.17, voir aussi la section 5.2.2). L'effet de ces modes d'ordre élevé est cependant limité à la ligne de transition elle-même car leurs coefficients α_n ou β_n sont si élevés que leurs contributions décroissent extrêmement rapidement dès qu'on s'éloigne de $x = 0$.

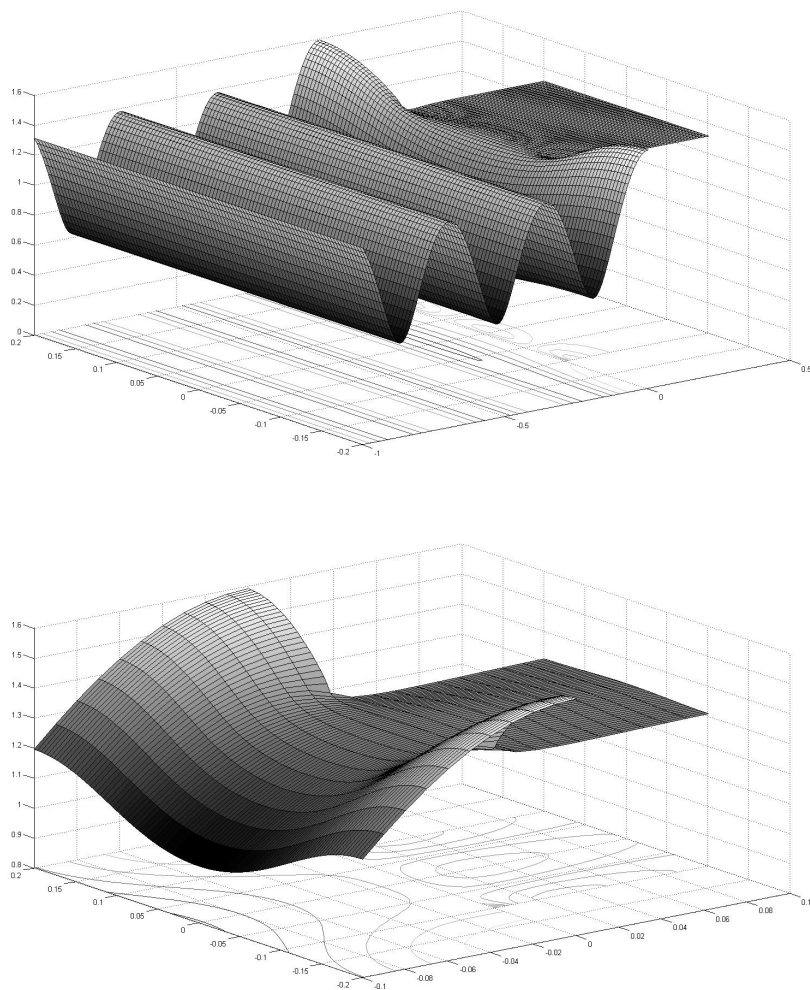


Figure 10.16: Rôle des modes évanescents dans la transition entre deux conduits de sections différentes : vue globale et zoom sur la transition. Module de la pression dans les deux conduits pour les paramètres suivants : $a = 0.1$, $b = 0.1$, $f = 400$, $N = 1000$, $A_0^+ = 1$. On observe une onde stationnaire dans le premier conduit liée à l'interaction entre l'onde incidente A_0^+ et les ondes réfléchies A_n^- . Dans le second conduit on a une onde purement propagative puisqu'on a supposé l'extrémité anéchoïque. Les modes évanescents n'interviennent que très localement.

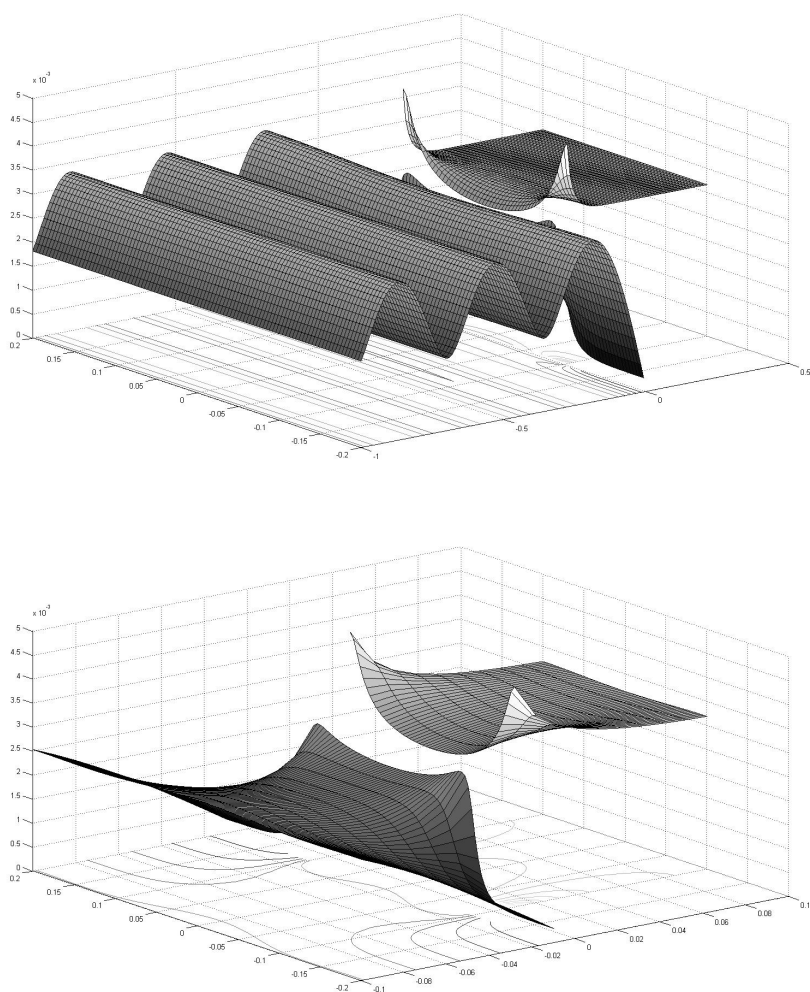


Figure 10.17: Rôle des modes évanescents dans la transition entre deux conduits de sections différentes : vue globale et zoom sur la transition. Module de la vitesse dans les deux conduits pour les mêmes paramètres qu'à la figure précédente. On observe que la condition de vitesse nulle est bien respectée mais que la discontinuité de vitesse en $y = -b$ et $y = b$ engendre un phénomène de Gibbs : la série de Fourier pour u_a n'est pas convergente en ces points.

10.7 Silencieux réactifs et dissipatifs

La théorie présentée dans ce chapitre s'applique aux silencieux et, notamment, aux composants d'une ligne d'échappement de véhicule automobile. Elle analyse toutefois le silencieux comme un filtre agissant sur la transmission du son entre l'entrée et la sortie : le but du silencieux est d'empêcher le plus possible la transmission d'intensité et donc de maximiser le TL. La part de l'énergie incidente qui n'est pas transmise est réfléchie et retourne vers la source. Un tel silencieux est purement réactif ; il n'est le siège d'aucune dissipation d'énergie.

En pratique, les silencieux associent ce comportement réactif à un fonctionnement dissipatif. Certaines cavités du silencieux seront remplies d'un matériau poreux au sein duquel le champ acoustique perdra une partie de son énergie. Ces cavités seront souvent connectées entre elles par des parois perforées qui seront, elles aussi, sources de dissipation.

11

RAYONNEMENT

Contents

11.1 Dipôles et quadripôles	252
11.2 Analyse multipolaire	261
11.3 Équation intégrale de Helmholtz	271
11.4 Puissance rayonnée	283
11.5 Impédance de rayonnement	284

Dans ce chapitre, nous étudierons le champ acoustique engendré par une structure vibrante placée en champ libre, c'est-à-dire dans un domaine non borné, en l'absence de tout obstacle. Le phénomène associé s'appelle *rayonnement acoustique*. Deux méthodes d'analyse du champ acoustique rayonné seront présentées : l'analyse multipolaire et l'équation intégrale de Helmholtz.

L'**analyse multipolaire** nous enseigne que toute source acoustique peut être représentée par un nuage de monopôles et que celui-ci peut être réduit à une série de multipôles : un monopôle, trois dipôles, six quadrapôles, dix octupôles, etc. Cette analyse permet de montrer que la directivité du champ sonore, c'est-à-dire la distribution spatiale du champ acoustique sur une sphère entourant l'objet qui rayonne, résulte, quelle que soit la source, de la combinaison linéaire de directivités élémentaires canoniques. Elle permet également de prédire la manière dont la directivité évolue avec la fréquence et avec la distance. L'analyse multipolaire est donc un cadre général d'analyse du champ acoustique rayonné par une structure. Cette représentation est, par ailleurs, à la base d'une extension de la méthode des éléments finis aux domaines non bornés : la méthode des éléments infinis.

La reformulation de l'équation aux dérivées partielles de Helmholtz sous forme d'une **équation intégrale** est également intéressante. Elle permet de calculer le champ acoustique en tous points du domaine à partir de la connaissance de la pression et de la vitesse normale sur la surface rayonnante. Cette équation intégrale sert de base à une importante méthode numérique (méthode des éléments de frontières) mais elle permet également d'analyser qualitativement le rayonnement acoustique des structures. Dans ce chapitre, nous l'appliquerons à l'étude du champ acoustique engendré par les vibrations d'une plaque.

11.1 Dipôles et quadrapôles

Commençons par présenter la notion de dipôle et de quadrapôle.

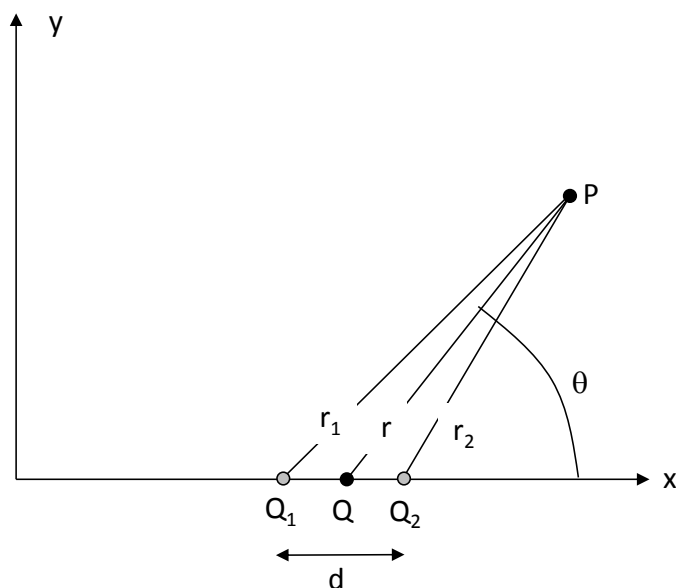


Figure 11.1: Schéma d'un dipôle.

11.1.1 Dipôles

Cette chose plus compliquée et confondante que l'harmonie des sphères : un couple.

Julien Gracq (1910-2007) *in* Un beau ténébreux (1945).

Considérons Figure 11.1 deux sources d'amplitudes égales et opposées (A et $-A$) positionnées symétriquement par rapport à un point Q de coordonnées $(x, 0, 0)$. Le champ acoustique induit par ces deux sources au point P de coordonnées (X, Y, Z) est :

$$p = A \left(\frac{e^{-ikr_2}}{r_2} - \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \right) \quad (11.1)$$

Si la distance entre les sources est petite, on peut exprimer la pression acoustique totale en fonction de la distance r entre P et Q et de la distance d entre

les sources :

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} &= \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + o(d^2) \\
 &= \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{d}{2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + o(d^2) \\
 &= \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{d}{2} \cos \theta \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{-1 - ikr}{r} \right) + o(d^2) \quad (11.2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} = \frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{d}{2} \cos \theta \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{-1 - ikr}{r} \right) + o(d^2) \quad (11.3)$$

$$p = Ad \cos \theta \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{1 + ikr}{r} \right) + o(d^2) \quad (11.4)$$

Soit, si on fait tendre d vers 0 en conservant le *moment dipolaire* $D = Ad$ constant :

$$\begin{aligned}
 p &= D \cos \theta \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{1 + ikr}{r} \right) \\
 &= ikD \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \cos \theta \cdot \left(1 + \frac{1}{ikr} \right) \quad (11.5)
 \end{aligned}$$

Le champ acoustique du dipôle apparaît comme le produit de quatre termes :

1. une amplitude ikD , elle-même le produit de deux termes : le moment dipolaire D et un facteur ik caractéristique d'un dipôle ;
2. un champ monopolaire unitaire $\frac{e^{-ikr}}{r}$;
3. un terme de *directivité* $\cos \theta$ Figure 11.3 ;
4. un polynôme harmonique (ici du premier ordre) en ikr dont on observe qu'il tend vers 1 quand kr tend vers l'infini.

Une des caractéristiques principales du dipôle est l'absence de bruit dans son plan de symétrie ($\theta = \frac{\pi}{2}$). La directivité du champ dipolaire est donc marquée par deux globes en opposition de phase ($\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$) alignés sur l'axe du dipôle Figure 11.3. La vitesse radiale induite par le dipôle s'obtient simplement :

$$v_r = \frac{i}{\rho \omega} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{ikD}{\rho c} \cos \theta \frac{e^{-ikr}}{r} \left(1 + \frac{2}{ikr} + \frac{2}{(ikr)^2} \right) \quad (11.6)$$

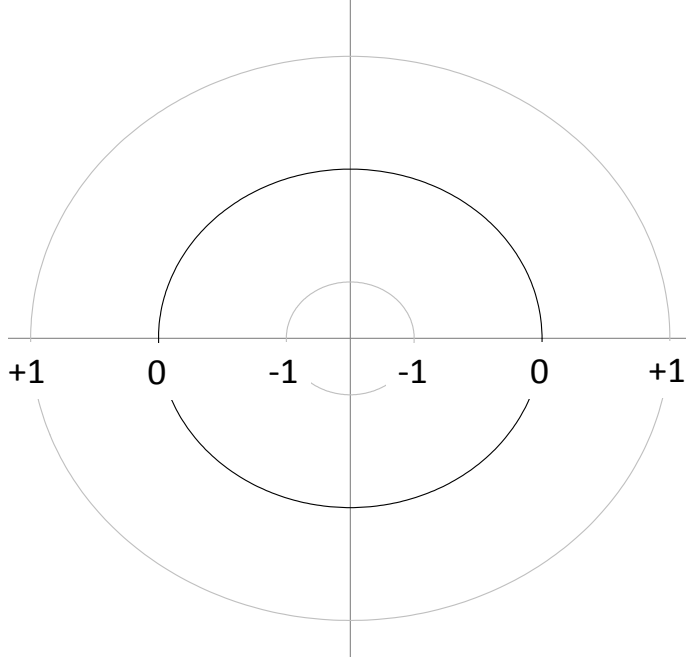


Figure 11.2: Conventions utilisées dans ce chapitre pour les diagrammes de directivité : le cercle central correspond à $r = -1$, le cercle extérieur à $r = +1$ et le cercle intermédiaire à $r = 0$.

de même que la vitesse tangentielle :

$$v_\theta = \frac{i}{\rho\omega} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{ikD}{\rho c} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{1}{ikr} + \frac{1}{(ikr)^2} \right) \quad (11.7)$$

L'intensité radiale s'obtient dès lors de la manière suivante :

$$I_r = \frac{1}{2} \Re(p_r v_r^*) = \frac{(kD \cos \theta)^2}{2\rho c r^2} \quad (11.8)$$

et la puissance rayonnée au travers d'une sphère de rayon r centrée sur Q vaut :

$$W_r = \frac{(kD)^2}{2\rho c r^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \int_0^\pi r^2 \sin \phi d\phi d\theta = \frac{\pi (kD)^2}{\rho c} \quad (11.9)$$

Elle est, bien entendu, indépendante de r .

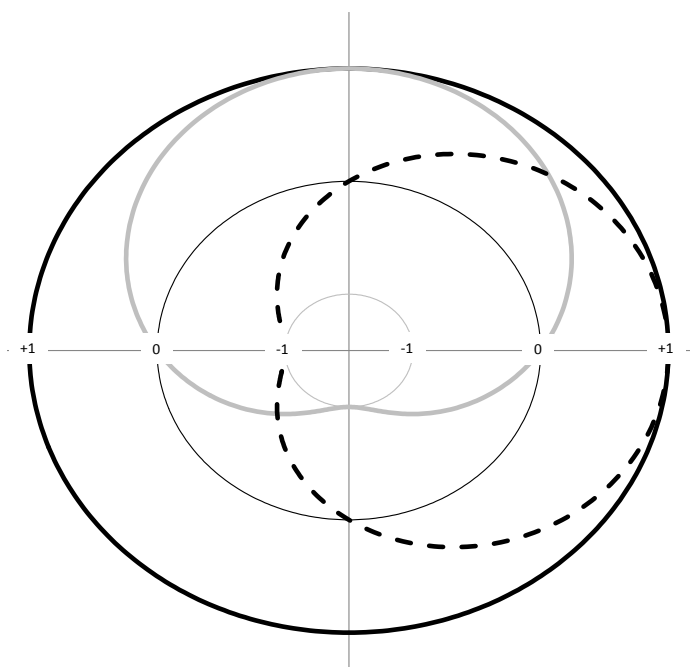


Figure 11.3: Directivité d'un monopôle (trait noir plein), d'un dipôle aligné sur l'axe x (trait noir interrompu) et d'un dipôle aligné sur l'axe y (trait grisé plein). Les conventions sont celles de la figure 11.2.

11.1.2 Quadrupôle aligné

Considérons à nouveau la figure 11.1 mais plaçons en Q_1 et Q_2 deux sources d'amplitude A identiques et en Q une source d'amplitude $-2A$. Le champ total généré au point P par ces trois sources est donné par :

$$p = A \left(\frac{e^{-ikr_2}}{r_2} - 2 \frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \right) \quad (11.10)$$

or, on peut écrire :

$$\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} = \frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + o(d^3) \quad (11.11)$$

$$\frac{e^{-ikr_2}}{r_2} = \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + o(d^3) \quad (11.12)$$

Si on fait tendre d vers 0 en conservant le *moment quadrupolaire* $Q = \frac{Ad^2}{2}$ constant, on trouve :

$$\begin{aligned} p &= Q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\ &= (ik)^2 Q \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \cos^2 \theta \cdot \left(1 + \frac{2}{ikr} + \frac{2}{(ikr)^2} \right) \end{aligned} \quad (11.13)$$

Ce quadrupôle présente une symétrie par rapport au plan $x = x_Q$ (et non une antisymétrie comme pour le dipôle). Le champ engendré par le quadrupôle est également nul sur ce plan Figure 11.5. Le champ acoustique du dipôle apparaît à nouveau comme le produit de quatre termes :

1. une amplitude $(ik)^2 Q$, elle-même le produit de deux termes : le moment quadrupolaire Q et un facteur $(ik)^2$ caractéristique d'un quadrupôle ;
2. un champ monopolaire unitaire $\frac{e^{-ikr}}{r}$;
3. un terme de *directivité* $\cos^2 \theta$ Figure 11.5 ;
4. un polynôme harmonique (ici du second ordre) en ikr dont on observe qu'il tend vers 1 quand kr tend vers l'infini.

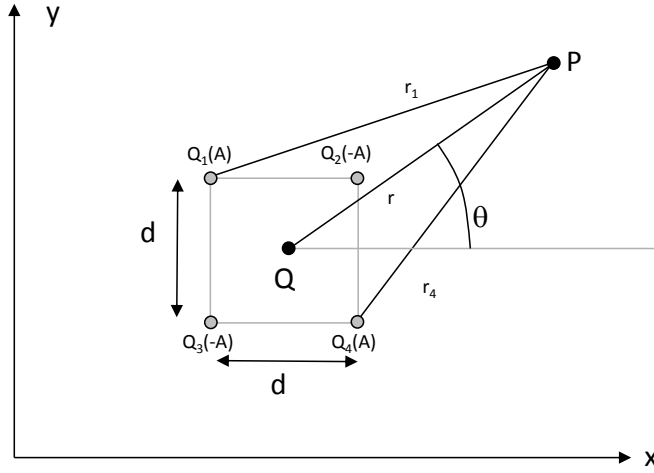


Figure 11.4: Schéma d'un quadrupôle.

11.1.3 Quadrupôle croisé

Considérons maintenant la configuration de quatre sources présentée à la figure 11.4. Les sources 1 et 4 ont une amplitude A , les deux autres une amplitude $-A$. La pression totale en P vaut :

$$p = A \left(-\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} + \frac{e^{-ikr_3}}{r_3} - \frac{e^{-ikr_4}}{r_4} \right) \quad (11.14)$$

or :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} &= \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\ &- \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + o(d^3) \end{aligned} \quad (11.15)$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-ikr_2}}{r_2} &= \frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\
&+ \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + o(d^3)
\end{aligned} \quad (11.16)$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-ikr_3}}{r_3} &= \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\
&+ \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + o(d^3)
\end{aligned} \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-ikr_4}}{r_4} &= \frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{d}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\
&- \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) + o(d^3)
\end{aligned} \quad (11.18)$$

Dont on tire, après passage à la limite ($Q = \frac{Ad^2}{2}$) :

$$\begin{aligned}
p &= Q \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\
&= (ik)^2 Q \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \sin \theta \cos \theta \cdot \left(1 + \frac{2}{ikr} + \frac{2}{(ikr)^2} \right)
\end{aligned} \quad (11.19)$$

Ce quadrupôle présente une antisymétrie par rapport aux plans $x = x_Q$ et $y = y_Q$. Le champ engendré par ce quadrupôle est nul sur ces deux plans Figure 11.5.

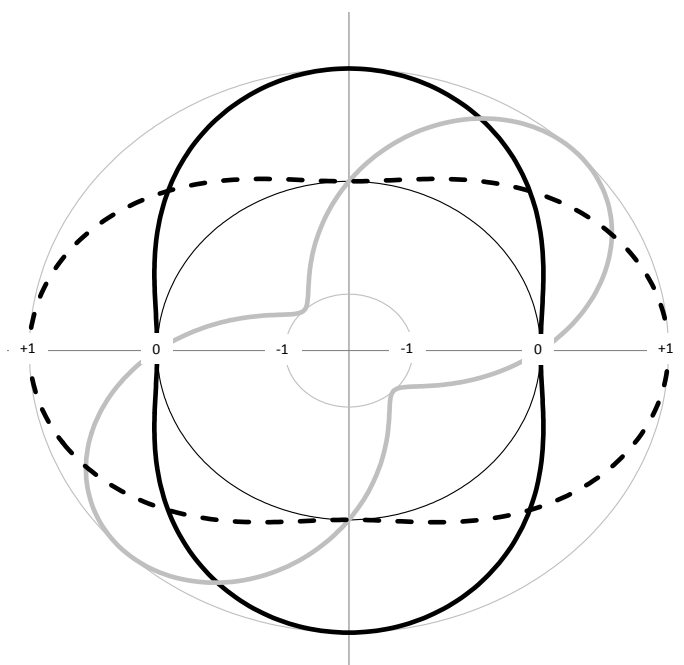


Figure 11.5: Diagrammes de directivités d'un quadrupôle aligné sur l'axe y (trait noir plein), sur l'axe x (trait noir interrompu) et d'un quadrupôle croisé (trait grisé plein).

11.2 Analyse multipolaire

La perfection s'obtient au plus près grâce à de nombreux calculs.

Propos attribués à Polyclète de Sycione (Ve siècle ACN)

par Philon de Byzance *dit* Philon le Mécanicien (IIIe siècle ACN),

cité par Jean-François Mattéi *in* Pythagore et les pythagoriciens (2013).

Considérons n sources ponctuelles d'amplitude $A_i (i = 1, n)$ localisées aux points P_i de coordonnées $x_j^{(i)} (j = 1, 3)$; ensemble elles génèrent au point P de coordonnées X_j une pression Figure 11.6 :

$$p = \sum_{i=1,n} A_i \frac{e^{-ikr_i}}{r_i} \quad (11.20)$$

où r_i est la distance entre les points P et P_i . Choisissons un point Q de coordonnées x_j et posons¹ :

$$G = \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (11.21)$$

$$r = \sqrt{(x_j - X_j)(x_j - X_j)} \quad (11.22)$$

Pour chaque source, le terme $\frac{e^{-ikr_i}}{r_i}$ peut être développé en séries de Taylor autour du point Q :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ikr_i}}{r_i} &= G + \frac{x_j^{(i)} - x_j}{1!} \partial_j G + \frac{(x_j^{(i)} - x_j)(x_k^{(i)} - x_k)}{2!} \partial_{jk} G \\ &+ \frac{(x_j^{(i)} - x_j)(x_k^{(i)} - x_k)(x_l^{(i)} - x_l)}{3!} \partial_{jkl} G + \dots \end{aligned} \quad (11.23)$$

1. Nous utilisons dans cette section la convention de sommation implicite sur les indices répétés. Voir un rappel de cette notion à la section 3.2.

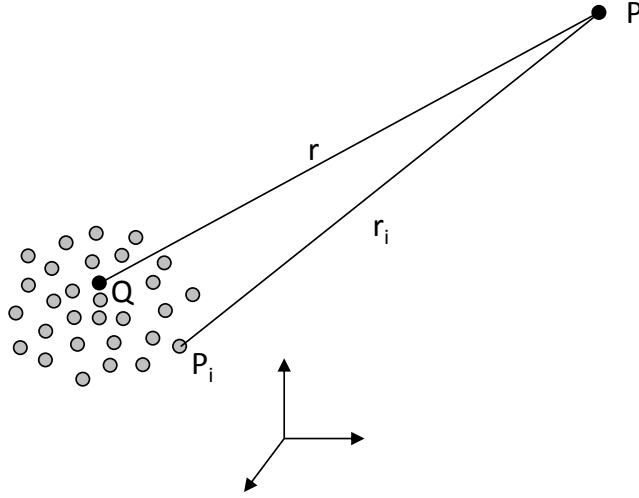


Figure 11.6: Notations utilisées dans l'analyse multipolaire.

La pression p peut donc s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned}
 p &= \underbrace{\left(\sum_i A_i \right)}_M \cdot G + \underbrace{\left(\sum_i A_i \frac{x_j^{(i)} - x_j}{1!} \right)}_{D_j} \cdot \partial_j G \\
 &+ \underbrace{\left(\sum_i A_i \frac{(x_j^{(i)} - x_j)(x_k^{(i)} - x_k)}{2!} \right)}_{Q_{jk}} \partial_{jk} G \\
 &+ \underbrace{\left(\sum_i A_i \frac{(x_j^{(i)} - x_j)(x_k^{(i)} - x_k)(x_l^{(i)} - x_l)}{3!} \right)}_{O_{jkl}} \partial_{jkl} G \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{11.24}$$

On écrit ce développement de manière compacte de la manière suivante :

$$p = M \cdot G + D_j \cdot \partial_j G + Q_{jk} \cdot \partial_{jk} G + O_{jkl} \cdot \partial_{jkl} G + \dots \tag{11.25}$$

où M est la composante *monopolaire*, D_j les composantes *dipolaires*, Q_{jk} les composantes *quadrupolaires* et O_{jkl} les composantes *octupolaires*.

Dérivées partielles successives de G

Les dérivées partielles successives de G peuvent être explicitées de la manière suivante, en notant $G^{(n)} = \frac{\partial^n G}{\partial r^n}$:

$$\partial_j G = G^{(1)} \partial_j r \quad (11.26)$$

$$\partial_{jk} G = G^{(2)} \partial_j r \partial_k r + G^{(1)} \partial_{jk} r \quad (11.27)$$

$$\begin{aligned} \partial_{jkl} G &= G^{(3)} \partial_j r \cdot \partial_k r \cdot \partial_l r \\ &+ G^{(2)} (\partial_j r \cdot \partial_{kl} r + \partial_k r \cdot \partial_{jl} r + \partial_l r \partial_{jk} r) \\ &+ G^{(1)} \partial_{jkl} r \end{aligned} \quad (11.28)$$

Dérivées successives de G par rapport à r

Les dérivées successives de G par rapport à r s'expriment toutes sous la forme suivante :

$$G^{(n)} = (-ik)^n \cdot G \cdot f_n \quad (11.29)$$

où les fonctions f_n sont obtenues par la récurrence suivante :

$$f_1 = 1 + \frac{1}{ikr} \quad (11.30)$$

$$f_n = f_1 \cdot f_{n-1} - \frac{1}{ik} f'_{n-1} \quad (11.31)$$

De manière explicite on trouve, pour $n = 1$ à 3 :

$$G^{(1)} = (-ik) G \left(1 + \frac{1}{ikr} \right) \quad (11.32)$$

$$G^{(2)} = (-ik)^2 G \left(1 + \frac{2}{ikr} + \frac{2}{(ikr)^2} \right) \quad (11.33)$$

$$G^{(3)} = (-ik)^3 G \left(1 + \frac{3}{ikr} + \frac{6}{(ikr)^2} + \frac{6}{(ikr)^3} \right) \quad (11.34)$$

Dérivées partielles successives de r

Les dérivées partielles successives de r s'écrivent :

$$\partial_j r = \frac{x_j - X_j}{r} = \alpha_j \quad (11.35)$$

$$\partial_{jk} r = \frac{\delta_{jk} - \alpha_j \alpha_k}{r} \quad (11.36)$$

$$\begin{aligned} \partial_{jkl} r &= \frac{3\alpha_j \alpha_k \alpha_l - (\delta_{jk} \alpha_l + \delta_{jl} \alpha_k + \delta_{kl} \alpha_j)}{r^2} \\ &= \frac{3\alpha_j \alpha_k \alpha_l - A_{jkl}}{r^2} \end{aligned} \quad (11.37)$$

en posant

$$A_{jkl} = \delta_{jk} \alpha_l + \delta_{jl} \alpha_k + \delta_{kl} \alpha_j \quad (11.38)$$

Forme compacte pour l'expression du champ rayonné

On peut finalement représenter le champ total, de manière très compacte, sous la forme du produit de quatre facteurs :

$$p = \mathbf{a} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}^t \cdot G \quad (11.39)$$

Le vecteur \mathbf{a} contient les amplitudes des termes multipolaires multipliés par la puissance appropriée de $-ikr$:

$$\left(M \quad -ikD_j \quad (-ik)^2 Q_{jk} \quad (-ik)^3 O_{jkl} \quad \dots \right) \quad (11.40)$$

La matrice \mathbf{D} représente la directivité du champ :

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_j & \alpha_j & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_j \alpha_k & 3\alpha_j \alpha_k - \delta_{jk} & 3\alpha_j \alpha_k - \delta_{jk} & 0 & \dots \\ \alpha_j \alpha_k \alpha_l & 6\alpha_j \alpha_k \alpha_l - A_{jkl} & 15\alpha_j \alpha_k \alpha_l - 3A_{jkl} & 15\alpha_j \alpha_k \alpha_l - 3A_{jkl} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \quad (11.41)$$

Ses éléments sont des combinaisons linéaires de termes en $\alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r$ avec $p + q + r \leq o$ où o est l'ordre du multipôle ($o = 0$ pour un monopôle, $o = 1$ pour

un dipôle, $o = 2$ pour un quadripôle, etc.). En deux dimensions, les éléments de la matrice sont des combinaisons linéaires de termes en $\sin^p \theta \cos^q \theta$ Figure 11.7 soit, ce qui revient au même, de termes en $\sin p\theta \cos q\theta$ Figure 11.8. Le vecteur \mathbf{g} contient les puissances successives de $\frac{1}{ikr}$:

$$\left(1 \quad \frac{1}{ikr} \quad \frac{1}{(ikr)^2} \quad \frac{1}{(ikr)^3} \quad \dots \right) \quad (11.42)$$

Ce résultat appelle de nombreux commentaires :

1. Le champ rayonné par un ensemble de sources (vecteur \mathbf{a} donné) peut s'analyser en observant sa décroissance radiale dans une direction donnée (matrice \mathbf{D} donnée) ou en s'intéressant à sa distribution spatiale sur une sphère de rayon donné (vecteur \mathbf{g} fixé).
2. Dans une direction donnée (α_j fixés), le champ présente différentes composantes qui décroissent respectivement en $\frac{1}{(ikr)}$, $\frac{1}{(ikr)^2}$, $\frac{1}{(ikr)^3}$ etc.
3. Le terme pertinent pour évaluer la rapidité de la décroissance n'est pas la distance r mais la distance a-dimensionnelle $kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde. kr est appelé *nombre de Helmholtz*.
4. Le premier terme domine assez rapidement tous les autres qui décroissent plus rapidement (6 dB par doublement de kr pour le terme d'ordre 1, 12 dB pour celui d'ordre 2, 18 dB pour celui d'ordre 3 etc.).
5. On définit le *champ proche* d'une source complexe comme la zone dans laquelle les différents termes sont d'égale importance. Dans le champ *lointain* le terme en $\frac{1}{r}$ domine. La frontière entre champs proche et lointain est traditionnellement fixée à cinq longueurs d'onde ($kr \simeq 30$).
6. À une distance donnée, la directivité du champ est la combinaison linéaire (à coefficients complexes) des composantes de la matrice \mathbf{D} .
7. À grande distance les termes de la première colonne ($\alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r$) dominent : c'est la directivité à l'infini.
8. Pour une distribution de sources caractérisée par des moments multipolaires donnés, l'importance relative du terme d'ordre n augmente avec k^n . On doit donc s'attendre à ce qu'une source soit omnidirectionnelle à basse fréquence (le terme monopolaire M domine les autres) alors qu'à plus haute fréquence la directivité deviendra de plus en plus complexe (tous les termes interviennent). Cette propriété est bien mise en évidence par le champ acoustique généré par une onde plane émise dans un tube débouchant dans un demi-espace Figure 11.9.

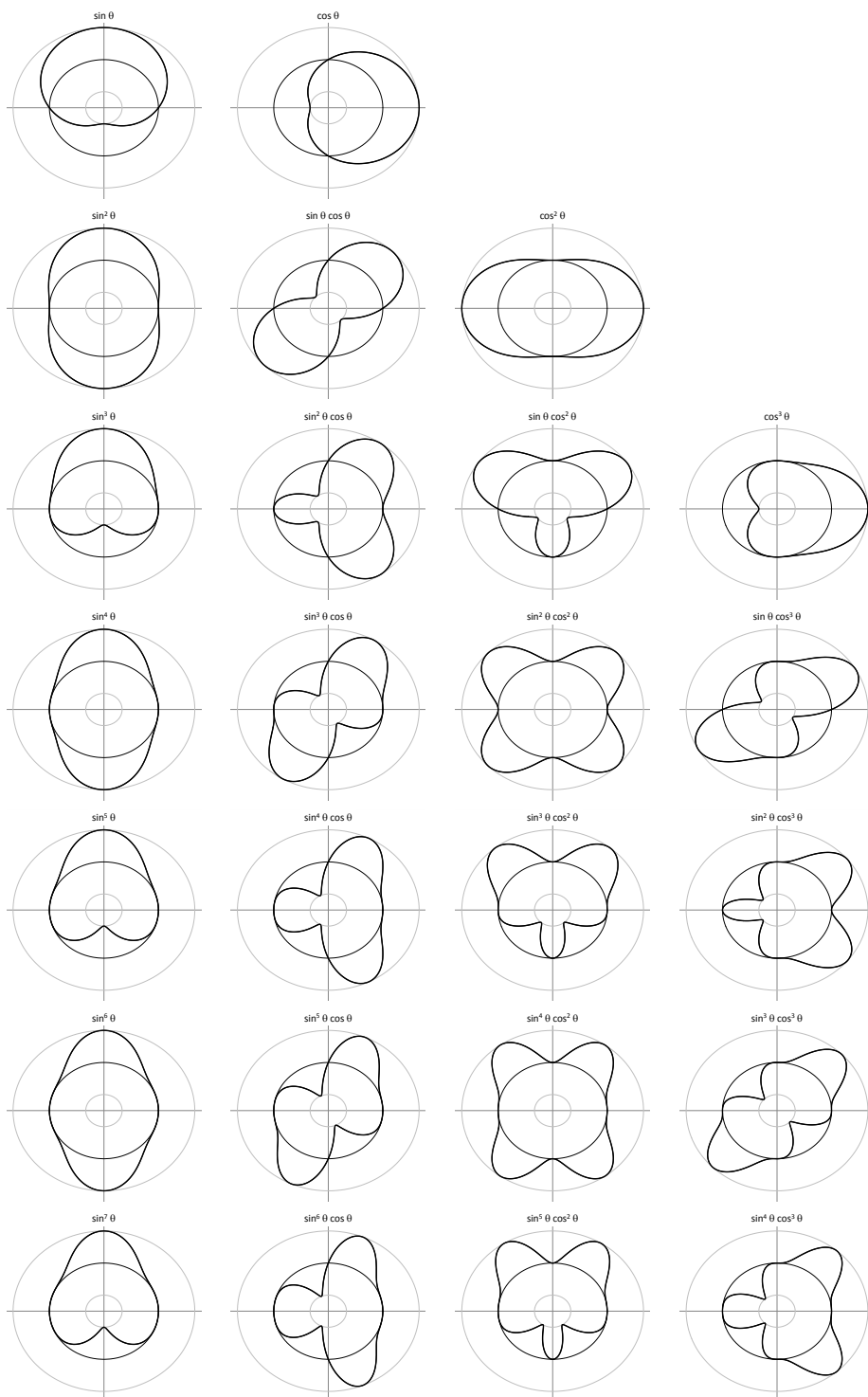


Figure 11.7: Directivités élémentaires ($\sin^p \theta \cos^q \theta$). Les lignes vont de $p + q = 1$ à $p + q = 7$, les colonnes de $q = 0$ à $q = 3$.

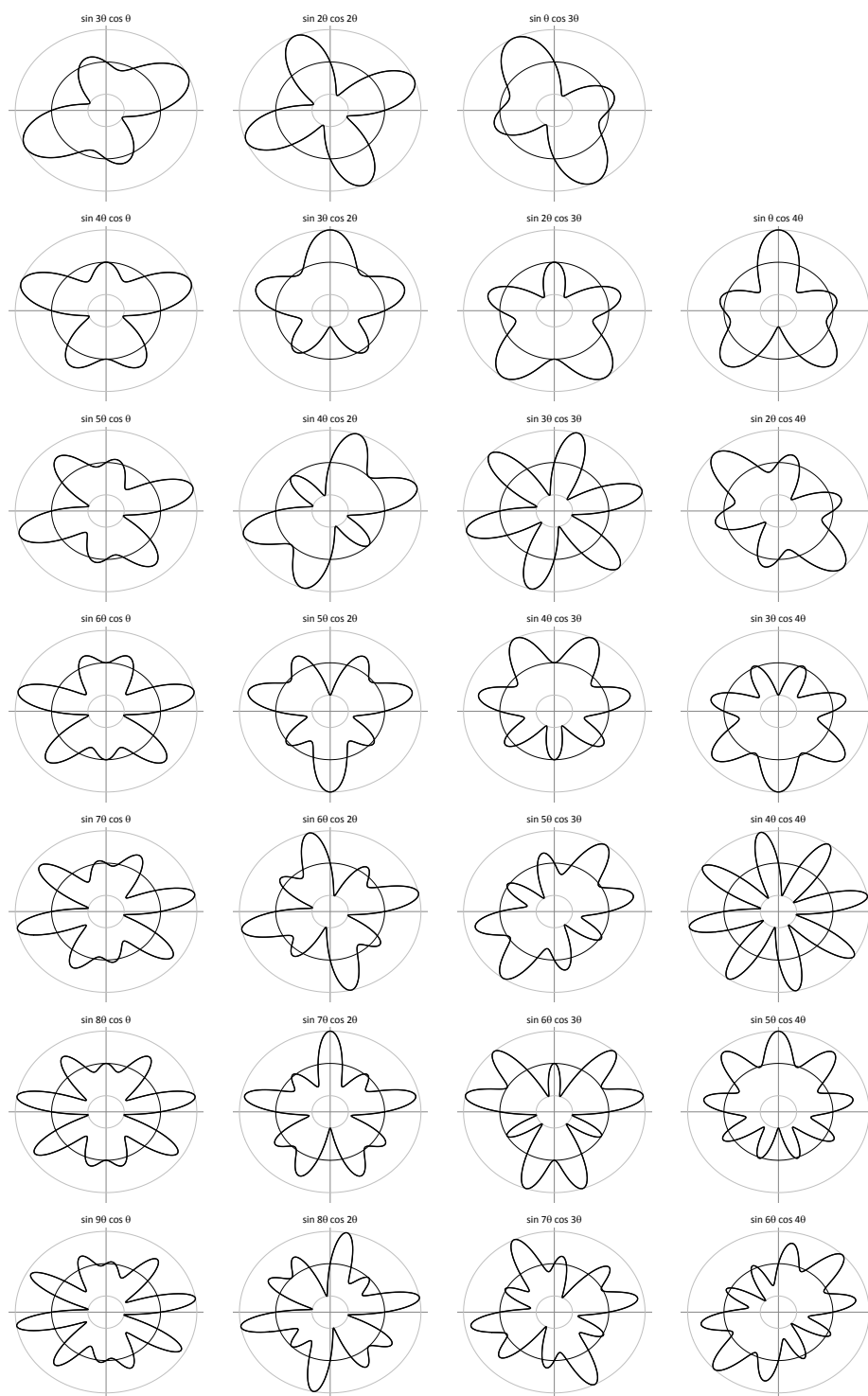
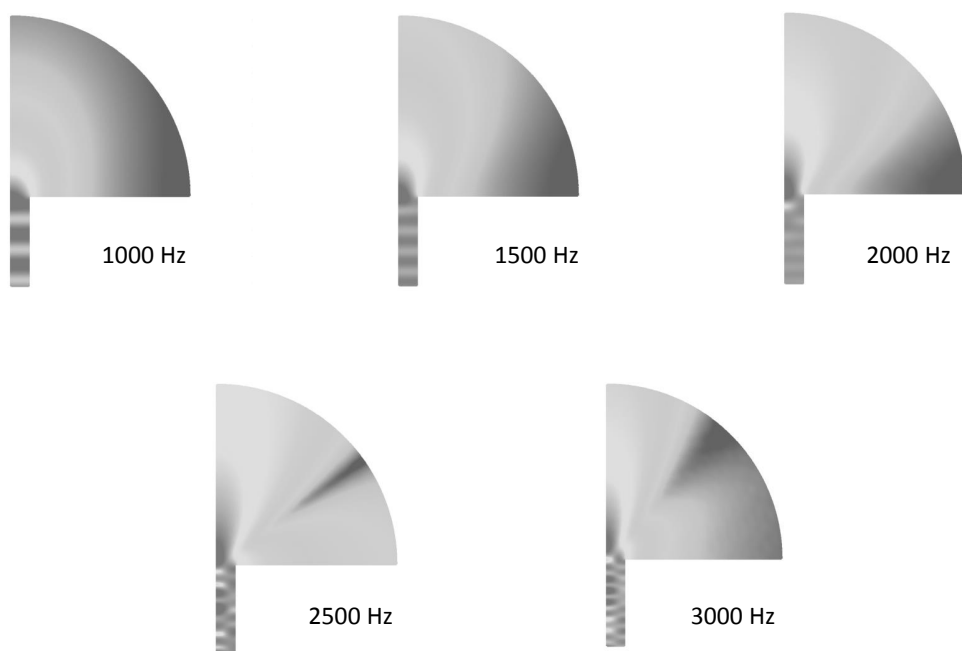


Figure 11.8: Directivités élémentaires ($\sin p\theta \cos q\theta$). Les lignes vont de $p + q = 4$ à $p + q = 10$, les colonnes de $q = 1$ à $q = 4$.



©ACTRAN by Free Field Technologies. Used by permission.

Figure 11.9: Variation avec la fréquence de la directivité du champ acoustique émis dans le demi-espace par le tube.

Généralité de l'analyse multipolaire

L'intérêt de l'analyse multipolaire est que *toute source de bruit peut être remplacée par une distribution équivalente de monopôles c'est-à-dire représentée par un développement multipolaire*. Considérons en effet une surface vibrante S caractérisée par une distribution de vitesse normale v_n Figure 11.10. Si nous plaçons, à l'intérieur de S , n sources ponctuelles, nous pouvons choisir leurs amplitudes q_i de manière à reproduire la distribution de vitesse normale v_n en n points de la surface. On peut donc aussi associer à toute distribution de vitesse v_n définie sur une surface fermée un *centre de rayonnement* arbitrairement placé à l'intérieur de S et des moments multipolaires associés qui reproduisent la distribution de vitesse voulue. On admettra sans démonstration que ce processus de remplacement d'une surface vibrante par un ensemble de sources ponctuelles équivalentes est asymptotiquement convergent. Dans ce processus, l'amplitude des sources individuelles dépend de la fréquence ; les moments multipolaires associés sont donc également dépendants de la fréquence et l'amplitude des moments d'ordre élevé augmente en général avec la fréquence² ce qui renforce l'effet du coefficient multiplicateur k^n .

2. En vibro-acoustique ceci reflète le fait qu'à haute fréquence les vibrations de la source sont plus complexes car elles impliquent des modes vibratoires d'ordre plus élevé.

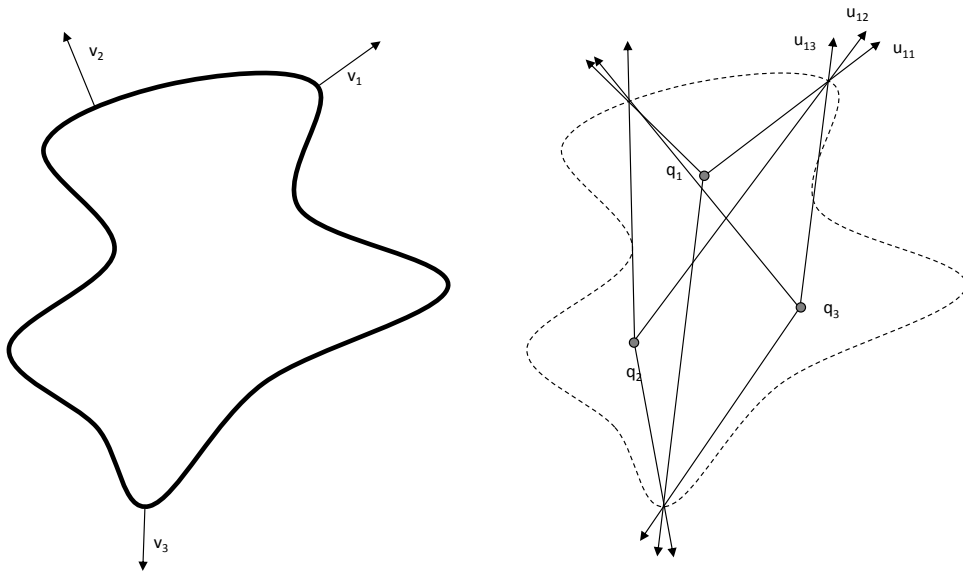


Figure 11.10: Toute structure vibrante peut être remplacée par un ensemble discret de sources ponctuelles ; les amplitudes q_1 , q_2 et q_3 des trois sources représentées à droite peuvent par exemple être choisies de manière à reproduire la vitesse en trois points de la surface de la structure représentée à gauche. En pratique on utiliserait des centaines de sources afin de reproduire la vitesse en des centaines de points.

11.3 Équation intégrale de Helmholtz

Qui veut tout comprendre finira par mourir de colère.

Proverbe arabe.

cité par Jean-Claude Guillebaud *in* La trahison des lumières (1995).

11.3.1 Cas d'un domaine borné

Considérons un domaine V borné limité par une surface S ; la normale à S pointe vers l'extérieur du domaine Figure 11.11. Nous cherchons à démontrer dans ce paragraphe que la pression acoustique au point P peut s'écrire sous la forme suivante (équation intégrale de Helmholtz) :

$$p(P) = - \oint_S [p(Q) \partial_n G(P, Q) + i \rho \omega v_n(Q) G(P, Q)] dS(Q) \quad (11.43)$$

où Q est un point courant de la surface S , p désigne la pression acoustique sur celle-ci, v_n la vitesse normale des particules d'air au droit de S et G est la fonction de Green associée à l'équation de Helmholtz :

$$G(P, Q) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (11.44)$$

où r est la distance entre les points P et Q . Pour démontrer cette relation nous allons successivement démontrer l'identité de Green puis l'appliquer aux deux fonctions p et G .

Identité de Green

Soient u et v deux fonctions *suffisamment continues et dérivables* sur V et S . L'identité de Green s'écrit :

$$\int_V [u \partial_{ii} v - v \partial_{ii} u] dV = \int_S [u \partial_n v - v \partial_n u] dS \quad (11.45)$$

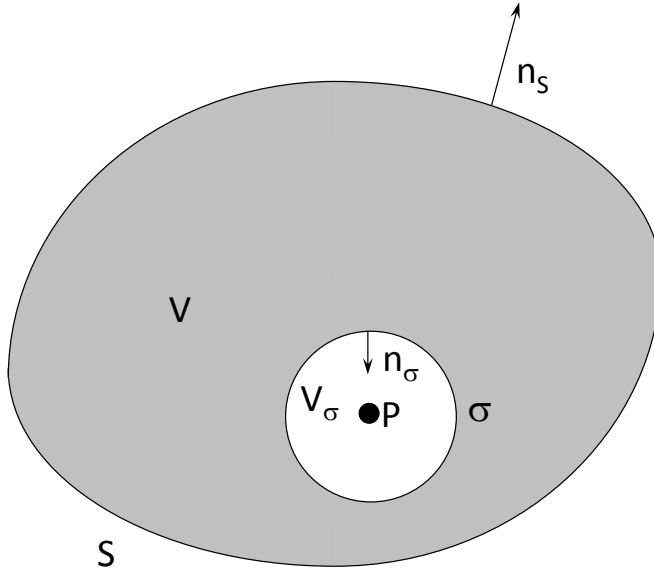


Figure 11.11: Équation intégrale de Helmholtz, problème intérieur, P n'appartient pas à S .

Elle se démontre aisément en intégrant par partie et en appliquant deux fois le théorème de la divergence :

$$\begin{aligned}
 \int_V u \partial_{ii} v dV &= \int_V [\partial_i (u \partial_i v) - \partial_i u \partial_i v] dV \\
 &= \int_S u \partial_n v dS - \int_V \partial_i u \partial_i v dV \\
 &= \int_S u \partial_n v dS - \int_V [\partial_i (v \partial_i u) - v \partial_{ii} u] dV \\
 &= \int_S [u \partial_n v - v \partial_n u] dS + \int_V v \partial_{ii} u dV \quad (11.46)
 \end{aligned}$$

Premier cas - P appartient à V

Remplaçons maintenant dans cette identité u par la pression p et v par la fonction de Green G . Comme G est une fonction singulière au point P ($r = 0$) nous ne pouvons appliquer l'identité au domaine V tout entier mais devons en

retirer un petit domaine sphérique V_σ centré sur P et borné par la surface σ ³ Figure 11.11. L'identité de Green s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{V-V_\sigma} [p\partial_{ii}G - G\partial_{ii}p] dV &= \int_S [p\partial_n G - G\partial_n p] dS \\ &+ \int_\sigma [p\partial_n G - G\partial_n p] d\sigma \end{aligned} \quad (11.47)$$

p et G étant solution de l'équation de Helmholtz homogène dans $V - V_\sigma$, l'intégrale de volume disparaît :

$$\int_{V-V_\sigma} [p\partial_{ii}G - G\partial_{ii}p] dV = \int_{V-V_\sigma} [p(-k^2G) - G(-k^2p)] dV = 0 \quad (11.48)$$

L'intégrale sur σ peut être calculée explicitement. Si on désigne par ϵ le rayon de la sphère σ , alors la dérivée normale sur σ est égale mais de signe contraire à la dérivée par rapport à ϵ :

$$\int_\sigma [p\partial_n G - G\partial_n p] d\sigma \quad (11.49)$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[p \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{e^{-ik\epsilon}}{4\pi\epsilon} \right) - \left(\frac{e^{-ik\epsilon}}{4\pi\epsilon} \right) \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right] \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (11.50)$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[-p(ik\epsilon + 1) - \epsilon \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right] e^{-ik\epsilon} \sin \theta d\theta d\phi \quad (11.51)$$

Si on fait tendre ϵ vers zéro la plupart des termes disparaissent et il reste :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\sigma [p\partial_n G - G\partial_n p] d\sigma = \frac{p(P)}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi = p(P) \quad (11.52)$$

L'intégrale sur σ se réduit donc à la valeur de la pression au point P . En injectant ce résultat dans l'équation 11.47 et en tenant également compte de l'équation 11.48 on trouve :

$$\int_S [p\partial_n G - G\partial_n p] dS + p(P) = 0 \quad (11.53)$$

3. Cet artifice ne serait pas nécessaire si nous utilisons la théorie des distributions mais nous choisissons la voie la plus longue et la plus classique.

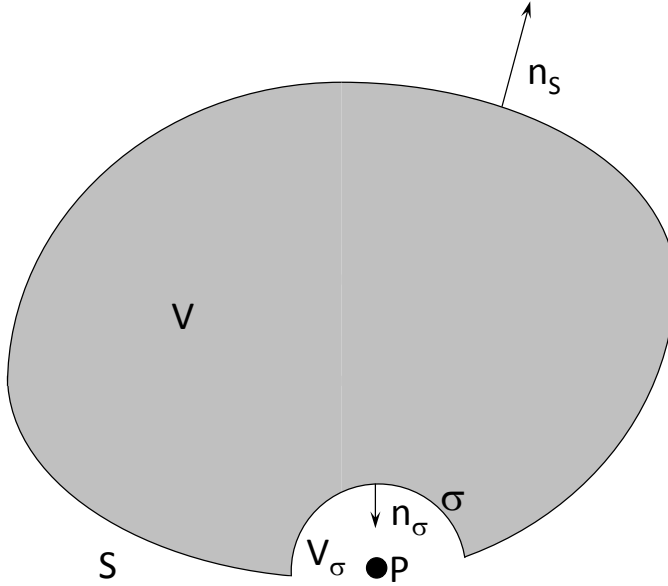


Figure 11.12: Équation intégrale de Helmholtz, problème intérieur, P appartient à S .

Et si on remplace le gradient de pression par son expression en fonction de la vitesse normale (Equation 6.5) on trouve l'équation de Helmholtz :

$$p(P) = - \oint_S [p(Q) \partial_n G(P, Q) + i \rho \omega v_n(Q) G(P, Q)] dS(Q) \quad (11.54)$$

Deuxième cas - P appartient à S

Dans le cas où le point P appartient à la surface S Figure 11.12 σ n'est plus une sphère complète mais une portion de sphère. L'intégrale sur σ n'est plus égale à $p(P)$ mais à :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma} [p \partial_n G - G \partial_n p] d\sigma = \frac{\int_{\sigma} \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi} p(P) = \frac{\alpha(P)}{4\pi} p(P) \quad (11.55)$$

où $\alpha(P)$ est l'angle solide sous lequel le point P voit le volume V . À titre d'exemple, si la surface est régulière au point P , $\alpha(P) = 2\pi$; si P est sur l'arête d'un cube alors $\alpha(P) = \pi$; si P est au sommet d'un cube alors $\alpha(P) = \pi/2$.

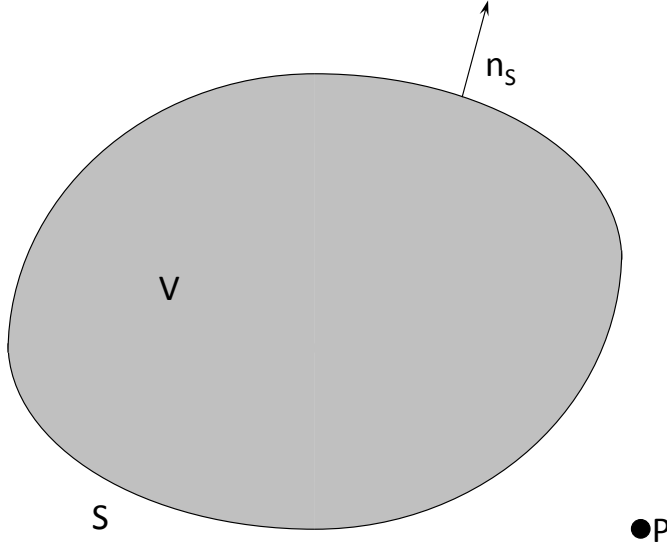


Figure 11.13: Équation intégrale de Helmholtz, problème intérieur, P n'appartient ni à V, ni à S.

On trouve finalement la forme suivante pour un point P appartenant à S :

$$c(P)p(P) = - \oint_S [p(Q)\partial_n G(P, Q) + i\rho\omega v_n(Q)G(P, Q)] dS(Q) \quad (11.56)$$

où $c(P) = \alpha(P)/4\pi$ est un coefficient dépendant de la topologie de la surface au point P.

Troisième cas - P n'appartient ni à V ni à S

Si le point P est extérieur à V Figure 11.13, il n'y a pas de singularité à exclure du domaine d'intégration et on trouve :

$$\oint_S [p(Q)\partial_n G(P, Q) + i\rho\omega v_n(Q)G(P, Q)] dS(Q) = 0 \quad (11.57)$$

Commentaires

1. Les équations 11.54 et 11.56 sont de natures différentes : l'équation 11.54 exprime que la pression dans le domaine V est entièrement déterminée par la connaissance de la pression p et de la vitesse normale v_n sur la frontière S ; si on connaît ces grandeurs sur S , alors on connaît le champ acoustique partout dans le domaine. L'équation 11.56 est une *équation intégrale* liant la pression au point P de la frontière à la pression et la vitesse en tous les autres points de la surface.
2. Si on choisit d'orienter la normale vers l'intérieur du domaine, le signe de l'intégrale sur S change. L'équation intégrale de Helmholtz s'écrit, avec cette convention alternative :

$$c(P)p(P) = \oint_S [p(Q)\partial_n G(P, Q) + i\rho\omega v_n(Q)G(P, Q)] dS(Q) \quad (11.58)$$

11.3.2 Domaine non borné

Pour un **domaine non borné** (figure 11.14, notez l'inversion du sens des normales qui pointent toujours vers l'extérieur du domaine), outre l'intégrale sur S et celle sur σ qui se calcule explicitement comme ci-dessus, on trouve une intégrale sur la surface à l'infini Σ qu'on assimile à une sphère dont le rayon tend vers l'infini :

$$p(P) = - \oint_S [p(Q)\partial_n G(P, Q) + i\rho\omega v_n(Q)G(P, Q)] dS(Q) \quad (11.59)$$

$$- \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [-p(ik\epsilon + 1) + i\rho\omega v_\epsilon] e^{-ik\epsilon} \sin\theta d\theta d\phi \quad (11.60)$$

Cette intégrale est nulle si la condition de Sommerfeld est respectée, c'est-à-dire si :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} [-p(ik\epsilon + 1) + i\rho\omega v_\epsilon] = 0 \quad (11.61)$$

ce qui revient à imposer le comportement asymptotique suivant à l'impédance acoustique *radiale* :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{p}{v_\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \rho c \frac{ik\epsilon}{1 + ik\epsilon} = \rho c \quad (11.62)$$

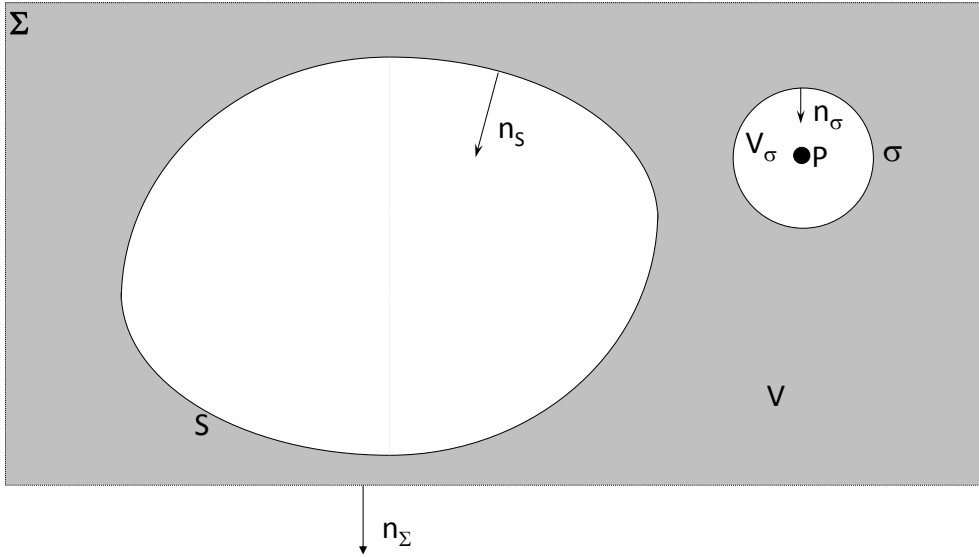


Figure 11.14: Équation intégrale de Helmholtz, problème extérieur, P n'appartient pas à S .

Si le point P appartient à la frontière, on retrouve l'équation (11.56) mais le coefficient $c(P) = \alpha(P)/4\pi$ fait cette fois intervenir l'angle solide α sous lequel le point P voit le domaine *extérieur*. Pour reprendre notre exemple, si la surface est régulière au point P , $c(P) = 1/2$; si P est sur l'arête d'un cube alors $c(P) = 3/4$ et si P est au sommet d'un cube alors $c(P) = 7/8$.

11.3.3 Forme indirecte de l'équation intégrale

Considérons une surface mince S et sa normale n Figure 11.15. Pour appliquer l'équation intégrale de Helmholtz nous devons entourer S d'une surface fermée constituée de la face S^+ située du côté de la normale n et de l'autre face S^- . On suppose par ailleurs que les surfaces S_e sont de mesure nulle. La pression en un point P quelconque est donnée par (attention : le sens des normales n^+

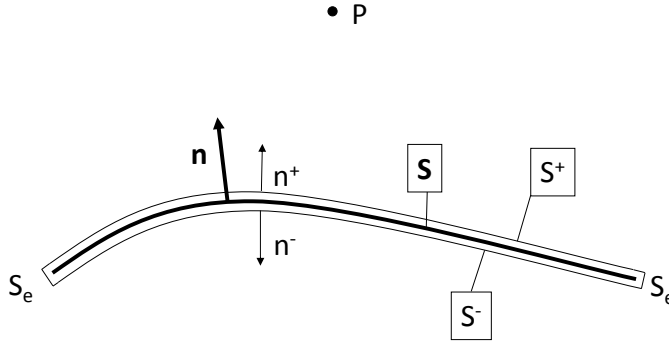


Figure 11.15: Schéma relatif à l'équation intégrale de Helmholtz sous sa forme indirecte.

et n^- est opposé à celui des sections précédentes :

$$\begin{aligned} p(P) &= \int_{S^+} [p^+ \partial_{n^+} G + i\rho\omega G v_{n^+}^+] dS \\ &+ \int_{S^-} [p^- \partial_{n^-} G + i\rho\omega G v_{n^-}^-] dS \end{aligned} \quad (11.63)$$

Mais :

- intégrer sur S^- ou S^+ est équivalent à intégrer sur S ;
- $\partial_{n^+} G = \partial_n G$;
- $\partial_{n^-} G = -\partial_n G$;
- $v_{n^+}^+ = v_n^+$;
- $v_{n^-}^- = -v_n^-$;

et donc :

$$p(P) = \int_S [(p^+ - p^-) \partial_n G + i\rho\omega G (v_n^+ - v_n^-)] dS \quad (11.64)$$

soit encore, si on note σ la différence de vitesse et μ la différence de pression entre les deux côtés de la surface :

$$p(P) = \int_S [\mu \partial_n G + i\rho\omega G \sigma] dS \quad (11.65)$$

Par analogie avec l'électromagnétisme, on appelle σ le potentiel de simple couche et μ le potentiel de double couche. Si pression et vitesse sont connues de part et d'autres de S , alors la relation 11.65 permet de calculer la pression

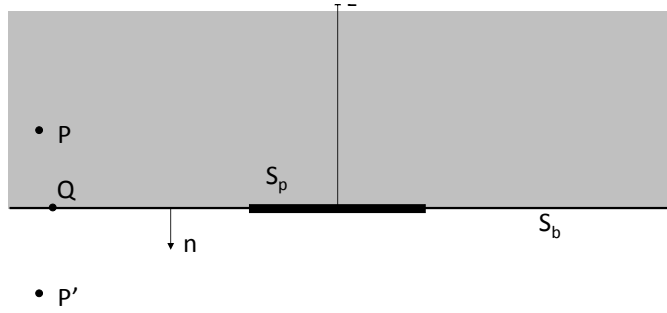


Figure 11.16: Plaque bafflée.

en tous points du domaine. Cette nouvelle relation intégrale est générale ; elle s'applique quelle que soit la surface S , ouverte ou fermée, simplement ou multiplement connexe. Si on l'applique à une surface fermée, on constate qu'elle est valable que P soit situé à l'intérieur ou à l'extérieur du volume fermé V bordé par S . Comme pour la variante directe il y a lieu de procéder à un passage à la limite rigoureux si P appartient à S mais nous ne rentrerons pas dans ces détails ici⁴. Notons enfin que si S représente la surface moyenne d'une plaque mince, on pourra en général poser $\sigma = 0$ (pas de différence de vitesse entre les deux faces de la plaque) et écrire :

$$p(P) = \int_S \mu \partial_n G dS \quad (11.66)$$

11.3.4 Rayonnement acoustique d'une plaque plane

Plaque bafflée

Considérons une plaque dont le déplacement hors plan est u_z Figure 11.16 ; la plaque est insérée dans un plan rigide que les acousticiens appellent un *baffle*. La surface de la plaque est désignée par S_p et la surface du baffle par S_b . On cherche à calculer la pression acoustique au point P . On définit aussi le

4. Voir par exemple **Migeot J-L., Lecomte C., Meerbergen K.**, *Implementation and accuracy issues*, Chapitre 2 du livre *Boundary element methods in Acoustics*, Éditeur : O. von Estorff, Computational Mechanics Publications Ltd (2000).

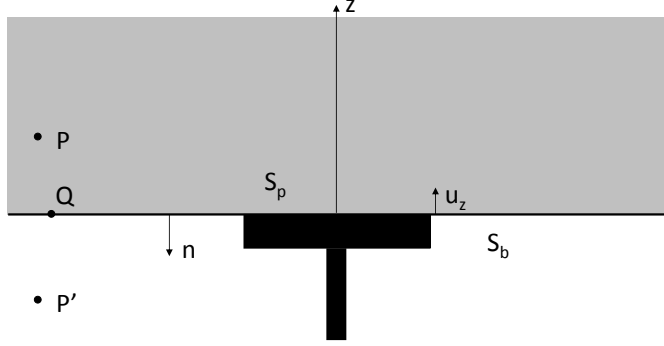


Figure 11.17: Piston bafflé.

point P' symétrique de P par rapport au baffle et le point Q qui est un point courant des surfaces S_p et S_b . Appliquons l'équation 11.54 au domaine non borné V situé au-dessus du baffle :

$$\begin{aligned} p(P) &= - \int_{S_p} [p(Q) \partial_n G(P, Q) + i\rho\omega v_n(Q) G(P, Q)] dS(Q) \\ &\quad - \int_{S_b} [p(Q) \partial_n G(P, Q) + i\rho\omega v_n(Q) G(P, Q)] dS(Q) \end{aligned} \quad (11.67)$$

Appliquons également l'équation 11.57 au même domaine :

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{S_p} [p(Q) \partial_n G(P', Q) + i\rho\omega v_n(Q) G(P', Q)] dS(Q) \\ &\quad - \int_{S_b} [p(Q) \partial_n G(P', Q) + i\rho\omega v_n(Q) G(P', Q)] dS(Q) \end{aligned} \quad (11.68)$$

Additionnons les deux équations et prenons en compte le fait que :

- $v_n = 0$ sur S_b ;
- $v_n = -i\omega u_z$ sur S_p ;
- $G(P, Q) = G(P', Q)$ sur S_b et S_p ;
- $\partial_n G(P, Q) = -\partial_n G(P', Q) = 0$ sur S_b et S_p .

On obtient :

$$p(P) = -2\rho\omega^2 \int_{S_p} u_z(Q) G(P, Q) dS(Q) \quad (11.69)$$

Piston bafflé

Si on considère u_z constant dans la solution ci-dessus, on obtient le bruit rayonné par un piston rigide bafflé :

$$p(P) = -2\rho\omega^2 u_z \int_{S_p} G(P, Q) dS(Q) \quad (11.70)$$

L'intégrale peut se calculer numériquement ou analytiquement. La distribution de pression calculée par la relation ci-dessus est présentée à la figure 11.18 pour un piston circulaire de 10 cm de rayon et vibrant avec une accélération de 1 m/s^2 ($u = -1/\omega^2$). Si les dimensions du piston sont petites par rapport à la longueur d'onde (kr petit), on peut considérer l'intégrand comme constant et obtenir :

$$p(P) \simeq -2\rho\omega^2 S u_z \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (11.71)$$

où r est la distance entre P et le centre du piston. Le piston rayonne dans ce cas comme un monopôle.

Plaque non bafflée

Si la plaque est non bafflée, on peut directement appliquer l'équation 11.66 :

$$p(P) = \int_S \mu \partial_n G dS \quad (11.72)$$

mais on ne connaît pas *a priori* la différence de pression μ entre les deux faces. Si la plaque est petite par rapport à la longueur d'onde on pourra toutefois écrire :

$$p(P) \simeq \partial_n G(Q) \int_S \mu dS \quad (11.73)$$

où Q représente le centre de la plaque. Le caractère **dipolaire** du rayonnement apparaît clairement et s'oppose au caractère **monopolaire** observé dans le cas bafflé.

Analyse qualitative du cas général

Si on considère la vibration d'une plaque plane, on observe une alternance de maxima, de nœuds et de minima. En première analyse on peut associer chaque

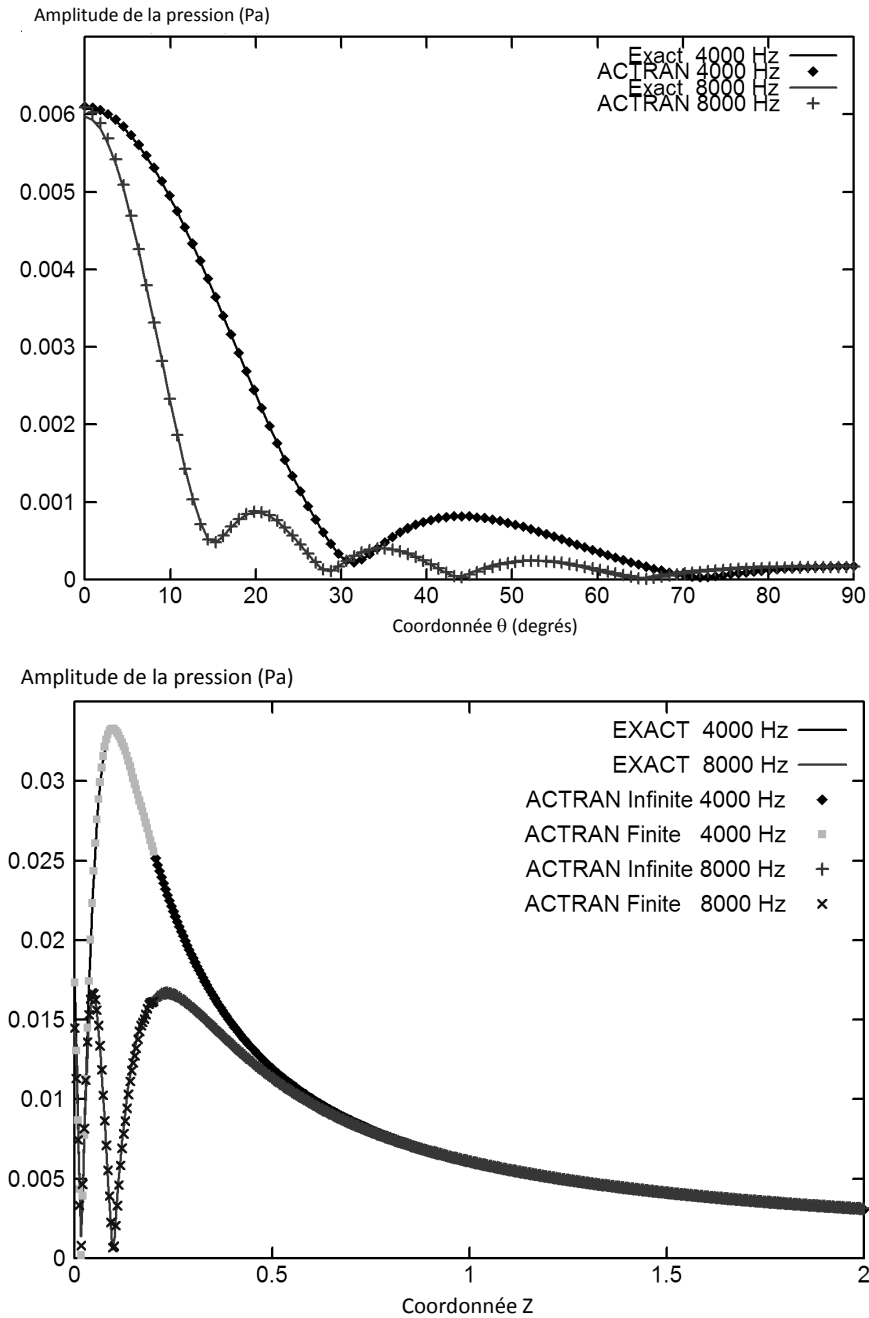


Figure 11.18: Rayonnement d'un piston bafflé à 4 et 8 kHz. Diagramme du haut : directivité. Diagramme du bas : distribution de pression dans l'axe du piston.

maxima à une source acoustique d'amplitude positive et chaque minima à une source d'amplitude négative. Dans le cas bafflé, la plaque pourra être assimilée à une simple couche de sources de phase alternées. Dans le cas non bafflé, on devra considérer une double couche de sources alternées, les deux couches étant en opposition de phase. Les sources des faces opposées proches des extrémités interfèrent fortement entre elles, celles éloignées des bords interagissent faiblement.

Puissance rayonnée et efficacité

11.4 de rayonnement

On mesure souvent le champ acoustique rayonné par la puissance émise globalement. Celle-ci est l'intégrale de l'intensité active sur la surface rayonnante ou sur une surface de contrôle entourant l'objet :

$$W_{rad} = \Re\left(\frac{1}{2} \int_S p v_n^* dS\right) \quad (11.74)$$

Notons que la surface S peut être partitionnée ($S = \cup_i S_i$) ; on peut alors associer une contribution W_i à chacune des surfaces S_i . La puissance totale est simplement la somme des contributions :

$$W_{rad} = \sum_i W_i \quad (11.75)$$

On rapporte parfois la puissance rayonnée à une puissance conventionnelle de référence obtenue en considérant que chaque point de la surface S rayonne de manière autonome et que l'impédance acoustique est localement égale à ρc :

$$\begin{aligned} W_0 &= \Re\left(\frac{1}{2} \int_S \rho c v_n v_n^* dS\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_S \rho c |v_n|^2 dS \end{aligned} \quad (11.76)$$

Le rapport des deux puissances est l'*efficacité de rayonnement de la structure* :

$$\sigma = \frac{W_{rad}}{W_0} \quad (11.77)$$

11.5 Impédance de rayonnement

Considérons Figure 11.19 un tube, ou un composant acoustique quelconque, connecté par une ouverture S_o à un demi-espace délimité par un baffle rigide infini S_b . Appliquons l'équation 11.69 à la surface S_o :

$$\frac{1}{2}p(P) = 2i\rho\omega \int_{S_o} v_z(Q)G(P, Q)dS(Q) \quad (11.78)$$

C'est une relation non locale entre la pression en un point de S_o et la distribution de vitesse sur S_o . L'opérateur R défini par :

$$R(u) = 4i\rho\omega \int_{S_p} u(Q)G(P, Q)dS(Q) \quad (11.79)$$

est appelé l'impédance de rayonnement du milieu semi-infini. La relation non locale entre pression et vitesse sur S_o ($p = R(v_z)$) représente l'effet du milieu semi-infini sur le champ acoustique dans le tube ou le composant quelconque représenté à la figure 11.19.

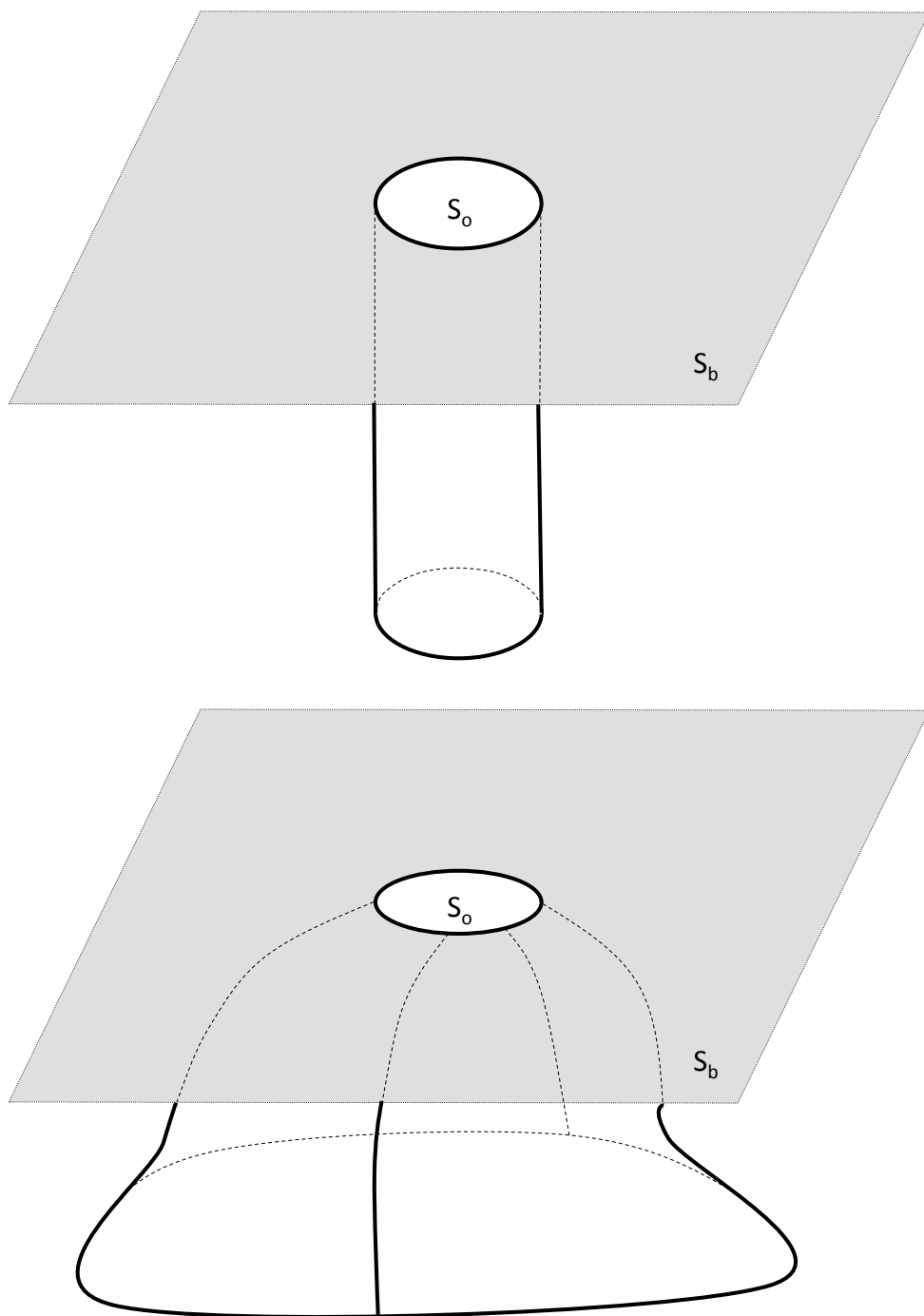


Figure 11.19: Condition aux limites non locale à la surface de jonction S_o entre un composant acoustique et un demi-espace bafflé (S_b).

12

DIFFRACTION

Dans ce très bref chapitre, nous nous contenterons de montrer qu'un problème de diffraction peut se formuler sous forme d'un problème de rayonnement. Les méthodes vues au chapitre précédent sont alors d'application. Nous ne considérerons pas ici les autres théories de la diffraction telles celles de Fresnel ou de Kirchhoff.

Soit un domaine Ω extérieur à la surface Γ . Le champ de pression inconnu p obéit dans Ω à l'équation de Helmholtz non homogène :

$$\Delta p + k^2 p = f \quad (12.1)$$

Sur Γ on trouve trois types de conditions aux limites :

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} & \text{sur } \Gamma_p \\ \partial_n p &= -i\rho\omega\bar{v}_n & \text{sur } \Gamma_v \\ \partial_n p &= -i\rho\omega A_n p & \text{sur } \Gamma_Z \end{aligned} \quad (12.2)$$

où A_n est l'admittance normale sur la surface Γ_Z et où Γ_p , Γ_v et Γ_Z définissent une partition de Γ . Si on connaît le *champ libre* engendré par la distribution de source f c'est-à-dire le champ p_i solution de l'équation :

$$\Delta p_i + k^2 p_i = f \quad (12.3)$$

en l'absence de toutes conditions aux limites, on peut poser $p_s = p - p_i$ et résoudre le problème *homogène* suivant pour p_s :

$$\Delta p_s + k^2 p_s = 0 \quad (12.4)$$

avec les conditions aux limites modifiées :

$$\begin{aligned} p_s &= \bar{p} - p_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_p \\ \partial_n p_s &= -i\rho\omega\bar{v}_n - \partial_n p_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_v \\ \partial_n p_s &= -i\rho\omega A_n p - \partial_n p_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_Z \end{aligned} \tag{12.5}$$

Tout problème de diffraction peut ainsi être formellement ramené à un problème de rayonnement. L'effet des sources incidentes est inclus dans les conditions aux limites plutôt que dans l'équation aux dérivées partielles. Les méthodes vues au chapitre précédent sont donc d'application (analyse multipolaire, équation intégrale de Helmholtz). En particulier la directivité du champ total apparaît comme la combinaison de la directivité du champ incident et du champ diffracté.

13

RÉFRACTION

Les bruits l'atteignaient, comme ils doivent atteindre les poissons dans l'eau : des bruits qu'on n'entend pas avec ses oreilles, mais avec tout son être, qu'on absorbe, qu'on digère et dont il arrive que le sens soit complètement changé.

Georges Simenon (1903-1989) *in* La fuite de Monsieur Monde (1945).

Soient deux milieux séparés par un interface plan Figure 13.1. Le premier milieu est caractérisé par une masse volumique ρ_1 et une vitesse du son c_1 . Ces deux constantes valent respectivement ρ_2 et c_2 dans le second milieu. Soit une onde plane incidente d'amplitude $I(\omega)$ se propageant dans le milieu 1 et caractérisée par le vecteur d'onde $(k_1 \sin \theta_1, -k_1 \cos \theta_1, 0)$. Une partie $R(\omega)$ de l'onde va être réfléchiée à l'interface et sera caractérisée par un vecteur d'onde :

$$\vec{k}_1 : (k_1 \sin \theta_1, k_1 \cos \theta_1, 0) \quad (13.1)$$

alors qu'une partie $T(\omega)$ sera transmise et se propagera dans le milieu 2 avec un vecteur d'onde

$$\vec{k}_1 : (k_2 \sin \theta_2, -k_2 \cos \theta_2, 0) \quad (13.2)$$

Le champ acoustique dans le milieu 1 vaut :

$$p_1(\vec{r}, \omega) = I(\omega) e^{-ik_1 x \sin \theta_1 + ik_1 y \cos \theta_1} + R(\omega) e^{-ik_1 x \sin \theta_1 - ik_1 y \cos \theta_1} \quad (13.3)$$

alors que dans le milieu 2 il vaut

$$p_2(\vec{r}, \omega) = T(\omega) e^{-ik_2 x \sin \theta_2 + ik_2 y \cos \theta_2} \quad (13.4)$$

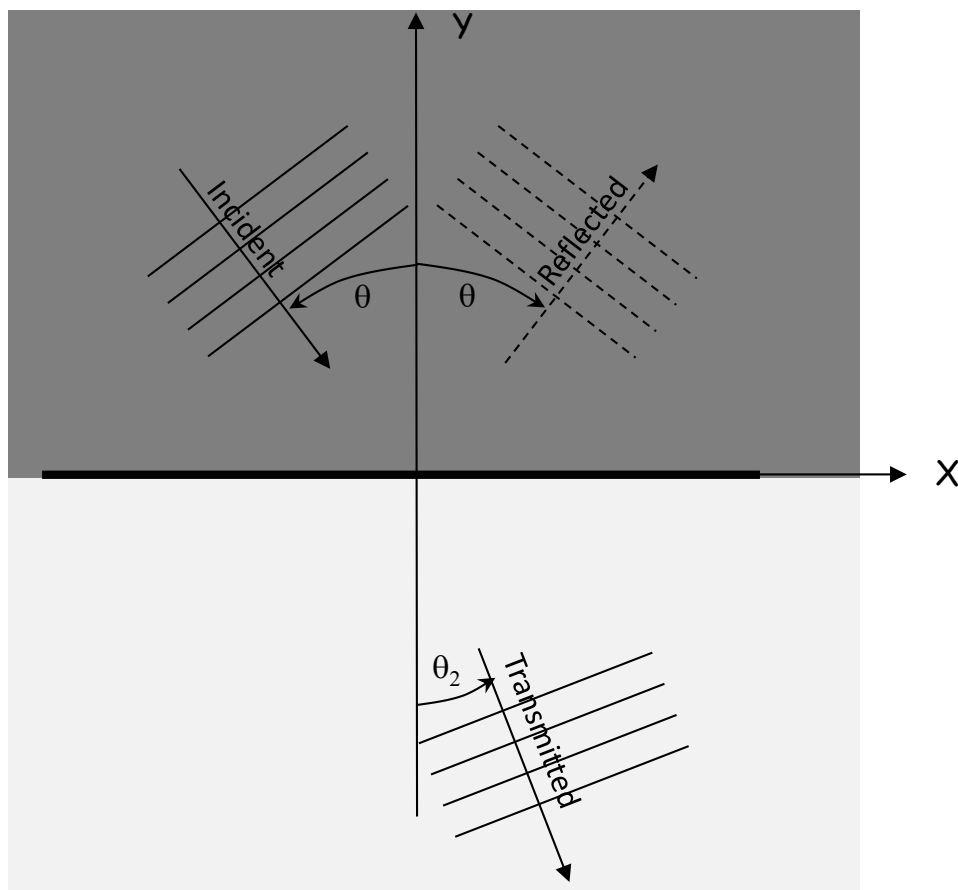


Figure 13.1: Réfraction à l'interface entre deux fluides d'impédances différentes.

À l'interface la continuité de la pression implique d'une part que

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (13.5)$$

soit (loi de Snell¹-Descartes) :

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} \quad (13.6)$$

et d'autre part que :

$$T(\omega) = I(\omega) + R(\omega) \quad (13.7)$$

La continuité de la vitesse normale à l'interface impose quant à elle que :

$$\frac{I(\omega) - R(\omega)}{\rho_1 c_1} \cos \theta_1 = \frac{T(\omega)}{\rho_2 c_2} \cos \theta_2 \quad (13.8)$$

Les deux dernières relations permettent de trouver :

$$\frac{R(\omega)}{I(\omega)} = \frac{\frac{\cos \theta_1}{\rho_1 c_1} - \frac{\cos \theta_2}{\rho_2 c_2}}{\frac{\cos \theta_1}{\rho_1 c_1} + \frac{\cos \theta_2}{\rho_2 c_2}} = \frac{\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} - \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}}{\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} + \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}} \quad (13.9)$$

et :

$$\frac{T(\omega)}{I(\omega)} = \frac{\frac{2 \cos \theta_1}{\rho_1 c_1}}{\frac{\cos \theta_1}{\rho_1 c_1} + \frac{\cos \theta_2}{\rho_2 c_2}} = \frac{2 \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}}{\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} + \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}} \quad (13.10)$$

Notons que les rapports $\frac{R}{I}$ et $\frac{T}{I}$ sont indépendants de ω . L'intensité incidente vaut :

$$I_{inc} = \frac{|I|^2}{\rho_1 c_1} \quad (13.11)$$

et l'intensité transmise :

$$I_{trans} = \frac{|T|^2}{\rho_2 c_2} \quad (13.12)$$

Le facteur de transmission, qui est le rapport de l'intensité transmise à l'intensité incidente et ne doit pas être confondu avec l'amplitude de l'onde trans-

1. **Willebrord Snell van Royen**, né en 1580 à Leyde et mort en 1626, est un humaniste, mathématicien et physicien néerlandais. Il n'est pas établi que Snell ait réellement été le premier à énoncer cette loi de la réfraction. C'est le grand astronome hollandais Christiaan Huygens qui, 70 ans après, associe le nom de Snell à celui de Descartes.

mise, vaut donc :

$$\tau = \frac{|T(\omega)|^2 \rho_1 c_1}{|I(\omega)|^2 \rho_2 c_2} = \frac{4 \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}}{\left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} + \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \right)^2} \quad (13.13)$$

La loi de Snell-Descartes impose l'égalité des projections des vecteurs d'ondes \vec{k}_1 et \vec{k}_2 sur l'interface. Si $c_1 > c_2$ (émission dans l'eau et transmission dans l'air), il existe un angle θ_2 quel que soit l'angle incident θ_1 . Si $c_1 < c_2$ (émission dans l'air et transmission dans l'eau) alors il existe un angle critique θ_c donné par :

$$\sin \theta_c = \frac{c_1}{c_2} \quad (13.14)$$

θ_2 n'existe que pour $\theta_1 < \theta_c$ et vaut 90° pour $\theta_1 = \theta_c$. Il n'y a aucune transmission pour $\theta_1 > \theta_c$. Pour un interface air/eau l'angle critique est de 13° .

Incidence normale

Dans le cas de l'incidence normale ($\theta_1 = \theta_2 = 0$), le facteur de transmission est donné par :

$$\tau = \frac{4 \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}}{\left(1 + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right)^2} \quad (13.15)$$

Si $\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$, on trouve :

$$\tau \simeq \frac{4 \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \quad (13.16)$$

Au passage de l'air (1) dans l'eau (2) on a :

$$\tau \simeq 10^{-3} \quad (13.17)$$

Application à la transmission du son entre oreille moyenne et interne

Les parties externe et moyenne de l'oreille sont remplies d'air ; la partie interne est remplie d'un liquide, la périlymphe, dont on peut associer les propriétés acoustiques à celles de l'eau. À l'interface entre les deux milieux, sous incidence

normale, le facteur de perte est de :

$$\begin{aligned}\rho_1 c_1 &= 1.225 \times 340 = 417 \\ \rho_2 c_2 &= 1000 \times 1500 = 1.5 \cdot 10^6 \\ \tau &\simeq \frac{4 \times 417}{1.5 \cdot 10^6} \simeq 10^{-3}\end{aligned}\quad (13.18)$$

La perte est donc de $10 \log 10^{-3}$ soit 30 dB (valeur exacte 29.5 dB). L'oreille moyenne compense cet effet de deux manières :

- le rapport des surfaces entre le tympan et la fenêtre ovale est de l'ordre de 20 ; le rapport des pressions entre les parties externe et interne de l'oreille est donc amplifié du même facteur ;
- l'articulation de la chaîne des osselets de l'oreille interne est telle que le déplacement de la base de l'étrier (l'osselet connecté au tympan) est légèrement inférieur à celui du marteau (situé du côté de l'oreille interne) ce qui produit une amplification complémentaire (facteur 1,3) de la force appliquée à la fenêtre ovale.

Ensemble ces deux effets ($10 \log (1.3 \cdot 20)^2 = 28.3$ dB) compensent presque parfaitement la perte correspondant à la différence de milieu (29.5 dB).

Analogie du maître-nageur

L'analogie du maître-nageur Figure 13.2 permet de comprendre intuitivement la loi de Snell-Descartes : soit un nageur N en difficulté que veut aider un maître-nageur M. Sachant que ce maître-nageur court à la vitesse v_c et nage à la vitesse $v_n < v_c$ quel est le trajet MPN qu'il doit suivre pour rejoindre le nageur au plus vite ? Le trajet MBN est clairement le plus court alors que le trajet MCN minimise le trajet dans l'eau mais lequel est le plus efficace ? Le temps de trajet est donné par :

$$T = \frac{\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}}{v_c} + \frac{\sqrt{(x_N - x)^2 + (y_N - y)^2}}{v_n} \quad (13.19)$$

La condition de stationnarité donne :

$$\frac{x - x_M}{v_c \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}} - \frac{x_N - x}{v_n \sqrt{(x_N - x)^2 + (y_N - y)^2}} = 0 \quad (13.20)$$

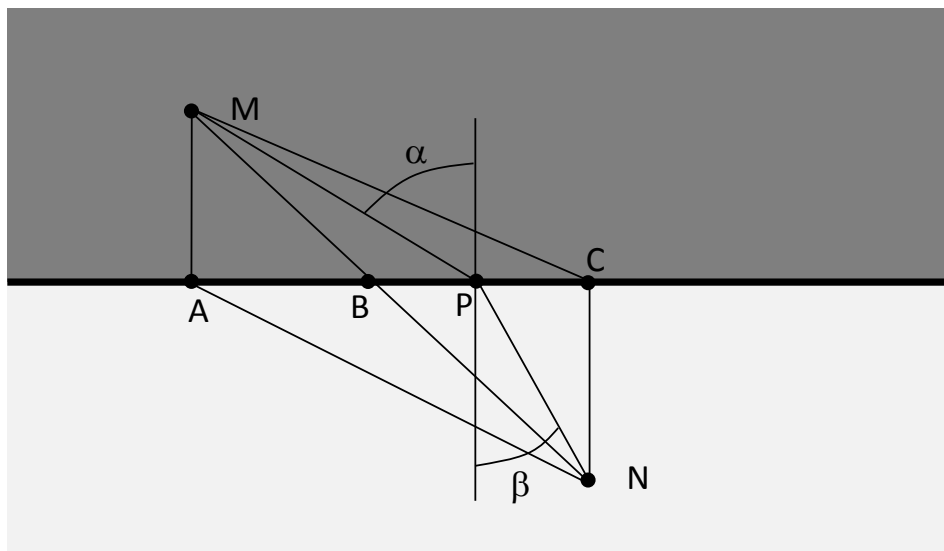


Figure 13.2: Analogie du maître-nageur.

soit, en introduisant les angles α et β :

$$\frac{\sin \alpha}{v_c} = \frac{\sin \beta}{v_n} \quad (13.21)$$

ce qui est exactement la loi de Snell-Descartes qui apparaît donc comme une loi garantissant que l'onde suit bien le trajet le plus rapide entre deux points situés dans deux milieux différents. C'est d'ailleurs par ce raisonnement que Fermat introduisit son principe de moindre chemin optique.

14

PROPAGATION AVEC DISSIPATION

Contents

14.1 Propagation en milieu dissipatif	296
14.2 Fluide équivalent à un poreux	298
14.3 Théorie de Biot	300
14.4 Mise en œuvre des matériaux poro-élastiques	323

Dans de nombreux cas pratiques, les ondes acoustiques se propagent en perdant de l'énergie. Ceci résulte principalement de deux phénomènes dissipatifs non réversibles : le frottement visqueux et les échanges thermiques non isentropiques. Ces phénomènes sont présents lors de toute propagation acoustique car l'air est un fluide visqueux et n'est pas un isolant thermique parfait. Toutefois, sa viscosité et sa conductibilité thermique étant faibles, le son se propage sur de grandes distances et on peut souvent, en première approximation, négliger les phénomènes dissipatifs ou les inclure simplement, comme discuté à la section 6.5.4, en donnant une composante imaginaire à la vitesse du son.

Ce n'est toutefois plus le cas lors de la propagation en milieu poreux. En effet, les fluctuations de pression et de vitesse acoustiques se produisent alors dans des cavités et canaux de très petites dimensions. Les gradients de vitesse et de température se développant dans ce cas ne sont plus inversement proportionnels à la longueur d'onde mais à la taille de ces canaux et cavités. Comme les frottements visqueux sont proportionnels au gradient de vitesse et les échanges thermiques proportionnels au gradient de température, ils peuvent devenir significatifs même si la viscosité et la conductibilité thermique sont faibles.

La propagation dans de tels milieux est donc caractérisée par un amortissement important, dissipant rapidement l'énergie acoustique incidente. Ce phénomène est très utile pour contrôler l'amplitude des ondes stationnaires dans des cavités (habitacle de voiture, pièce de vie) en y incorporant des matériaux poreux amortissant, que l'on appelle habillage acoustique.

14.1 Propagation en milieu dissipatif

Les phénomènes de dissipation peuvent être étudiés de façon simplifiée en reprenant le raisonnement de la section 4.1 mais en y incorporant le modèle le plus simple de dissipation visqueuse en milieu poreux (loi de Darcy) et une relation d'état pression/masse volumique faisant intervenir une hystérèse linéaire liée aux échanges thermiques non isentropiques.

Reprenons les équations de conservation de la masse (Equation 4.1) et de la quantité de mouvement linéarisée (Equation 4.2), en supposant nuls les termes sources et en y ajoutant le terme de frottement visqueux f_i :

$$\partial_t \rho_a + \rho_0 \partial_i v_{ia} = 0 \quad (14.1)$$

$$\rho_0 \partial_t v_{ia} + \partial_i p_a + f_i = 0 \quad (14.2)$$

Selon la loi de Darcy, la force de frottement par unité de volume est opposée au mouvement du fluide traversant le milieu poreux et proportionnelle à la vitesse du fluide (le coefficient de proportionnalité R , appelé *résistivité*, sera défini plus précisément à la section 14.3.2 où l'on évoquera également son mode de mesure) :

$$f_i = -R v_{ia} \quad (14.3)$$

Si on prend la transformée de Fourier de ces équations (avec $p_a(t) \Leftrightarrow p(\omega)$, $v_{ia}(t) \Leftrightarrow v_i(\omega)$, $\rho_a(t) \Leftrightarrow \rho(\omega)$), on obtient :

$$i\omega \rho(\omega) + \rho_0 \partial_i v_i(\omega) = 0 \quad (14.4)$$

$$i\omega \rho_0 v_i(\omega) + \partial_i p(\omega) - R v_i(\omega) = 0 \quad (14.5)$$

Modifions maintenant la relation de proportionnalité entre fluctuation de pression (p_a) et fluctuation de masse volumique (ρ_a) (Equation 4.8) de manière à introduire une hystérèse dans la réponse à une compression/dilatation. Cette hystérèse représente les phénomènes irréversibles associés aux échanges thermiques entre le fluide et le matériau solide, au niveau des petites cavités. La manière la plus simple de représenter ce phénomène consiste à ajouter un terme similaire à la viscosité de volume, prenant la forme suivante :

$$p_a(t) = c_0^2 \rho_a(t) - K \frac{\partial \rho_a(t)}{\partial t} \quad (14.6)$$

où c_0 désigne la vitesse du son dans le fluide et où le coefficient K caractérise la déperdition d'énergie potentielle du fluide liée aux échanges thermiques. En régime harmonique cette relation devient :

$$p(\omega) = c_0^2 \rho(\omega) - i\omega K \rho(\omega) \quad (14.7)$$

Il est alors aisé d'éliminer ρ et v_i pour obtenir une équation ne portant que

sur la pression $p(\omega)$:

$$\rho(\omega) = \frac{p(\omega)}{c_0^2 - i\omega K} \quad (14.8)$$

$$v_i(\omega) = \frac{\partial_i p(\omega)}{R - i\omega\rho_0} \quad (14.9)$$

$$i\omega \frac{p(\omega)}{c_0^2 - i\omega K} + \rho_0 \partial_i \left(\frac{\partial_i p(\omega)}{R - i\omega\rho_0} \right) = 0 \quad (14.10)$$

En réarrangeant les termes et en multipliant par $(R - i\omega\rho_0)/\rho_0$, on obtient finalement

$$\frac{i\omega R/\rho_0 + \omega^2}{c_0^2 - i\omega K} p(\omega) + \partial_{ii} p(\omega) = 0 \quad (14.11)$$

soit encore :

$$\frac{1 + \frac{iR}{\omega\rho_0}}{1 - i\omega K/c_0^2} k^2 p(\omega) + \Delta p(\omega) = 0 \quad (14.12)$$

avec $k = \omega/c_0$. La pression obéit donc à une équation de Helmholtz *modifiée* lorsque l'on tient compte des phénomènes dissipatifs ; le nombre d'onde, complexe :

$$\tilde{k} = k \sqrt{\frac{1 + \frac{iR}{\omega\rho_0}}{1 - i\omega K/c^2}} \quad (14.13)$$

tient compte des déperditions thermique et visqueuse.

14.2 Modèles de fluide équivalent

14.2.1 Modèle de Delany et Bazley

Nous venons de voir que la propagation en milieu résistif faisait apparaître un nombre d'onde modifié \tilde{k} . La propagation du son dans les matériaux poreux à pores ouverts peut donc être étudiée en assimilant celui-ci à un fluide équivalent dont la vitesse du son est complexe et varie avec la fréquence. Un des modèles les plus simples pour calculer cette vitesse du son est le modèle

de Delany et Bazley¹ :

$$\tilde{c} = \frac{c}{\beta - i\alpha} \quad (14.14)$$

avec

$$\alpha = 1 + 0.0978 \left(\frac{R}{\rho_{air} f} \right)^{0.700} \quad (14.15)$$

et

$$\beta = 0.189 \left(\frac{R}{\rho_{air} f} \right)^{0.595} \quad (14.16)$$

Dans ces expressions f est la fréquence en Hz, ρ_{air} est la masse volumique de l'air, c est la vitesse du son dans l'air et R est la résistivité du milieu Section 14.3.2.

14.2.2 Modèle de Miki

À partir de nombreuses mesures réalisées sur des matériaux fibreux, caractérisés par des porosités proches de l'unité, Miki² propose les expressions suivantes pour l'impédance caractéristique et pour le nombre d'onde :

$$Z_c = \rho c \left[1 + 5.50 \left(10^3 \frac{f}{R} \right)^{-0.632} - j 8.43 \left(10^3 \frac{f}{R} \right)^{-0.632} \right] \quad (14.17)$$

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \left[1 + 7.81 \left(10^3 \frac{f}{R} \right)^{-0.618} - j 11.41 \left(10^3 \frac{f}{R} \right)^{-0.618} \right] \quad (14.18)$$

où ρ est la masse volumique de l'air, c la vitesse du son dans l'air et R la résistivité statique dans la direction de propagation de l'onde. Les expressions ci-dessus sont valides pour :

$$0.01 < \frac{f}{R} < 1.00 \quad (14.19)$$

1. **Delany M.E., Bazley E.N.**, *Acoustical properties of fibrous absorbent materials*, Applied Acoustics 3, 1970, pp. 105-116.

2. **Miki Y.**, *Acoustical properties of porous materials - modifications of Delany-Bazley models* J. Ac. Soc. Japan, 11(1) :19-24, 1990.

À partir de Z et k on trouve aisément les propriétés $\tilde{\rho}$ et \tilde{c} du fluide équivalent :

$$\tilde{c} = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad (14.20)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{k} \cdot Z_c}{\omega} \quad (14.21)$$

14.3 Théorie de Biot

La théorie de Biot³ Figure 14.1 fournit un cadre général pour l'étude des matériaux poreux en interaction avec un champ acoustique. Elle est basée sur les hypothèses générales suivantes :

- le milieu hétérogène (squelette-fluide) est traité comme un milieu homogène équivalent où la phase solide (le squelette) occupe une fraction $(1 - \Omega)$ du volume total alors que la phase fluide (en général de l'air) en occupe une fraction Ω ;
- le tenseur des contraintes et la pression sont définis en chaque point du milieu ;
- la longueur d'onde λ est nettement plus grande que les dimensions caractéristiques du matériau poreux (taille des pores, diamètre des fibres ou des éléments du squelette) ;
- les déplacements sont petits, de telle sorte que la théorie linéaire de l'élasticité s'applique ;
- les pores sont majoritairement ouverts et la phase fluide (air) est continue ;
- les pores fermés sont considérés comme appartenant au squelette et les éventuels effets liés au mouvement du fluide dans ces pores fermés ne sont pas pris en compte.

Les variables d'état considérées sont les déplacements u du squelette et U du fluide (modèle $u - U$). Dans un nombre important de cas les équations

3. **Maurice Anthony Biot**, né à Anvers en 1905 et décédé à New York en 1985, ingénieur belgo-américain, diplômé de l'Université catholique de Louvain puis élève de Théodore von Kármán à Caltech, a publié entre 1935 et 1962 une série d'articles fondateurs de la poro-élasticité ou mécanique des milieux poreux saturés. Cette *théorie de Biot* est aujourd'hui largement exploitée en acoustique et en mécanique des sols et des roches.



Figure 14.1: Maurice Anthony Biot (1905-1985).

pourront être écrites en termes de déplacement u et de champ de pression acoustique p (modèle $u - p$).

Dans la théorie de Biot, le matériau poreux est caractérisé par un triple ensemble de paramètres :

1. les paramètres élastiques liés au squelette :
 - module d'Young E ;
 - coefficient de Poisson ν ;
 - masse volumique du matériau constitutif du squelette ρ_s ;
 - on peut remplacer les coefficients (E, ν) par les paramètres de Lamé (λ, μ) :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (14.22)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (14.23)$$

ou les modules de cisaillement et d'élasticité isostatique (G, K) :

$$G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (14.24)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (14.25)$$

2. les paramètres acoustiques liés à la phase fluide saturant le matériau poreux :
 - masse volumique du fluide ρ_f ;
 - module de compressibilité Q (on peut, en première analyse, poser $Q = \rho_f c^2$; voir la section 14.3.8 pour une discussion plus approfondie) ;
3. des paramètres propres au poreux et caractérisant l'interaction entre phases fluide et solide :
 - porosité Ω ;
 - résistivité R ;
 - facteur de Biot α ;
 - tortuosité α_∞ .

La signification physique des paramètres Ω , R et α_∞ et leur mode de mesure seront présentés dans les sections suivantes. Le paramètre α , qui ne diffère guère de 1 dans les cas qui nous occupent, sera évoqué lors de la discussion sur l'équation constitutive de la phase fluide Section 14.3.5.

14.3.1 Porosité (Ω)

Un échantillon de matériau poreux de volume total V_t contient un volume V_f de fluide et un volume V_s de solide. La porosité Ω est alors définie par :

$$\Omega = \frac{V_f}{V_t} = 1 - \frac{V_s}{V_t} \quad (14.26)$$

La porosité peut être mesurée avec précision en plaçant un échantillon de volume V_e de matériau dans une cavité de volume V_c creusée dans un cylindre en acier Figure 14.2 dont l'épaisseur garantit une grande inertie thermique. La cavité contenant l'échantillon est scellée et un dispositif micrométrique permet de lui imposer un petit changement de volume ΔV . La pression dans la cavité évolue de p_1 à p_2 suite à ce changement de volume. Si nous supposons que le fluide interne à la cavité a subi une compression isotherme et que nous négligeons la compressibilité du squelette, nous pouvons écrire :

$$p_1 \cdot (V_c - V_e (1 - \Omega)) = p_2 (V_c - V_e (1 - \Omega) - \Delta V) \quad (14.27)$$

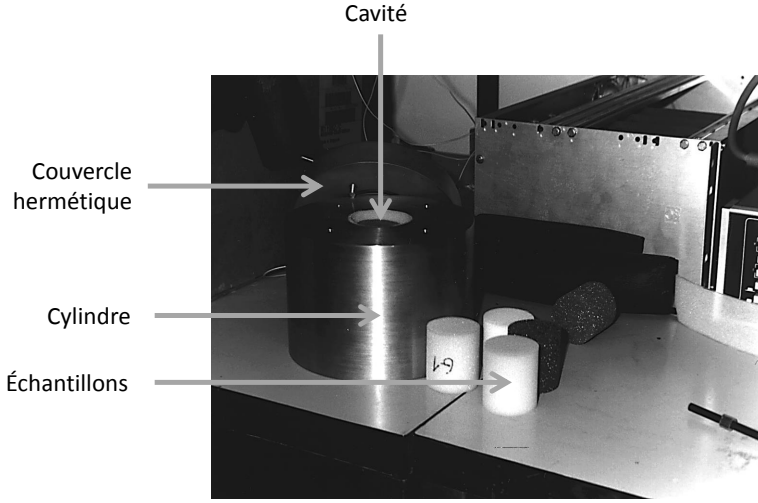


Photo prise par l'auteur au laboratoire spécialisé de la Katholieke Universiteit Leuven.

Figure 14.2: Dispositif de mesure de la porosité.

La porosité est alors égale à :

$$\Omega = \frac{p_2 \Delta V - (p_2 - p_1) (V_c - V_e)}{(p_2 - p_1) V_e} \quad (14.28)$$

14.3.2 Résistivité (R)

L'écoulement de l'air au travers d'un matériau poreux subit une résistance liée à l'interaction visqueuse entre le fluide et le squelette solide. La force visqueuse est proportionnelle à la vitesse relative du fluide par rapport à celle du squelette :

$$F_R = R (\dot{u} - \dot{U}) \quad (14.29)$$

R est la résistivité du milieu. La résistivité *statique* est mesurée (figures 14.3 et 14.4) en imposant un débit d'air $q = Sv$ au travers d'un échantillon d'épaisseur h placé dans une cellule d'essai de section droite Σ . La différence de

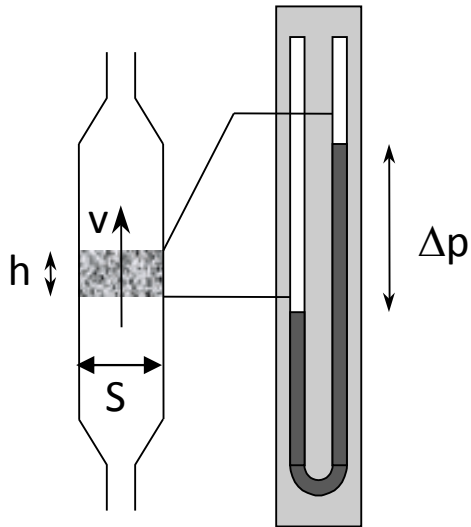


Figure 14.3: Schéma du montage expérimental pour la mesure de la résistivité.



Photo prise par l'auteur au laboratoire spécialisé de la Katholieke Universiteit Leuven.

Figure 14.4: Dispositif de mesure de la résistivité.

pression Δp entre l'amont et l'aval de l'échantillon (perte de charge) est mesurée grâce à un manomètre différentiel. La résistivité est donnée par :

$$R = \frac{\Delta p}{h\dot{U}} \quad (14.30)$$

mais la vitesse \dot{U} de l'air dans l'échantillon est supérieure à la vitesse v dans la cellule d'essai du fait de la porosité du milieu qui réduit la section utile :

$$\dot{U} = \frac{v}{\Omega} \quad (14.31)$$

La résistivité est donc donnée finalement par :

$$R = \frac{\Omega \Delta p}{h v}, \quad (14.32)$$

où R est mesurée en $\text{N.s}/\text{m}^4$ soit en Rayls/m (le *Rayl* est une unité introduite en l'honneur de Lord Rayleigh⁴, figure 14.5). La résistivité *dynamique* dépend en général de la fréquence ; la section 14.3.8 présente un modèle explicitant cette dépendance.

14.3.3 Tortuosité (α_∞)

La tortuosité mesure la complexité du chemin suivi par une particule d'air pour se déplacer d'un point à l'autre dans le milieu poreux. Biot définit la tortuosité comme le rapport entre l'énergie cinématique microscopique moléculaire du fluide non visqueux et l'énergie cinétique de l'onde macroscopique⁵.

4. **John William Strutt**, troisième **Lord Rayleigh**, né le 12 novembre 1842 à Langford Grove, Maldon, Essex, décédé le 30 juin 1919 à Witham, Essex. Si ses premiers thèmes de recherche sont très mathématiques et liés à l'optique et aux systèmes vibratoires, il s'intéresse dans un deuxième temps à pratiquement tous les domaines de la physique : son, théorie des ondes, vision des couleurs, électrodynamique, électromagnétisme, diffraction de la lumière, mécanique des fluides et hydrodynamique, cavitation, viscosité, capillarité, élasticité et photographie. Sa monumentale *Theory of Sound* publiée en deux volumes en 1877-1878, et rédigée pratiquement d'une traite, à l'occasion d'une croisière en Égypte, est un texte fondateur de l'acoustique en tant que science. Il reçoit le prix Nobel de physique en 1904 pour sa découverte de l'argon.

5. Pour ce paragraphe nous utilisons systématiquement la référence : **Lauriks W. et al.**, *Determination of the tortuosity of porous materials using new air-coupled ultrasonic transducers*, 11th International FASE Symposium, Valencia, 1994.

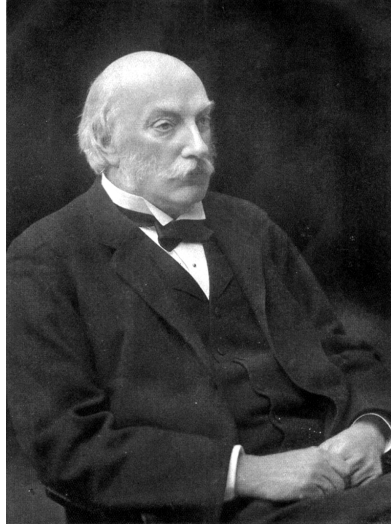


Figure 14.5: John William Strutt, troisième Lord Rayleigh.

Deux méthodes de mesures, l'une électrique et l'autre ultrasonore, sont disponibles pour la tortuosité.

La **méthode électrique** consiste à placer l'échantillon dans une colonne de liquide conducteur de section droite S dans laquelle deux électrodes font circuler un courant I (figures 14.6 et 14.8). On mesure la différence de potentiel V_1 entre deux électrodes situées aux positions verticales x_4 et x_5 et une différence de potentiel V_2 entre deux électrodes situées aux positions verticales x_1 et x_4 ; l'échantillon est lui placé entre les positions verticales x_2 et x_3 (en pratique x_4 est très voisin de x_3 et x_2 de x_1). Si on suppose l'échantillon saturé en électrolyte, ces différences de potentiels s'expriment comme suit en fonction de la résistivité σ_f du fluide et σ_e de l'échantillon :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{I}{S} (\sigma_f (x_4 - x_3) + \sigma_e (x_3 - x_2) + \sigma_f (x_2 - x_1)) \\ V_2 &= \frac{I}{S} \sigma_f (x_5 - x_4) \end{aligned} \quad (14.33)$$

Dont on tire aisément :

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_f} = \frac{V_2}{V_1} \frac{x_5 - x_4}{x_3 - x_2} - \frac{x_4 - x_3 + x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \quad (14.34)$$

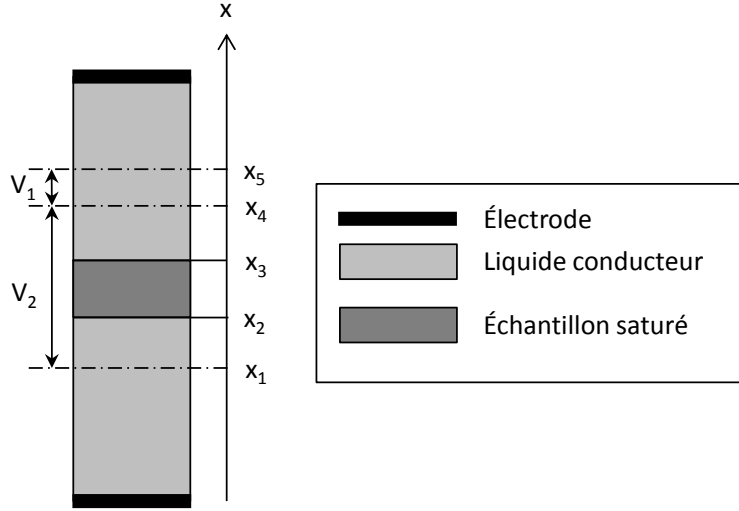


Figure 14.6: Schéma du mode de mesure électrique de la tortuosité.

On définit alors la tortuosité comme :

$$\alpha_{\infty} = \Omega \frac{\sigma_e}{\sigma_f} \quad (14.35)$$

La **méthode ultrasonore**, plus simple et plus précise, est basée sur le fait que la vitesse de propagation d'une impulsion ultrasonore au travers d'un matériau poreux dépend de la tortuosité de celui-ci. Le dispositif Figure 14.7 est constitué d'un émetteur et d'un récepteur ultrasonore ; on émet une impulsion et on mesure le signal reçu avec et sans échantillon placé entre émetteur et récepteur. La comparaison des signaux reçus permet de déterminer la valeur de la tortuosité.

14.3.4 Équations d'équilibre

L'équation d'équilibre du squelette s'écrit :

$$\partial_j \sigma_{ij}^S = (1 - \Omega) \rho_s \ddot{u}_i + f_i^{FS} \quad (14.36)$$



Photo prise par l'auteur au laboratoire spécialisé de la Katholieke Universiteit Leuven.

Figure 14.7: Dispositif de mesure de la tortuosité : méthode ultrasonore.

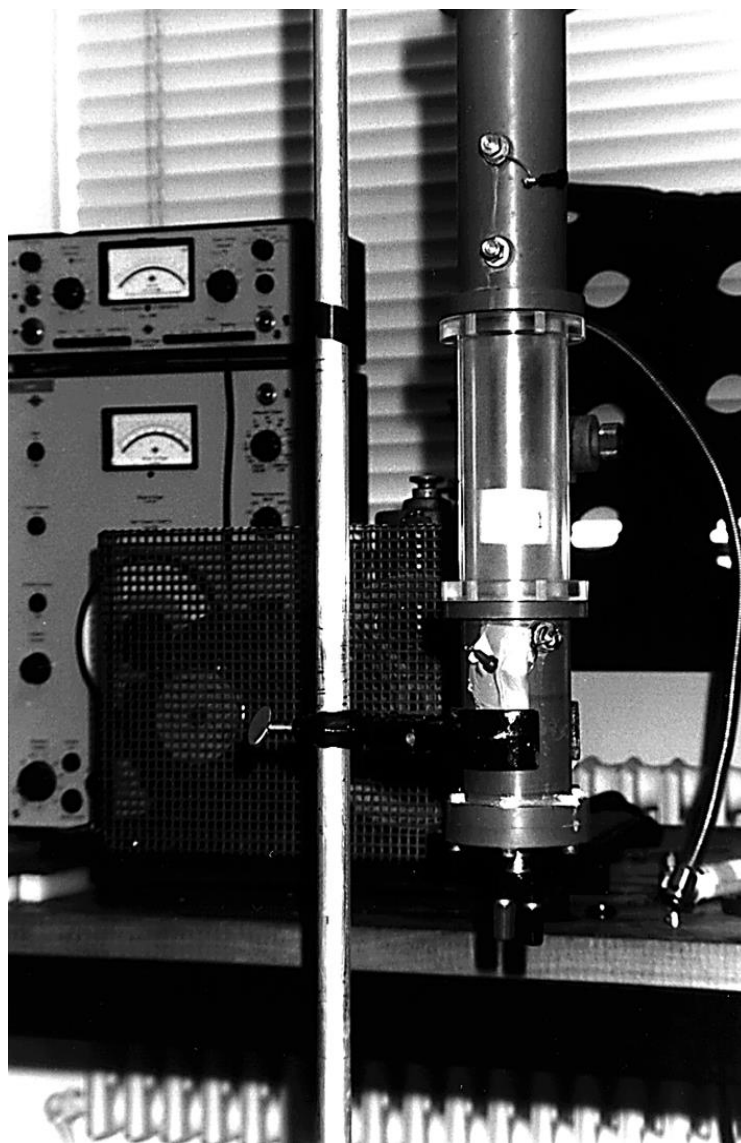


Photo prise par l'auteur au laboratoire spécialisé de la Katholieke Universiteit Leuven.

Figure 14.8: Dispositif de mesure de la tortuosité : méthode électrique.

où σ_{ij}^S est le tenseur des contraintes élastiques dans le squelette et où f_I^{FS} est un terme d'interaction représentant les forces exercées par le fluide sur la structure. L'équation d'équilibre du fluide s'écrit quant à elle :

$$\partial_j \sigma_{ij}^F = \Omega \rho_f \ddot{U}_i + f_i^{SF} \quad (14.37)$$

où $\sigma_{ij}^F = -\Omega p \delta_{ij}$ est le tenseur des contraintes isotropes dans le fluide et où f_i^{SF} est un terme d'interaction représentant la force exercée par le squelette sur le fluide.

Le terme d'interaction fluide-structure $f_i^{FS} = -f_i^{SF}$ est la somme de deux composantes. La première représente les forces visqueuses résultant de la différence de vitesse entre le squelette et le fluide et est proportionnelle à cette différence. La seconde, de type inertiel, est proportionnelle à la différence d'accélération. Le terme d'interaction s'écrit donc globalement :

$$f_i^{SF} = -f_i^{FS} = \rho_{12} (\ddot{u}_i - \ddot{U}_i) - \tilde{b} (\dot{u}_i - \dot{U}_i) \quad (14.38)$$

Les constantes ρ_{12} et \tilde{b} dérivent des paramètres classiques de Biot :

$$\rho_{12} = \Omega \rho_f (1 - \alpha_\infty) \quad (14.39)$$

$$\tilde{b} = \Omega R \quad (14.40)$$

Si on fait l'hypothèse d'un comportement harmonique, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\partial_j \sigma_{ij}^S + \underbrace{\left[\underbrace{(1 - \Omega) \rho_s - \rho_{12}}_{\rho_{11}} - \frac{i\omega \tilde{b}}{\omega^2} \right]}_{\tilde{\rho}_{11}} \omega^2 u_i + \underbrace{\left[\rho_{12} + \frac{i\omega \tilde{b}}{\omega^2} \right]}_{\tilde{\rho}_{12}} \omega^2 U_i = 0 \quad (14.41)$$

$$\partial_j \sigma_{ij}^F + \underbrace{\left[\underbrace{\Omega \rho_f - \rho_{12}}_{\rho_{22}} - \frac{i\omega \tilde{b}}{\omega^2} \right]}_{\tilde{\rho}_{22}} \omega^2 U_i + \underbrace{\left[\rho_{12} + \frac{i\omega \tilde{b}}{\omega^2} \right]}_{\tilde{\rho}_{12}} \omega^2 u_i = 0 \quad (14.42)$$

soit encore :

$$\partial_j \sigma_{ij}^S + \tilde{\rho}_{11} \omega^2 u_i + \tilde{\rho}_{12} \omega^2 U_i = 0 \quad (14.43)$$

$$\partial_j \sigma_{ij}^F + \tilde{\rho}_{22} \omega^2 U_i + \tilde{\rho}_{12} \omega^2 u_i = 0 \quad (14.44)$$

Notons que :

$$\tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}_{22} = \Omega \rho_f \quad (14.45)$$

En remplaçant σ_{ij}^F par sa définition en termes de pression (p), la seconde équation devient :

$$-\Omega \partial_i p + \tilde{\rho}_{22} \omega^2 U_i + \tilde{\rho}_{12} \omega^2 u_i = 0 \quad (14.46)$$

soit :

$$U_i = \frac{\Omega}{\tilde{\rho}_{22} \omega^2} \partial_i p - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_i \quad (14.47)$$

On peut alors remplacer U par p dans la première équation d'équilibre :

$$\partial_j \sigma_{ij}^S + \omega^2 \underbrace{\left[\tilde{\rho}_{11} - \frac{\tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}} \right]}_{\tilde{\rho}} u_i + \frac{\Omega \tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \partial_i p = 0 \quad (14.48)$$

soit encore :

$$\partial_j \sigma_{ij}^S + \omega^2 \tilde{\rho} u_i + \frac{\Omega \tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \partial_i p = 0 \quad (14.49)$$

14.3.5 Relations constitutives

Fluide acoustique

Pour le fluide acoustique la relation constitutive exprime le fait que la variation de pression dans un échantillon infinitésimal est liée à la déformation volumétrique de l'échantillon et au flux net de fluide au travers de celui-ci. Ceci s'exprime de la manière suivante :

$$-p = Q \epsilon_V + \alpha Q \epsilon_S, \quad (14.50)$$

où

- Q est le module de compressibilité adiabatique du fluide ;
- $\epsilon_V = \Omega \partial_j (U_j - u_j)$ est le flux de matière au travers de l'échantillon ;
- $\epsilon_S = \partial_j u_j$ est la déformation volumétrique de l'échantillon ;
- α est le paramètre de Biot que nous considérerons égal à l'unité.

Cette première équation constitutive s'écrit généralement :

$$-\Omega p = \underbrace{Q\Omega^2}_{\tilde{R}} \partial_j U_j + \underbrace{\Omega Q(\alpha - \Omega)}_{\tilde{Q}} \partial_j u_j, \quad (14.51)$$

soit

$$-\Omega p = \tilde{R} \partial_j U_j + \tilde{Q} \partial_j u_j. \quad (14.52)$$

Squelette élastique

La relation constitutive pour le squelette élastique décompose le tenseur des contraintes en deux composantes : la pression du fluide et les contraintes solides. Elle s'écrit :

$$\sigma_{ij}^S = \sigma_{ij} - (-\Omega p) \delta_{ij}, \quad (14.53)$$

avec

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda + \alpha^2 Q \right) \partial_k u_k \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} + \alpha \Omega Q \partial_k (U_k - u_k) \delta_{ij}, \quad (14.54)$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé.

Combinaison des deux relations constitutives

Les deux relations constitutives peuvent être combinées pour donner successivement :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^S &= \left(\lambda + \alpha^2 Q \right) \partial_k u_k \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} + \alpha \Omega Q \left(\partial_k (U_k - u_k) \right) \delta_{ij} \\ &- Q\Omega^2 \partial_k U_k \delta_{ij} - \Omega Q (\alpha - \Omega) \partial_k u_k \delta_{ij} \\ &= \left(\lambda + \alpha^2 Q \right) \partial_k u_k \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} + \left(\alpha \Omega Q - \Omega^2 Q \right) \partial_k U_k \delta_{ij} \\ &+ \left(\Omega^2 Q - 2\alpha \Omega Q \right) \partial_k u_k \delta_{ij} \\ &= \underbrace{\left(\lambda + Q(\alpha - \Omega)^2 \right)}_{\tilde{A}} \partial_k u_k \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} + \underbrace{\Omega Q (\alpha - \Omega)}_{\tilde{Q}} \partial_k U_k \delta_{ij} \\ &= \tilde{A} \partial_k u_k \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} + \tilde{Q} \partial_k U_k \delta_{ij} \end{aligned} \quad (14.55)$$

Élimination du déplacement U

U peut être éliminé des équations constitutives. Partant de la relation pour le fluide, on peut écrire :

$$\partial_k U_k = -\frac{\Omega}{\tilde{R}} p - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \partial_k u_k \quad (14.56)$$

ce qui, introduit dans la relation pour la phase solide, donne :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^S &= \tilde{A} \partial_k u_k \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}} \partial_k u_k \delta_{ij} - \frac{\tilde{Q}\Omega}{\tilde{R}} p \delta_{ij} \\ &= \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}} \right) \partial_k u_k \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - \frac{\tilde{Q}\Omega}{\tilde{R}} p \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (14.57)$$

mais :

$$\frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} = \frac{\Omega Q (\alpha - \Omega)}{\Omega^2 Q} = \frac{\alpha - \Omega}{\Omega} \quad (14.58)$$

et :

$$\tilde{A} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}} = \left(\lambda + Q (\alpha - \Omega)^2 \right) - \frac{\Omega^2 Q^2 (\alpha - \Omega)^2}{\Omega^2 Q} = \lambda \quad (14.59)$$

de telle sorte que :

$$\sigma_{ij}^S = \underbrace{\lambda \partial_k u_k \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}}_{\tilde{\sigma}_{ij}^S} - (\alpha - \Omega) p \delta_{ij} \quad (14.60)$$

$\tilde{\sigma}_{ij}^S$ est le tenseur des contraintes qui existerait dans un solide élastique fait du même matériau que le squelette et subissant les mêmes déformations.

14.3.6 Modèle u - p pour les poro-élastiques

Phase solide

Introduisons l'équation 14.60 dans l'équation 14.49 :

$$\partial_j \hat{\sigma}_{ij}^S + \omega^2 \tilde{\rho} u_i + \underbrace{\left(\frac{\Omega \tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - (\alpha - \Omega) \right)}_{\tilde{\gamma}} \partial_i p = 0 \quad (14.61)$$

soit :

$$\partial_j \hat{\sigma}_{ij}^S + \omega^2 \tilde{\rho} u_i + \tilde{\gamma} \partial_i p = 0 \quad (14.62)$$

ce qui est l'équation d'équilibre d'un solide élastique de masse volumique $\tilde{\rho}$ munie d'un terme additionnel couplant la déformation du squelette à la pression dans les pores. Notons que :

$$\tilde{\gamma} = \frac{\Omega \tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - (\alpha - \Omega) = \Omega \left(\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} + 1 \right) - \alpha = \frac{\Omega^2 \rho_f}{\tilde{\rho}_{22}} - \alpha \quad (14.63)$$

Phase fluide

Prenons la divergence de l'équation 14.47 :

$$\partial_i U_i = \frac{\Omega}{\tilde{\rho}_{22} \omega^2} \partial_{ii} p - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \partial_i u_i \quad (14.64)$$

et résolvons l'équation 14.52 pour $\partial_i U_i$:

$$\partial_i U_i = -\frac{\Omega}{\tilde{R}} p - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \partial_i u_i \quad (14.65)$$

En égalisant le membre de droite de chaque équation, après multiplication par $\omega^2 \Omega$, on obtient :

$$\frac{\Omega^2}{\tilde{\rho}_{22}} \partial_{ii} p + \omega^2 \frac{\Omega^2}{\tilde{R}} p - \omega^2 \underbrace{\left(\frac{\Omega \tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{\Omega \tilde{Q}}{\tilde{R}} \right)}_{\tilde{\gamma}} \partial_i u_i = 0 \quad (14.66)$$

soit

$$\frac{\Omega^2}{\tilde{\rho}_{22}} \partial_{ii} p + \omega^2 \frac{\Omega^2}{\tilde{R}} p - \omega^2 \tilde{\gamma} \partial_i u_i = 0 \quad (14.67)$$

14.3.7 Ondes en milieu poro-élastique

Il est intéressant de dériver les solutions de type onde plane pour un milieu décrit par les équations de Biot. Une solution de type onde plane est une solution où toutes les variables dépendent de façon harmonique du temps et d'une direction de l'espace, en étant indépendantes des deux autres directions. Vu le caractère isotrope des équations de Biot, nous pouvons choisir arbitrairement ces directions. En supposant que l'onde plane se propage suivant l'axe x_1 , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, x_3, t) &= \Re \left(p e^{i\omega t - ikx_1} \right) \\ u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= \Re \left(u_1 e^{i\omega t - ikx_1} \right) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= \Re \left(u_2 e^{i\omega t - ikx_1} \right) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= \Re \left(u_3 e^{i\omega t - ikx_1} \right) \end{aligned} \quad (14.68)$$

En introduisant ces expressions dans les équations de Biot, nous obtenons l'ensemble d'équations algébriques suivant :

$$\begin{aligned} -k^2(\lambda + 2\mu)u_1 + \omega^2 \tilde{\rho} u_1 - ik\tilde{\gamma}p &= 0 \\ -k^2\mu u_2 + \omega^2 \tilde{\rho} u_2 &= 0 \\ -k^2\mu u_3 + \omega^2 \tilde{\rho} u_3 &= 0 \\ -k^2 \frac{\Omega^2}{\tilde{\rho}_{22}} p + \omega^2 \frac{\Omega^2}{\tilde{R}} p + ik\omega^2 \tilde{\gamma} u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (14.69)$$

qui possède huit solutions non nulles, représentant les ondes planes susceptibles de se propager dans un milieu poreux parallèlement à x_1 . Ces solutions peuvent se grouper deux par deux, car on vérifie facilement que si k, u_1, u_2, u_3, p est solution, $-k, -u_1, u_2, u_3, p$ l'est aussi. Il existe donc quatre ondes, chacune se propageant dans le sens des x_1 positifs ou négatifs.

Ondes de cisaillement

Les deux premières solutions non nulles sont aisées à dériver, en posant $u_1 = 0$, $p = 0$ et en examinant les deuxième et troisième équations. On trouve :

- une onde de cisaillement u_2 pouvant se propager dans le sens des x_1 positifs ou négatifs :

$$u_2 = \Re\left(e^{i\omega(t \pm \frac{x_1}{c_\tau})}\right) \quad (14.70)$$

avec une vitesse de propagation $c_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$;

- une onde de cisaillement u_3 pouvant se propager dans le sens des x_1 positifs ou négatifs :

$$u_3 = \Re\left(e^{i\omega(t \pm \frac{x_1}{c_\tau})}\right) \quad (14.71)$$

avec la même vitesse de propagation c_τ ;

Contrairement aux fluides acoustiques classiques où les ondes se propagent sans amortissement et à vitesse constante, les milieux poreux sont dissipatifs (l'amplitude de l'onde diminue progressivement, ce qui s'exprime par une vitesse de propagation complexe) et dispersifs (la vitesse de l'onde dépend de sa fréquence). La dissipation, pour ces ondes de cisaillement, se fait par dissipation visqueuse car, même si la fluctuation de pression est nulle, la relation (14.47) montre que :

$$U_i = -\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_i \quad (14.72)$$

donc que le fluide ne se déplace pas de la même façon que le squelette.

Ondes de compression

Les deux autres solutions constituent deux types de compressions. Elles s'obtiennent en posant $u_2 = u_3 = 0$ puis en combinant la première et la dernière relation pour éliminer p . On a :

$$\left(\left[-k^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2 \tilde{\rho} \right] \left[\frac{-k^2}{\tilde{\rho}_{22}} + \frac{\omega^2}{\tilde{R}} \right] - \frac{k^2 \omega^2}{\Omega^2} \tilde{\gamma}^2 \right) u_1 = 0, \quad (14.73)$$

Pour que u_1 soit non nul, k doit vérifier une équation du second degré en k^2 qui possède donc deux solutions

$$k^2 = \omega^2 \frac{\Gamma \pm \sqrt{\Delta}}{2 \frac{\lambda+2\mu}{\tilde{\rho}_{22}}} \quad (14.74)$$

avec

$$\Gamma = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{22}} + \frac{\lambda + 2\mu}{\tilde{R}} + \frac{\tilde{\gamma}^2}{\Omega^2} \quad (14.75)$$

$$\Delta = \Gamma^2 - 4 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{22}} \frac{\lambda + 2\mu}{\tilde{R}} \quad (14.76)$$

On trouve donc :

- Une première onde de compression lente pouvant se propager dans le sens des x_1 positif ou négatif :

$$u_1 = \Re \left(e^{i\omega(t \pm \frac{x_1}{c_1})} \right) \quad (14.77)$$

$$p = \omega \frac{c_1 \tilde{\rho} - \frac{\lambda+2\mu}{c_1}}{\tilde{\gamma}} \quad (14.78)$$

avec une vitesse de propagation

$$c_1 = \sqrt{\frac{2(\lambda + 2\mu)}{\tilde{\rho}_{22} (\Gamma + \sqrt{\Delta})}} \quad (14.79)$$

Cette onde est appelée onde de compression *lente* ou onde de compression solide. En effet, pour des poreux classiques où le fluide saturant est léger (air), on peut montrer que cette onde est caractérisée par des déplacements solides importants et par des déplacements fluides plutôt en opposition de phase avec ces déplacements solides. Pour ce faire il faut évaluer le rapport U_1/u_1 à l'aide de la relation (14.47), mais les calculs sont assez fastidieux et ne seront pas détaillés ici. L'amortissement par phénomène visqueux est très important pour ce type d'onde, donnant lieu à une dissipation rapide, et l'effet inertiel est également important par rapport aux énergies potentielles dans le fluide et le solide, ce qui donne des vitesses de propagation plus lentes. Ces ondes sont donc peu importantes à grande distance, mais doivent être considérées pour les conditions frontières, par

exemple lors des phénomènes de réflexion et réfraction.

- Une seconde onde de compression rapide pouvant se propager dans le sens des x_1 positif ou négatif :

$$u_1 = \Re \left(e^{i\omega(t \pm \frac{x_1}{c_2})} \right) \quad (14.80)$$

$$p = \omega \frac{c_2 \tilde{\rho} - \frac{\lambda+2\mu}{c_2}}{\tilde{\gamma}} \quad (14.81)$$

avec une vitesse de propagation

$$c_2 = \sqrt{\frac{2(\lambda + 2\mu)}{\tilde{\rho}_{22} (\Gamma - \sqrt{\Delta})}} \quad (14.82)$$

Cette onde est appelée onde de compression *rapide* ou onde de compression fluide. Pour des poreux classiques où le fluide saturant est léger (air), on peut montrer que cette onde est caractérisée par des déplacements fluides plus importants et en phase avec les déplacements solides. Pour le vérifier il faut à nouveau évaluer le rapport U_1/u_1 . L'amortissement par phénomène visqueux est moins important pour ce type d'onde, tandis que le moindre déplacement solide diminue l'effet inertiel, ce qui donne des vitesses de propagation plus élevées. Ces ondes se propagent donc nettement mieux que les ondes précédentes, et constituent avec les ondes de cisaillement les ondes observables à distance des sources.

Application numérique

Afin de mieux visualiser les trois types d'ondes se propageant dans un poreux décrit par la théorie de Biot, nous appliquerons les résultats ci-dessus à un poreux typique (mousse de polyuréthane) dont les propriétés sont détaillées à la figure 14.9. Nous pouvons examiner les vitesses complexes de l'onde de cisaillement et des deux ondes de compression dans cette mousse de polyuréthane. La figure 14.10 illustre graphiquement un instantané des déplacements solides pour ces trois types d'ondes. Les déplacements sont normalisés en $x = 0$, les ondes se déplaçant dans le sens des x positifs. La figure 14.11 montre l'évolution de la vitesse en fonction de la fréquence, la partie réelle déterminant la longueur d'onde tandis que la partie imaginaire détermine la décroissance

Grandeur	Symbole	Valeur	Unité
Module de Young	E	$2 \cdot 10^5$	[Pa]
Coefficient de Poisson	ν	0.23	[-]
Masse volumique (solide)	ρ_S	830	[kg/m ³]
Pression moyenne*	p_0	101300	[Pa]
Masse volumique (fluide)*	ρ_F	1.225	[kg/m ³]
Viscosité*	η	$1.82 \cdot 10^{-5}$	[Ns/m ²]
Conductibilité thermique*	λ	0.0256	[Wm ⁻¹ K ⁻¹]
Chaleurs spécifiques :			
à pression constante*	c_p	1004	[Pa]
à volume constant*	c_v	716	[Pa]
Porosité	Ω	0.98	[-]
Résistivité statique*	R_0	$22 \cdot 10^3$	[Nm ⁻⁴ s]
Tortuosité	α_∞	1.2	[-]
Longueurs caractéristiques :			
Visqueuse*	Λ_v	$1.7 \cdot 10^{-5}$	[m]
Thermique*	Λ_t	$4 \cdot 10^{-5}$	[m]

Figure 14.9: Propriétés matérielles de la mousse de polyuréthane. Les grandeurs marquées d'une (*) sont utilisées dans le micro-modèle décrit à la section 14.3.8

d'amplitude par unité de longueur.

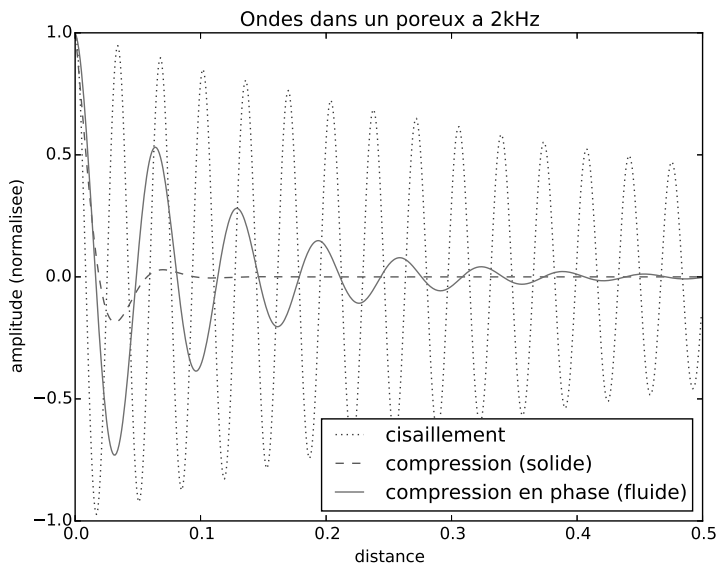


Figure 14.10: Trois types d'ondes planes dans un poreux à squelette flexible : l'onde de compression *lente* est vite amortie, les ondes de compression *rapide* et de cisaillement se propagent sur des distances plus importantes. La fréquence est de 2 kHz.

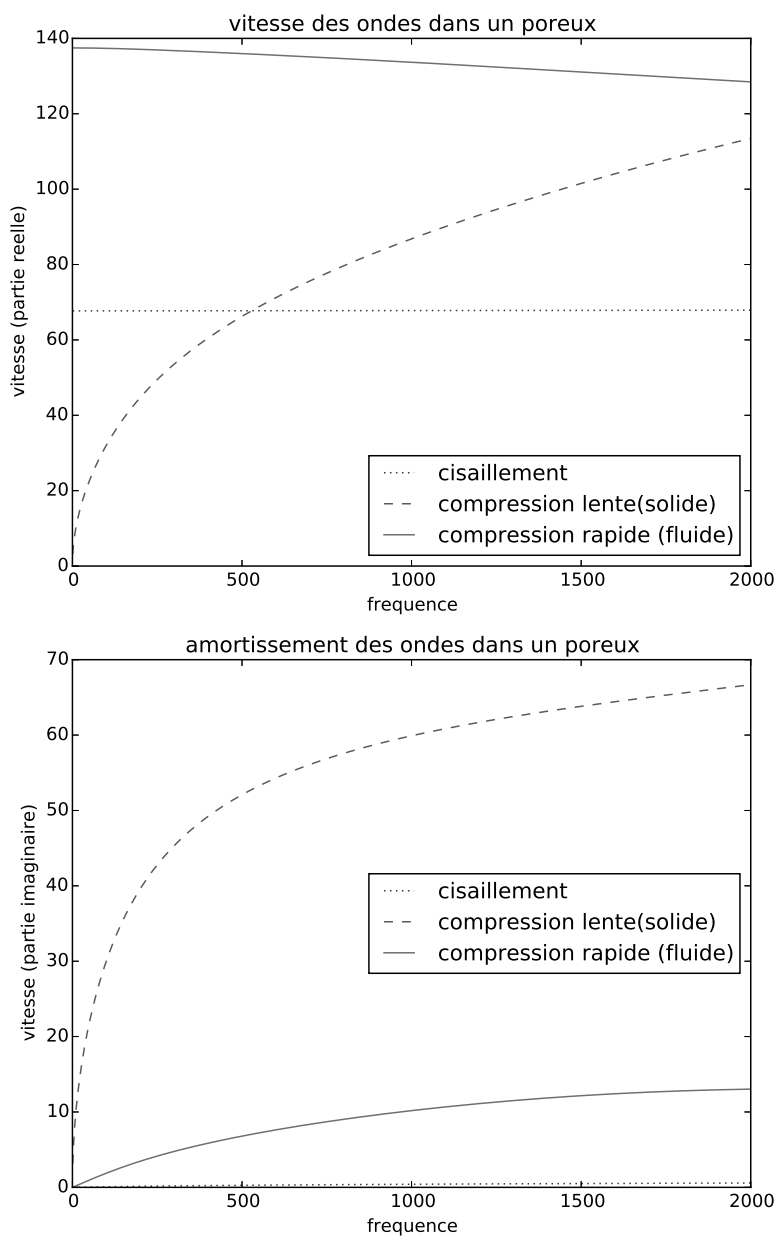


Figure 14.11: Vitesses complexes des ondes planes dans un poreux à squelette élastique. La partie réelle correspond à la vitesse de propagation, tandis que la partie imaginaire mesure l'amortissement (décroissance de l'amplitude) par unité de longueur.

14.3.8 Micro-modèles

Au niveau microscopique un matériau poreux apparaît comme un réseau complexe de pores et de canaux. Les effets visqueux et thermiques ont une forte influence sur le module de compressibilité Q et sur la résistivité R . La dépendance fréquentielle de ces grandeurs s'exprime au travers de micro-modèles adaptés. Nous présentons ici le modèle le plus classique (modèle Johnson-Champoux-Allard⁶).

$$R = R_0 \sqrt{1 + i\omega \frac{4\alpha_\infty^2 \eta \rho_f}{(R_0 \Lambda_v)^2}} \quad (14.83)$$

$$Q = \gamma p_0 \left(\gamma - \frac{\gamma - 1}{1 + \frac{8\eta}{i\omega B^2 \rho_f \Lambda_t^2} \sqrt{1 + \frac{\omega B^2 \rho_f \Lambda_t^2}{16\eta}}} \right)^{-1} \quad (14.84)$$

où (les valeurs indiquées sont valables pour l'air aux conditions standards) :

- $p_0 = Q_0$ est la pression atmosphérique (101325 Pa) ;
- γ est le rapport des chaleurs spécifiques à pression (c_p) et volume (c_v) constants (1.4 [-]) ;
- $B^2 = \frac{\eta c_p}{\lambda}$ est le nombre de Prandtl (0.71 [-]) ;
- η est la viscosité dynamique du fluide ($1.84 \cdot 10^{-5} \text{ N s/m}^2$) ;
- Λ_t est la longueur caractéristique thermique ([m]) ;
- Λ_v est la longueur caractéristique visqueuse ([m]) ;
- R_0 est la résistivité statique ($[Nm^{-4}s]$).

Les deux longueurs caractéristiques donnent les dimensions moyennes des pores, respectivement des points de vue thermique et visqueux :

- Λ_t est le double du rapport du volume d'air contenu dans les pores ouverts à leur surface mouillée :

$$\Lambda_t = \frac{2 \int_{V_p} dV_p}{\int_{S_p} dS_p} \quad (14.85)$$

elle représente l'échelle caractéristique à laquelle se produisent les phénomènes de dissipation thermique.

6. Voir le livre de référence de **Jean-François Allard** : *Propagation of sound in porous media*, Elsevier Applied Science, 1993. Des modèles plus élaborés ont été proposés depuis, notamment les modèles appelés Johnson-Champoux-Allard-Lafarge et Johnson-Champoux-Allard-Pride-Lafarge (JCAPL).

– Λ_v est définie comme suit :

$$\Lambda_v = \frac{2 \int_{V_p} |v|^2 dV_p}{\int_{S_p} |v|^2 dS_p} \quad (14.86)$$

où v est le champ de vitesse macroscopique dans le fluide équivalent. Λ_v représente l'échelle caractéristique à laquelle se produisent les phénomènes de dissipation visqueuse.

On peut noter qu'à très basse fréquence le module de compressibilité du fluide (Q_0) tend vers sa valeur en conditions isothermes (p_0) alors qu'à haute fréquence il tend vers sa valeur en condition adiabatique (γp_0).

Mise en œuvre des matériaux poro-élastiques

14.4

14.4.1 Effet limité des poreux ouverts

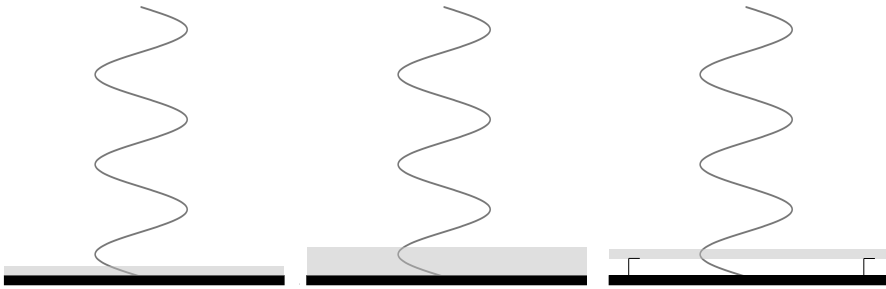


Figure 14.12: Paroi rigide couverte d'un matériau poreux ouvert. À gauche : couche mince ($< \frac{\lambda}{4}$) posée à même la paroi. Au milieu : couche plus épaisse ($> \frac{\lambda}{4}$) posée à même la paroi. À droite : couche mince ($< \frac{\lambda}{4}$) placée à une distance $\frac{\lambda}{4}$ de la paroi rigide. La courbe ondulatoire représente schématiquement la variation de la vitesse acoustique dans la direction perpendiculaire à la paroi (onde plane, incidence normale).



Figure 14.13: Sandwich poro-élastique : couche de base (typiquement acier ou aluminium), couche poreuse et couche imperméable *lourde*.

La dissipation d'énergie dans un matériau poreux est proportionnelle à la vitesse du fluide en son sein. La vitesse du fluide devant être nulle au droit d'une surface rigide, la dissipation dans un matériau poreux placé sur une telle paroi ne deviendra significative que lorsque l'épaisseur de matériau sera au moins égale à un quart de longueur d'onde Figure 14.12. Pour les couches minces, un certain gain peut être obtenu en éloignant le matériau de la paroi.

14.4.2 Sandwichs poro-élastiques

Pour maximiser la dissipation au sein du matériau poreux, on le met souvent en œuvre dans un matériau multicouche. Dans l'industrie des transports (aéronautique, automobile, ferroviaire) on traitera par exemple les parois métalliques nues (acier, alu) en leur appliquant une couche de matériau poreux recouverte d'un matériau élastique imperméable qualifié de *couche lourde* Figure 14.13.

L'efficacité de ce type de matériau résulte de la combinaison de plusieurs mécanismes, modélisables par la théorie de Biot, dont nous donnons ci-dessous une description phénoménologique sommaire.

La couche de poreux étant élastique, l'ensemble des trois couches forme un système masses-ressort qui assure un découplage entre la couche de base et la couche lourde Figure 14.14. La nature du matériau poreux et son épaisseur ainsi que la masse des deux couches externes déterminent la fréquence de résonance du système. À basse fréquence le déplacement de la couche lourde sera plus important que celui de la couche de base (amplification dynamique) alors que, à plus haute fréquence, il deviendra plus faible et tendra vers zéro (atténuation dynamique). Le sandwich poro-élastique apporte donc, à partir

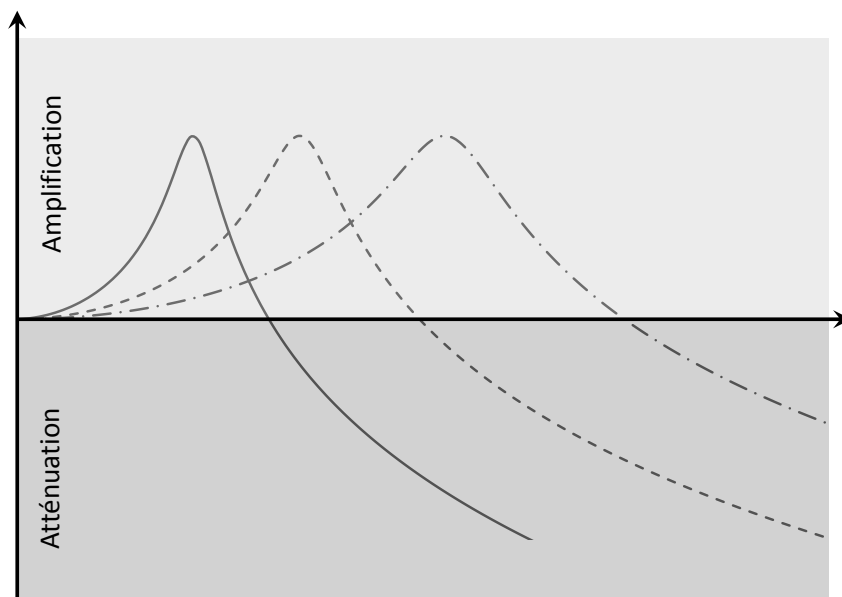


Figure 14.14: Effet d'isolation vibratoire des sandwichs poro-élastiques : suivant les propriétés des matériaux, la fréquence de résonance du système masse-poreux-masse sera différente et l'atténuation vibratoire commencera à une fréquence plus ou moins élevée.

d'une certaine fréquence, un effet d'isolation vibratoire : les vibrations de la couche lourde sont plus faibles que celles de la couche de base.

Les couches externes subissant des déplacements différents, des zones de surpression et de dépression se forment dans le poreux y créant un écoulement alterné horizontal Figure 14.15. Ce déplacement dans le plan conduit à une dissipation visqueuse importante du fait de la résistivité du milieu.

La couche lourde est en général constituée d'un matériau plus dissipatif que la couche de base. Imaginons un panneau sandwich excité par un mouvement vertical imposé sur son pourtour Figure 14.16. Les vibrations de la couche lourde seront plus amorties que celles de la couche de base ; le rayonnement acoustique associé sera donc plus faible côté traité que côté couche de base nue.

Les trois effets décrits ci-dessus (isolation vibratoire, dissipation visqueuse liée

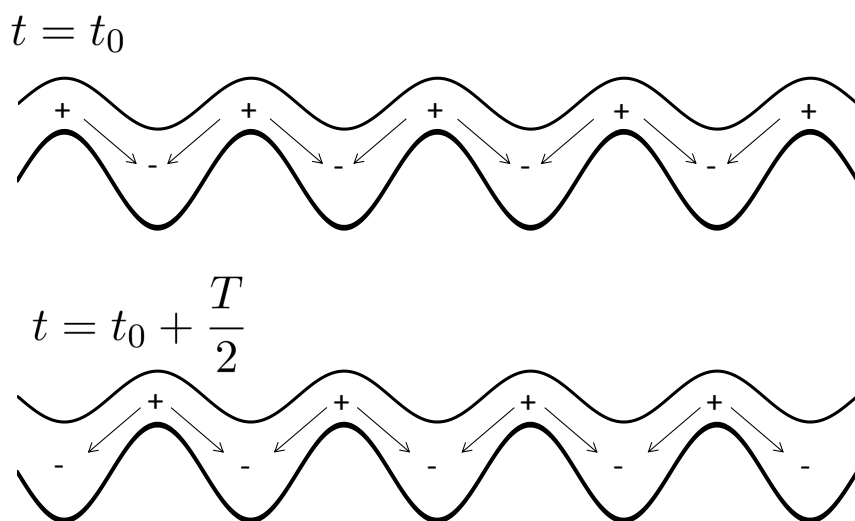


Figure 14.15: Écoulement alterné horizontal dans le poreux.

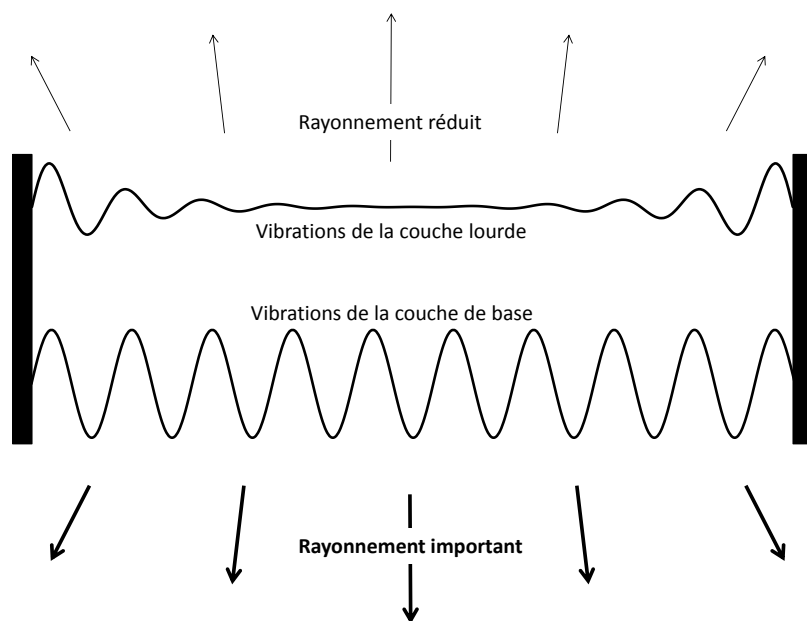


Figure 14.16: Rayonnement comparé de la couche lourde et de la couche de base.

à l'écoulement alterné horizontal dans la couche poreuse et efficacité de rayonnement réduite de la couche lourde) expliquent collectivement la performance et l'ubiquité des matériaux sandwichs poro-élastiques dans de nombreuses applications.

15

PROPAGATION CONVECTÉE

Contents

15.1	Propagation du son en écoulement constant	330
15.2	Propagation du son en écoulement potentiel	342
15.3	Propagation du son en écoulement quelconque	347
15.4	Application à un moteur d'avion	353

Au chapitre 4 nous avons, très tôt dans le développement de l'équation d'onde, fait l'hypothèse que le fluide acoustique était globalement au repos et que le seul mouvement était une oscillation locale liée à la propagation des ondes sonores. Cette hypothèse, classique et valable pour une large classe de problèmes, est toutefois inadéquate dans de nombreuses autres applications où la *convection* du son par le mouvement du fluide est importante : propagation du son dans une ligne d'échappement ou un circuit de climatisation, bruit rayonné par un moteur d'avion, propagation atmosphérique avec prise en compte de l'effet du vent...

Dans ce chapitre, nous étudierons la propagation du son dans un fluide en mouvement. La difficulté consistera à séparer les grandeurs liées à l'écoulement sous-jacent (variables hydrodynamiques) des grandeurs proprement acoustiques. Trois modèles de complexités croissantes seront présentés : le cas d'un écoulement uniforme puis le cas où l'écoulement du fluide est irrotationnel et enfin le cas général d'un écoulement sous-jacent quelconque.

Propagation du son dans un fluide

15.1 en écoulement constant

15.1.1 Équation d'onde convectée

Reprenons le raisonnement de la section 4.1 mais en conservant une vitesse moyenne non nulle pour le fluide :

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \quad \text{avec} \quad p_a \ll p_0 \\ \rho &= \rho_0 + \rho_a \quad \text{avec} \quad \rho_a \ll \rho_0 \\ v_i &= v_{i0} + v_{ia} \quad \text{avec} \quad v_{ia} \ll v_{i0} \end{aligned} \tag{15.1}$$

Introduisons cette décomposition dans les équations de continuité et d'Euler (équations 4.1 et 4.2) homogènes ($q = 0$). Si nous linéarisons d'emblée et

prenons en compte le caractère constant, dans l'espace et le temps, de p_0 , ρ_0 et v_{i0} nous obtenons :

$$\partial_t \rho_a + \partial_i (\rho_0 v_{ia} + \rho_a v_{i0}) = 0 \quad (15.2)$$

$$\rho_0 \partial_t v_{ia} + \rho_0 v_{j0} \partial_j v_{ia} + \partial_i p_a = 0 \quad (15.3)$$

Utilisons encore la relation de proportionnalité entre p_a et ρ_a :

$$p_a = c_0^2 \rho_a \quad (15.4)$$

où c_0 désigne la vitesse du son dans le fluide au repos ; on trouve alors :

$$\frac{1}{c_0^2} (\partial_t p_a + v_{i0} \partial_i p_a) + \rho_0 \partial_i v_{ia} = 0 \quad (15.5)$$

$$\rho_0 (\partial_t v_{ia} + v_{j0} \partial_j v_{ia}) + \partial_i p_a = 0 \quad (15.6)$$

Introduisons l'opérateur de dérivée matérielle D_t :

$$D_t = \partial_t + v_{i0} \partial_i \quad (15.7)$$

qui permet d'écrire les deux équations sous la forme :

$$\frac{1}{c_0^2} D_t p_a + \rho_0 \partial_i v_{ia} = 0 \quad (15.8)$$

$$\rho_0 D_t v_{ia} + \partial_i p_a = 0 \quad (15.9)$$

On peut alors prendre la dérivée matérielle de la première équation et la divergence de la seconde :

$$\frac{1}{c_0^2} D_{tt} p_a + \rho_0 D_t \partial_i v_{ia} = 0 \quad (15.10)$$

$$\rho_0 \partial_i D_t v_{ia} + \partial_{ii} p_a = 0 \quad (15.11)$$

L'écoulement étant constant, les opérateurs D_t et ∂_i commutent ($D_t \partial_i = \partial_i D_t$) ; on peut donc éliminer la vitesse et trouver finalement :

$$\frac{1}{c_0^2} D_{tt} p_a - \partial_{ii} p_a = 0 \quad (15.12)$$

On peut développer cette équation en notant que :

$$D_{tt} = (\partial_t + v_{i0}\partial_i)^2 = \partial_{tt} + 2v_{i0}\partial_{it} + v_{i0}v_{j0}\partial_{ij} \quad (15.13)$$

L'équation d'onde convectée, sous écoulement uniforme, s'écrit donc :

$$\left(\delta_{ij} - \frac{v_{0i}v_{0j}}{c_0^2}\right) \partial_{ij}p_a - \frac{2v_{i0}}{c_0^2} \partial_{it}p_a - \frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}p_a = 0 \quad (15.14)$$

On peut prendre la transformée de Fourier de cette équation d'onde pour obtenir une équation de Helmholtz convectée ($p_a(t) \Leftrightarrow P_a(\omega)$) :

$$\left(\delta_{ij} - \frac{v_{0i}v_{0j}}{c_0^2}\right) \partial_{ij}P_a - \frac{2i\omega v_{j0}}{c_0^2} \partial_j P_a + \frac{\omega^2}{c_0^2} P_a = 0 \quad (15.15)$$

Pour un écoulement sous-jacent aligné sur l'axe x on trouve enfin :

$$\beta^2 \frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_a}{\partial z^2} - \frac{2i\omega M}{c_0} \frac{\partial P_a}{\partial x} + \frac{\omega^2}{c_0^2} P_a = 0 \quad (15.16)$$

en introduisant le nombre de Mach¹ $M = \frac{|v_0|}{c_0}$ et le coefficient $\beta^2 = 1 - M^2$.

15.1.2 Résonance acoustique d'un pneu

L'air contenu dans un pneumatique forme, si on néglige la déformation locale liée à l'écrasement du pneu sur la route, une cavité toroïdale. D'un point de vue acoustique on peut assimiler cette cavité, à basse fréquence, à un conduit cylindrique dont la longueur ℓ est la circonférence du pneu mesurée à mi-hauteur du flanc. Par exemple, pour un pneu de référence 195/65R15, la largeur du pneu est de 195 mm, la hauteur du flanc représente 65% de cette largeur et le diamètre de la jante est de 15 pouces ; la longueur du tube équivalent est donc de :

$$\ell = 2\pi \times \left(\frac{15}{2} \times \frac{2.54}{100} + \frac{1}{2} \times 65\% \times \frac{195}{1000} \right) = 1.59 \text{ m} \quad (15.17)$$

1. **Ernst Mach**, physicien et philosophe autrichien, né à Brno en 1838 et mort à Munich en 1916.

Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = \ell$ sont des conditions de *continuité* de la pression et de la vitesse : $p(0) = p(\ell)$ et $v(0) = v(\ell)$. Pour prendre en considération la rotation du pneu on considère que le tube est parcouru par un fluide en écoulement uniforme à la vitesse v_0 qui est la vitesse du véhicule ; l'équation de propagation s'écrit alors :

$$\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) \frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{2i\omega v_0}{c^2} \frac{dp}{dx} + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (15.18)$$

qui admet une solution du type :

$$p = Ae^{ik_1 x} + Be^{ik_2 x} \quad (15.19)$$

avec :

$$k_1 = \frac{\omega}{c - v_0} \quad (15.20)$$

$$k_2 = \frac{-\omega}{c + v_0} \quad (15.21)$$

La solution est non triviale uniquement si :

$$e^{ik_1 \ell} = 1 \rightarrow k_1 = \frac{2n\pi}{\ell} \rightarrow f = \frac{n(c - v_0)}{\ell} \quad (15.22)$$

ou si :

$$e^{ik_2 \ell} = 1 \rightarrow k_2 = \frac{2n\pi}{\ell} \rightarrow f = \frac{n(c + v_0)}{\ell} \quad (15.23)$$

On a donc, comme dans le cas sans écoulement, deux ondes se propageant dans les deux directions possibles mais la vitesse apparente du son dans le sens de l'écoulement est de $c + v_0$ alors qu'elle est de $c - v_0$ dans le sens contraire. C'est en ce sens qu'on parle de *convection* du son par l'écoulement.

Les deux premiers modes, qui apparaissent à la même fréquence et sont orthogonaux si $v_0 = 0$, sont séparés de $\Delta f = \frac{2v_0}{\ell}$. Dans l'exemple numérique ci-dessus, on trouve les valeurs suivantes de Δf :

- à 30 km/h : $f_1 = 208.6$, $f_2 = 219.1$, $\Delta f = 10.5$ Hz ;
- à 60 km/h : $f_1 = 203.3$, $f_2 = 224.3$, $\Delta f = 21.0$ Hz ;
- à 120 km/h : $f_1 = 192.9$, $f_2 = 234.8$, $\Delta f = 41.9$ Hz.

Ces premiers modes de la cavité toroïdale sont importants dans l'étude de la liaison véhicule-route. Ils sont notamment excités lors du passage du véhicule sur un joint routier et, la pression dans le pneu y devenant infinie, ils

rigidifient considérablement la liaison au sol créant une composante de bruit caractéristique dans l'habitacle aux fréquences correspondantes. On voit clairement dans une expérience de *run-up* (on mesure le bruit dans le véhicule qui est placé sur des tambours dont la vitesse de roulement augmente progressivement) deux raies spectrales s'écartant progressivement l'une de l'autre.

15.1.3 Transformation de Prandtl-Glauert

Dans le domaine du temps

Reprenons l'équation 15.16 pour un écoulement aligné sur l'axe x :

$$\beta^2 \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial z^2} - \frac{2|v_0|}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0 \quad (15.24)$$

Appliquons alors la transformation de *Prandtl-Glauert*² :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\beta} \\ \eta &= y \\ \zeta &= z \\ \tau &= \beta t + \frac{v_0 x}{\beta c_0^2} \end{aligned} \quad (15.25)$$

On trouve successivement :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{v_0}{\beta c_0^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} \quad (15.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \beta \frac{\partial p}{\partial \tau} \quad (15.27)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{2v_0}{\beta^2 c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \tau} + \left(\frac{v_0}{\beta c_0^2} \right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \quad (15.28)$$

2. **Ludwig Prandtl**, né en 1875 et mort en 1953, ingénieur et physicien allemand ayant fait de nombreuses contributions à la mécanique des fluides et des solides.

Hermann Glauert, né en 1892 et mort en 1934, aérodynamicien anglais. La transformée était enseignée par Prandtl depuis de nombreuses années quand Glauert l'a publiée pour la première fois en 1928.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{v_0}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \quad (15.29)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \quad (15.30)$$

On a par ailleurs bien évidemment :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} \quad (15.31)$$

Ce qui, substitué dans l'équation de départ, donne :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = 0 \quad (15.32)$$

L'équation d'onde convectée devient donc, grâce à cette transformation, une équation d'onde standard.

Dans le domaine des fréquences

Cette transformation peut également s'appliquer dans le domaine des fréquences, elle permet alors de transformer l'équation de Helmholtz convectée en une équation de Helmholtz standard.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\beta} \\ P_a &= P'_a e^{i \frac{\omega M x}{c_0 \beta^2}} \\ \omega' &= \frac{\omega}{\beta} \end{aligned} \quad (15.33)$$

Nous avons :

$$\frac{\partial P_a}{\partial x} = e^{i \frac{\omega M x}{c_0 \beta^2}} \left(i \frac{\omega M}{c_0 \beta^2} P'_a + \frac{\partial P'_a}{\partial x} \right), \quad (15.34)$$

$$\frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2} = e^{i \frac{\omega M x}{c_0 \beta^2}} \left(\frac{\partial^2 P'_a}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega M}{c_0 \beta^2} \frac{\partial P'_a}{\partial x} - \frac{\omega^2 M^2}{c_0^2 \beta^4} P'_a \right). \quad (15.35)$$

En introduisant ces expressions dans l'équation de Helmholtz convectée (Equation 15.16) et en divisant par l'exponentielle, on constate que le terme convec-

tif contenant $\frac{\partial P'_a}{\partial x}$ disparaît et nous obtenons :

$$\beta^2 \left(\frac{\partial^2 P'_a}{\partial x^2} - \frac{\omega^2 M^2}{c_0^2 \beta^4} P'_a \right) + \frac{\partial^2 P'_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P'_a}{\partial z^2} - \frac{2i\omega M}{c_0} i \frac{\omega M}{c_0 \beta^2} P'_a + \frac{\omega^2}{c_0^2} P'_a = 0 \quad (15.36)$$

ce qui se simplifie en :

$$\beta^2 \frac{\partial^2 P'_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P'_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P'_a}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(1 + \frac{M^2}{\beta^2} \right) P'_a = 0 \quad (15.37)$$

et finalement, en se rappelant de la définition de β , nous retrouvons l'équation de Helmholtz dans un fluide uniforme au repos

$$\frac{\partial^2 P'_a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P'_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P'_a}{\partial z^2} + k'^2 P'_a = 0 \quad (15.38)$$

avec $k' = \frac{\omega'}{c_0} = \frac{k}{\beta}$.

15.1.4 Source monopolaire en écoulement constant

Nous avons vu à la section 6.6.1 qu'un monopôle acoustique centré en $x = y = z = 0$ produisait un champ de pression de la forme :

$$P_a = \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (15.39)$$

avec $k = \frac{\omega}{c_0}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Le champ acoustique induit par un monopôle placé dans un écoulement uniforme s'écrit de la même manière dans l'espace de Prandtl-Glauert :

$$P'_a = \frac{e^{-ik'r'}}{r'} \quad (15.40)$$

avec :

$$P'_a = P_a e^{-i \frac{\omega M x}{c_0 \beta^2}} \quad (15.41)$$

$$r' = \sqrt{\frac{x^2}{\beta^2} + y^2 + z^2} \quad (15.42)$$

$$k' = \frac{\omega'}{c_0} = \frac{\omega}{\beta c_0} \quad (15.43)$$

En repassant dans l'espace normal, nous obtenons :

$$P_a = \frac{e^{\frac{-i\omega}{c_0\beta} \left(\sqrt{\frac{x^2}{\beta^2} + y^2 + z^2} - M \frac{x}{\beta} \right)}}{\sqrt{\frac{x^2}{\beta^2} + y^2 + z^2}} \quad (15.44)$$

Il est aisé de vérifier que ce champ de pression est une solution de l'équation 15.16. On constate que, par rapport au cas d'un monopôle placé dans un fluide au repos, la symétrie sphérique disparaît : la solution n'est plus la même en amont, en aval et sur le côté Figure 15.1.

15.1.5 Effet Doppler

La solution fondamentale développée ci-dessus nous permet d'étudier l'effet Doppler³, qui modifie le son perçu quand la source sonore et/ou l'observateur sont en mouvement. Imaginons une source se déplaçant à une vitesse v_s le long de l'axe x Figure 15.2, tandis qu'un observateur se déplace parallèlement à une vitesse v_o , à une distance d . Si nous attachons un repère à la source, celle-ci devient immobile dans ce repère, mais le fluide s'écoule autour d'elle avec une vitesse $-v_s$ tandis que l'observateur se déplace, par rapport à elle, à une vitesse $v_o - v_s$ et suit la trajectoire suivante :

$$\begin{aligned} x_o &= (v_o - v_s)t \\ y_o &= d \\ z_o &= 0 \end{aligned} \quad (15.45)$$

En transformant la solution 15.44 dans le domaine du temps et en utilisant la pression au point (mobile) d'observation, nous obtenons la pression instantanée

3. **Christian Andreas Doppler**, mathématicien et physicien autrichien né à Salzbourg en 1803 et mort à Venise en 1853. On utilise parfois, en francophonie, le nom d'effet Doppler-Fizeau, en hommage au physicien français **Hippolyte Fizeau**, né à Paris en 1819 et mort à Jouarre en 1896, qui le mit en évidence en optique (décalage vers le rouge des sources lumineuses s'éloignant de l'observateur).

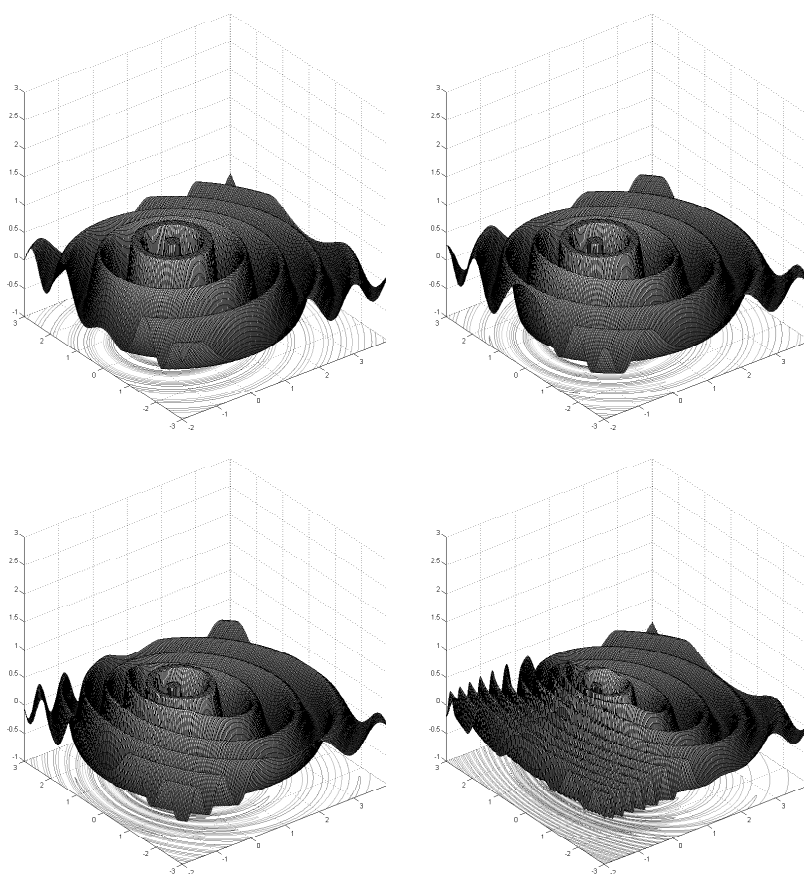


Figure 15.1: Partie réelle de la pression acoustique engendrée par un monopôle rayonnant dans un fluide en mouvement ($M = 0.0$, $M = 0.2$, $M = 0.4$ et $M = 0.6$).

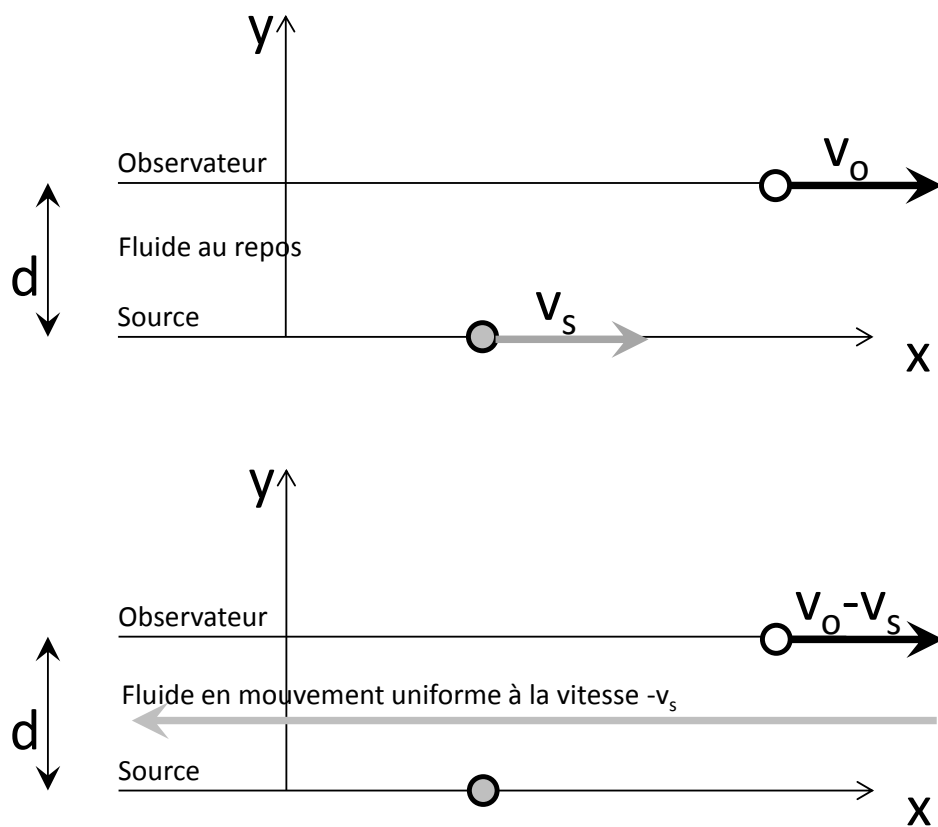


Figure 15.2: Deux représentations équivalentes de l'effet Doppler.

née en fonction du temps (l'instant $t = 0$ correspond au moment où la source et l'observateur sont les plus proches l'un de l'autre et donc séparés par la distance d) :

$$\begin{aligned}
 P_a &= \Re \left(\frac{e^{\frac{-i\omega}{c_0\beta} \left(\sqrt{\frac{(v_o-v_s)^2 t^2}{\beta^2} + d^2} + \frac{v_s}{c_0} \frac{(v_o-v_s)t}{\beta} \right)}}}{\sqrt{\frac{(v_o-v_s)^2 t^2}{\beta^2} + d^2}} \cdot e^{i\omega t} \right) \\
 &= \beta \Re \left(\frac{e^{\frac{-i\omega}{c_0\beta^2} \left(\sqrt{(v_o-v_s)^2 t^2 + \beta^2 d^2} + \frac{v_s(v_o-v_s)}{c_0} t - c_0\beta^2 t \right)}}}{\sqrt{(v_o-v_s)^2 t^2 + \beta^2 d^2}} \right) \quad (15.46)
 \end{aligned}$$

Il est intéressant de comparer le son perçu par un observateur fixe ($v_o = 0$) confronté à une source se déplaçant à vitesse $v_s = v$ ($\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}$) :

$$P_a = \beta \Re \left(\frac{e^{\frac{-i\omega}{c_0\beta^2} \left(\sqrt{v^2 t^2 + \beta^2 d^2} - \frac{v^2}{c_0} t - c_0\beta^2 t \right)}}}{\sqrt{v^2 t^2 + \beta^2 d^2}} \right) \quad (15.47)$$

au son perçu quand l'observateur se déplace à la vitesse $v_o = v$ et que la source est immobile ($v_s = 0$, $\beta = 1$) :

$$P_a = \Re \left(\frac{e^{\frac{-i\omega}{c_0} \left(\sqrt{v^2 t^2 + d^2} - c_0 t \right)}}}{\sqrt{v^2 t^2 + d^2}} \right) \quad (15.48)$$

La figure 15.3 compare le signal perçu par l'observateur dans les deux cas. Il est également intéressant d'examiner le comportement asymptotique, très en amont ou en aval, lorsque les fréquences se stabilisent. Pour ce faire faisons tendre d vers 0 :

$$P_a = \beta \Re \left(\frac{e^{\frac{-i\omega}{c_0\beta^2} \left(v|t| - \frac{v^2}{c_0} t - c_0\beta^2 t \right)}}}{v|t|} \right) = \beta \Re \left(\frac{e^{\frac{-i\omega}{c_0} \frac{v|t| - c_0 t}{\beta^2}}}{v|t|} \right) \quad (15.49)$$

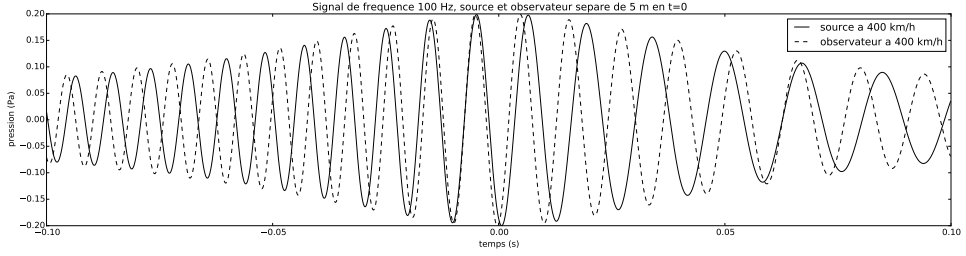


Figure 15.3: Effet Doppler. La vitesse élevée (400 km/h) et la fréquence faible ont été choisies de manière à ce que les effets sur la fréquence perçue soient visibles, l'oreille étant plus sensible aux variations de fréquence que l'œil !

pour un observateur immobile et une source mobile, et

$$P_a = \Re \left(\frac{e^{\frac{-i\omega}{c_0}(v|t| - c_0 t)}}{v|t|} \right) \quad (15.50)$$

pour une source immobile et un observateur mobile.

Les fréquences asymptotiques peuvent être obtenues en examinant la dépendance temporelle de l'exponentielle complexe, nous trouvons :

– source en mouvement :

$$f = \frac{f_0}{1 \mp \frac{v}{c_0}}, \quad (15.51)$$

le signe $-$ correspondant à l'approche ($t < 0$) et le signe $+$ à l'éloignement ($t > 0$) ;

– observateur en mouvement :

$$f = f_0 \left(1 \pm \frac{v}{c_0} \right), \quad (15.52)$$

le signe $+$ correspondant à l'approche ($t < 0$) et le signe $-$ à l'éloignement ($t > 0$).

Cet effet de modification de la fréquence perçue est bien connu, dans le cas présenté Figure 15.3, la fréquence passe progressivement de 133 Hz à 67 Hz quand l'observateur est en mouvement, mais dans le cas de la source et mouvement, la fréquence passe progressivement de 149 Hz à 75 Hz. À vitesse

égale, l'effet Doppler est donc plus important si la source est mobile, que si l'observateur est mobile.

15.2 Propagation du son dans un fluide en écoulement potentiel

Abandonnons à présent l'hypothèse d'un écoulement sous-jacent homogène. Supposons toutefois que cet écoulement demeure irrotationnel. Nous verrons que ceci permet une séparation propre des variables acoustiques et hydrodynamiques.

15.2.1 Introduction du potentiel de vitesse

Reprenons les équations de continuité et d'Euler homogènes ($q = 0$) :

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0 \quad (15.53)$$

$$\rho (\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) + \partial_i p = 0 \quad (15.54)$$

Faisons l'hypothèse que le champ de vitesse est irrotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \partial_i v_j = \partial_j v_i \quad (15.55)$$

ce qui permet d'introduire un potentiel de vitesse ϕ :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi \Leftrightarrow v_i = \partial_i \phi \quad (15.56)$$

15.2.2 Équation de continuité

Développons le second terme de l'équation de continuité et introduisons le potentiel de vitesse :

$$\begin{aligned}\partial_i (\rho v_i) &= v_i \partial_i \rho + \rho \partial_i v_i \\ &= v_i \partial_i \rho + \rho \partial_{ii} \phi\end{aligned}\quad (15.57)$$

L'équation de continuité s'écrit alors, après division par la masse volumique :

$$\frac{1}{\rho} \partial_t \rho + \frac{v_i}{\rho} \partial_i \rho + \partial_{ii} \phi = 0 \quad (15.58)$$

15.2.3 Équation d'Euler

La condition d'irrotationalité permet d'écrire :

$$v_j \partial_j v_i = \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) \quad (15.59)$$

et donc l'équation d'Euler, après division par ρ , s'écrit :

$$\partial_t v_i + \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) + \frac{1}{\rho} \partial_i p = 0 \quad (15.60)$$

soit encore, en introduisant le potentiel ϕ :

$$\partial_{ti} \phi + \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) + \frac{1}{\rho} \partial_i p = 0 \quad (15.61)$$

L'opérateur gradient peut être mis en facteur :

$$\partial_i \left[\partial_t \phi + \frac{v_j v_j}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right] = 0 \quad (15.62)$$

où l'intégrale est prise le long d'une ligne de courant. Le terme entre crochet ne dépend que du temps :

$$\partial_t \phi + \frac{v_j v_j}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = F(t) \quad (15.63)$$

Mais si on fait l'hypothèse que, à très grande distance des sources, les conditions à l'entrée d'une ligne de courant sont stationnaires, on peut écrire :

$$\partial_t \phi + \frac{v_j v_j}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = c^{te} \quad (15.64)$$

Ce qui est une généralisation du théorème de Bernoulli⁴.

Expression de $\frac{1}{\rho} \partial_t \rho$

Dérivons l'équation précédente par rapport au temps :

$$\partial_{tt} \phi + \frac{1}{2} \partial_t (v_j v_j) + \frac{1}{\rho} \partial_t p = 0 \quad (15.65)$$

Mais :

$$\partial_t p = \frac{dp}{d\rho} \partial_t \rho = a^2 \partial_t \rho \quad (15.66)$$

en introduisant la vitesse du son *locale* a définie par :

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (15.67)$$

on trouve :

$$\partial_{tt} \phi + \frac{1}{2} \partial_t (v_j v_j) + \frac{a^2}{\rho} \partial_t \rho = 0 \quad (15.68)$$

4. **Daniel Bernoulli**, fils de **Jean Bernoulli**, qui fût le professeur de Leonhard Euler, et neveu de **Jacques Bernoulli** qui donna son nom à une célèbre équation différentielle, est un médecin, physicien et mathématicien suisse, né à Groningen aux Pays-Bas en 1700 et mort à Bâle en 1782. Daniel Bernoulli est considéré comme un des pères de l'hydrodynamique, dont il décrit les fondements dans l'ouvrage *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum commentarii* publié à Strasbourg en 1738. On trouve dans le même ouvrage un travail sur les cordes vibrantes qui, bien qu'infructueux, mettra toutefois Jean le Rond d'Alembert sur la piste d'une solution qui lui fera introduire un outil central de la physique mathématique : les équations aux dérivées partielles.

dont on tire :

$$\frac{1}{\rho} \partial_t \rho = -\frac{1}{a^2} \left(\partial_{tt} \phi + \frac{1}{2} \partial_t (v_j v_j) \right) \quad (15.69)$$

Expression de $\frac{v_i}{\rho} \partial_i \rho$

Prenons maintenant le gradient de l'équation 15.64 :

$$\partial_{ti} \phi + \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) + \frac{1}{\rho} \partial_i p = 0 \quad (15.70)$$

soit en introduisant la vitesse locale du son a (équation 15.67) et en multipliant tous les termes par v_i :

$$v_i \partial_{ti} \phi + \frac{1}{2} v_i \partial_i (v_j v_j) + \frac{a^2 v_i}{\rho} \partial_i \rho = 0 \quad (15.71)$$

dont on déduit :

$$\frac{v_i}{\rho} \partial_i \rho = \frac{-1}{a^2} \left[v_i \partial_{ti} \phi + \frac{1}{2} v_i \partial_i (v_j v_j) \right] \quad (15.72)$$

mais :

$$v_i \partial_{ti} \phi = v_i \partial_t v_i = \frac{1}{2} \partial_t (v_j v_j) \quad (15.73)$$

de telle sorte que, finalement :

$$\frac{v_i}{\rho} \partial_i \rho = \frac{-1}{2a^2} [\partial_t (v_j v_j) + v_i \partial_i (v_j v_j)] \quad (15.74)$$

15.2.4 Équation potentielle non linéaire

Introduisons les équations 15.69 et 15.74 dans l'équation 15.58 :

$$\partial_{ii} \phi - \frac{1}{a^2} \left[\partial_{tt} \phi + \partial_t (v_j v_j) + \frac{1}{2} v_i \partial_i (v_j v_j) \right] = 0 \quad (15.75)$$

soit encore, exclusivement en termes de potentiel :

$$\partial_{ii} \phi - \frac{1}{a^2} \left[\partial_{tt} \phi + \partial_t (\partial_j \cdot \phi \partial_j \phi) + \frac{1}{2} \partial_i \phi \cdot \partial_i (\partial_j \phi \cdot \partial_j \phi) \right] = 0 \quad (15.76)$$

soit encore, dans d'autres notations :

$$\Delta\phi - \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot (\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi)) \right] = 0 \quad (15.77)$$

15.2.5 Décomposition acoustique

Séparons maintenant le potentiel total en une composante ϕ_0 correspondant à l'écoulement sous-jacent (potentiel hydrodynamique) et une autre composante ϕ_a correspondant à la perturbation acoustique (potentiel acoustique) :

$$\phi = \phi_0 + \phi_a \quad (15.78)$$

On fait les hypothèses suivantes pour ϕ_0 :

- stationnarité : ϕ_0 est indépendant du temps ;
- ϕ_0 est d'au moins un ordre de grandeur plus grand que ϕ_a mais varie à une échelle nettement plus grande.

En introduisant cette décomposition dans l'équation 15.76, et en ne conservant que les termes linéaires en ϕ_a , on trouve, pour chaque terme :

$$\partial_{ii}\phi = \partial_{ii}\phi_0 + \partial_{ii}\phi_a \quad (15.79)$$

$$\partial_{tt}\phi = \partial_{tt}\phi_a \quad (15.80)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\partial_i \phi \cdot \partial_i \phi) &= 2 \partial_i \phi \cdot \partial_{it} \phi \\ &= 2 (\partial_i \phi_0 + \partial_i \phi_a) \partial_{it} \phi_a \\ &\simeq 2 \partial_i \phi_0 \cdot \partial_{it} \phi_a \end{aligned} \quad (15.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_i \phi \cdot \partial_i (\partial_j \phi \cdot \partial_j \phi) &= \partial_i \phi \cdot \partial_j \phi \cdot \partial_{ij} \phi \\ &= \partial_i (\phi_0 + \phi_a) \partial_j (\phi_0 + \phi_a) \partial_{ij} (\phi_0 + \phi_a) \\ &\simeq \partial_i \phi_0 \cdot \partial_j \phi_0 \cdot \partial_{ij} \phi_0 + \partial_i \phi_0 \cdot \partial_j \phi_0 \cdot \partial_{ij} \phi_a \end{aligned} \quad (15.82)$$

En égalant alors, dans l'équation 15.76 ainsi modifiée, les termes en ϕ_0 et en ϕ_a on trouve d'abord une équation potentielle non linéaire pour l'écoulement sous-jacent :

$$\partial_{ii}\phi_0 - \frac{1}{a^2}\partial_i\phi_0 \cdot \partial_j\phi_0 \cdot \partial_{ij}\phi_0 = 0 \quad (15.83)$$

et une seconde équation pour la perturbation acoustique :

$$\partial_{ii}\phi_a - \frac{1}{a^2}[\partial_{tt}\phi_a + 2\partial_i\phi_0 \cdot \partial_{it}\phi_a + \partial_i\phi_0 \cdot \partial_j\phi_0 \cdot \partial_{ij}\phi_a] = 0 \quad (15.84)$$

Substituons les composantes de vitesses v_{0i} au potentiel ϕ_0 :

$$\partial_{ii}\phi_a - \frac{1}{a^2}[\partial_{tt}\phi_a + 2v_{0i}\partial_{it}\phi_a + v_{0i}v_{0j}\partial_{ij}\phi_a] = 0 \quad (15.85)$$

Soit encore, en réécrivant le terme entre crochet :

$$\partial_{ii}\phi_a - \frac{1}{a^2}(\partial_t + v_{0i}\partial_i)^2\phi_a = 0 \quad (15.86)$$

Dans le cas d'une variation harmonique des variables acoustiques, on trouve encore :

$$\partial_{ii}\phi_a - \frac{1}{a^2}(i\omega + v_{0i}\partial_i)^2\phi_a = 0 \quad (15.87)$$

15.3 Propagation du son dans un fluide en écoulement quelconque

15.3.1 Équation de continuité

Introduisons à nouveau la décomposition entre variables hydrodynamiques et variables acoustiques (équation 15.1) dans l'équation de continuité :

$$\partial_t(\rho_0 + \rho_a) + \partial_i[(\rho_0 + \rho_a)(v_{i0} + v_{ia})] = 0 \quad (15.88)$$

et développons-la en regroupant les termes d'ordre 0, 1 et 2 en perturbations :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_0 + \partial_i (\rho_0 v_{i0}) &+ \\ \partial_t \rho_a + \partial_i (\rho_0 v_{ia} + \rho_a v_{i0}) &+ \\ \partial_i (\rho_a v_{ia}) &= 0 \end{aligned} \quad (15.89)$$

La méthode consiste à négliger les termes d'ordres supérieurs à 1 et à annuler séparément les termes d'ordres 0 et 1. À l'ordre 0, nous obtenons une équation de continuité pour l'écoulement sous-jacent :

$$\partial_t \rho_0 + \partial_i (\rho_0 v_{i0}) = 0 \quad (15.90)$$

soit en considérant un écoulement sous-jacent stationnaire :

$$\partial_i (\rho_0 v_{i0}) = 0 \quad (15.91)$$

À l'ordre 1, nous obtenons une équation de continuité linéaire pour les perturbations acoustiques :

$$\partial_t \rho_a + \partial_i ((\rho_0 v_{ia} + \rho_a v_{i0})) = 0 \quad (15.92)$$

15.3.2 Équation de la quantité de mouvement

Pratiquons de même pour l'équation de la quantité de mouvement :

$$(\rho_0 + \rho_a) \left[\underbrace{\partial_t v_{i0}}_{=0} + \partial_t v_{ia} + (v_{j0} + v_{ja}) \partial_j (v_{i0} + v_{ia}) \right] + \partial_i (p_0 + p_a) = 0 \quad (15.93)$$

À l'ordre 0, nous obtenons :

$$\rho_0 v_{j0} \partial_j v_{i0} + \partial_i p_0 = 0 \quad (15.94)$$

Et à l'ordre 1 :

$$\rho_0 [\partial_t v_{ia} + v_{j0} \partial_j v_{ia} + v_{ja} \partial_j v_{i0}] + \rho_a v_{j0} \partial_j v_{i0} + \partial_i p_a = 0 \quad (15.95)$$

15.3.3 Entropie et gaz parfait

Par définition, la variation d'entropie ds associée à un échange de chaleur δq à la température T est définie comme suit :

$$ds = \frac{\delta q}{T} \quad (15.96)$$

Le premier principe permet d'exprimer la variation d'énergie totale d'un volume élémentaire (de) comme la somme de l'énergie thermique (δq) et mécanique (δw) échangée avec l'extérieur :

$$de = \delta q + \delta w \quad (15.97)$$

soit :

$$\delta q = de - \delta w \quad (15.98)$$

Pour un fluide non visqueux, les forces extérieures se limitent à la pression :

$$\delta w = -p dv \quad (15.99)$$

L'énergie interne est une fonction d'état ; on peut donc développer la différentielle :

$$de = \frac{\partial e}{\partial T} dT + \frac{\partial e}{\partial v} dv \quad (15.100)$$

mais par définition :

$$\frac{\partial e}{\partial T} = c_v \quad (15.101)$$

et, pour un gaz parfait où, par définition, les seules interactions entre les molécules sont liées à l'agitation thermique :

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0 \quad (15.102)$$

On trouve donc successivement :

$$de = c_v dT \quad (15.103)$$

$$\delta q = c_v dT + p dv \quad (15.104)$$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + p \frac{dv}{T} \quad (15.105)$$

La loi des gaz parfaits ($pv = RT$ avec $R = c_p - c_v$) permet de passer des variables (T, v) aux variables (p, ρ) :

$$ds = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} \quad (15.106)$$

L'entropie étant une fonction d'état, on trouve :

$$\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{c_v}{p} \quad (15.107)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \rho} = -\frac{c_p}{\rho} \quad (15.108)$$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{c_v}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c_p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (15.109)$$

et, de la même manière :

$$\partial_i s = \frac{c_v}{p} \partial_i p - \frac{c_p}{\rho} \partial_i \rho \quad (15.110)$$

15.3.4 Équation de l'énergie

Supposons un écoulement isentropique ; la dérivée matérielle de l'entropie (constituée également de deux contributions) est donc nulle :

$$\underbrace{\partial_t s_0}_{=0} + \partial_t s_a + (v_{j0} + v_{ja}) \partial_j (s_0 + s_a) = 0 \quad (15.111)$$

mais, conformément à l'équation 15.106 :

$$ds = c_v \frac{dp_0 + dp_a}{p_0 + p_a} - c_p \frac{d\rho_0 + d\rho_a}{\rho_0 + \rho_a} \quad (15.112)$$

Développons cette expression pour préciser les composantes s_0 et s_a :

$$ds = \frac{c_v}{p_0 + p_a} \left(dp_0 + dp_a - \frac{c_p}{c_v} \frac{p_0 + p_a}{\rho_0 + \rho_a} (d\rho_0 + d\rho_a) \right) \quad (15.113)$$

Posons :

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{c_p}{c_v} \frac{p_0 + p_a}{\rho_0 + \rho_a} = \gamma \frac{p_0 \left(1 + \frac{p_a}{p_0}\right)}{\rho_0 \left(1 + \frac{\rho_a}{\rho_0}\right)} \\ &\simeq \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{p_a}{p_0}\right) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_0}\right) \simeq c_0^2 \left(1 + \frac{p_a}{p_0} - \frac{\rho_a}{\rho_0}\right) \\ &\simeq c_0^2 + \underbrace{c_0^2 \left(\frac{p_a}{p_0} - \frac{\rho_a}{\rho_0}\right)}_{=c_a^2} = c_0^2 + c_a^2 \end{aligned} \quad (15.114)$$

La variation d'entropie peut donc s'écrire, en se limitant à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} ds &= \frac{c_v}{p_0 + p_a} \left(dp_0 + dp_a - (c_0^2 + c_a^2) (d\rho_0 + d\rho_a) \right) \\ &= \underbrace{\frac{c_v}{p_0} (dp_0 - c_0^2 d\rho_0)}_{=s_0} + \underbrace{\frac{c_v}{p_0} (dp_a - c_0^2 d\rho_a - c_a^2 d\rho_0)}_{=s_a} \end{aligned} \quad (15.115)$$

L'équation de l'énergie à l'ordre 0 s'écrit donc :

$$v_{j0} \partial_j s_0 = 0 \quad (15.116)$$

où

$$v_{j0} \frac{c_v}{p_0} \partial_j p_0 - v_{j0} \frac{c_p}{\rho_0} \partial_j \rho_0 = 0 \quad (15.117)$$

soit encore, en se souvenant Section 4.6.1 que $\frac{c_p p_0}{c_v \rho_0} = c_0^2$:

$$v_{j0} \partial_j p_0 = c_0^2 v_{j0} \partial_j \rho_0 \quad (15.118)$$

À l'ordre 1, nous avons (en remplaçant c_a par sa valeur en fonction de p_a et ρ_a) :

$$\begin{aligned} \partial_t p_a + v_{j0} \partial_j p_a + v_{ja} \partial_j p_0 &= c_0^2 (\partial_t \rho_a + v_{j0} \partial_j \rho_a + v_{ja} \partial_j \rho_0) \\ &+ c_0^2 v_{0j} \partial_j \rho_0 \left(\frac{p_a}{p_0} - \frac{\rho_a}{\rho_0} \right) \end{aligned} \quad (15.119)$$

15.3.5 Équations d'Euler linéarisées

La propagation du son en écoulement quelconque nécessite donc la résolution de deux jeux d'équations. Pour l'écoulement sous-jacent, nous avons successivement :

- l'équation de continuité (équation 15.91) :

$$\partial_t \rho_a + \partial_i ((\rho_0 v_{ia} + \rho_a v_{i0}) = 0 \quad (15.120)$$

- l'équation de la quantité de mouvement (équation 15.94) :

$$\partial_i \rho_0 v_{i0} + v_{ia} = 0 \quad (15.121)$$

- et l'équation de l'énergie (équation 15.118) :

$$v_{j0} \partial_j p_0 = c_0^2 v_{j0} \partial_j \rho_0 \quad (15.122)$$

Le champ (p_0, ρ_0, \vec{v}_0) connu, on peut résoudre les équations linéarisées pour les perturbations acoustiques :

- équation de continuité (équation 15.92) :

$$\partial_i \rho_0 v_{i0} = 0 \quad (15.123)$$

- équation de la quantité de mouvement (Equation 15.95) :

$$\rho_0 [\partial_t v_{ia} + v_{j0} \partial_j v_{ia} + v_{ja} \partial_j v_{i0}] + \rho_a v_{j0} \partial_j v_{i0} + \partial_i p_a = 0 \quad (15.124)$$

- et équation de l'énergie (Equation 15.119) :

$$\begin{aligned} \partial_t p_a + v_{j0} \partial_j p_a + v_{ja} \partial_j p_0 &= c_0^2 (\partial_t \rho_a + v_{j0} \partial_j \rho_a + v_{ja} \partial_j \rho_0) \\ &+ c_0^2 v_{0j} \partial_j \rho_0 \left(\frac{p_a}{p_0} - \frac{\rho_a}{\rho_0} \right) \end{aligned} \quad (15.125)$$

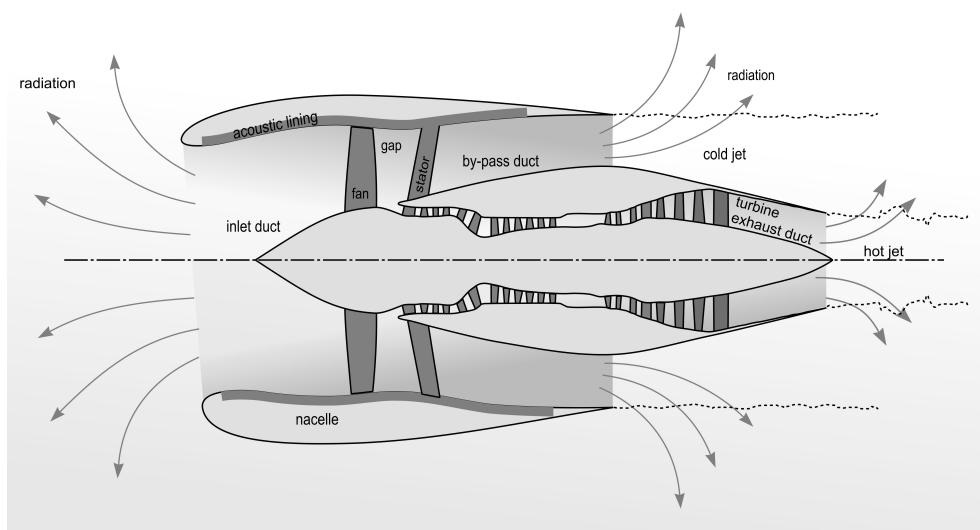
Il n'est toutefois plus possible de réduire cette équation à une équation d'onde scalaire comme dans le cas d'un écoulement constant ou à potentiel.

15.4 Application à un moteur d'avion

La figure 15.4 représente schématiquement un réacteur d'avion à double flux. L'air extérieur s'engouffre dans la nacelle et est accéléré par la soufflante; une part du débit passe dans le moteur lui-même (compresseur multi-étage, chambre de combustion, turbine multi-étage) alors que le reste le contourne en passant par un *bypass*. À l'arrière du moteur, on observe un écoulement fait de trois jets concentriques : les gaz chauds et fortement accélérés sortant de la turbine au centre, les gaz froids et accélérés qui sont passés par le *bypass* et enfin l'air extérieur. Les interfaces entre ces trois écoulements sont caractérisées par un cisaillement marqué. Les ondes sonores générées par la soufflante (*fan*) se propagent vers l'amont du moteur, à contre-courant de l'écoulement; elles se propagent également vers l'aval, dans le sens de l'écoulement, d'abord guidées par le *bypass* puis, librement, au travers des couches de cisaillement.

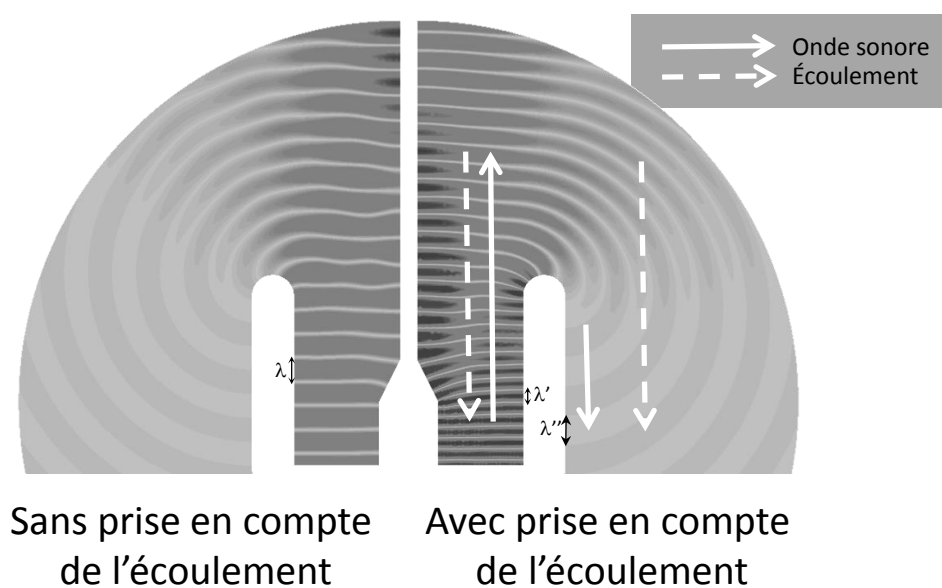
On peut modéliser la propagation des ondes vers l'amont en supposant l'écoulement potentiel Section 15.2. La figure 15.5 montre par exemple le champ de pression engendré en amont du moteur par la soufflante; on y compare le champ obtenu avec et sans écoulement. L'effet de l'écoulement sur la longueur d'onde apparente du champ sonore y apparaît clairement et on comprend l'importance de la modélisation de l'effet de convection dans cette application.

À l'aval du moteur, en revanche, l'hypothèse d'irrotationalité ne peut en aucun cas être retenue. Il faut en outre prendre en compte le caractère inhomogène du champ de température. On utilise alors les équations d'Euler linéarisées pour calculer le champ acoustique Section 15.3. La figure 15.6 illustre un tel calcul et met clairement en évidence l'effet de réfraction de l'onde sonore due à la propagation au travers des couches de cisaillement.



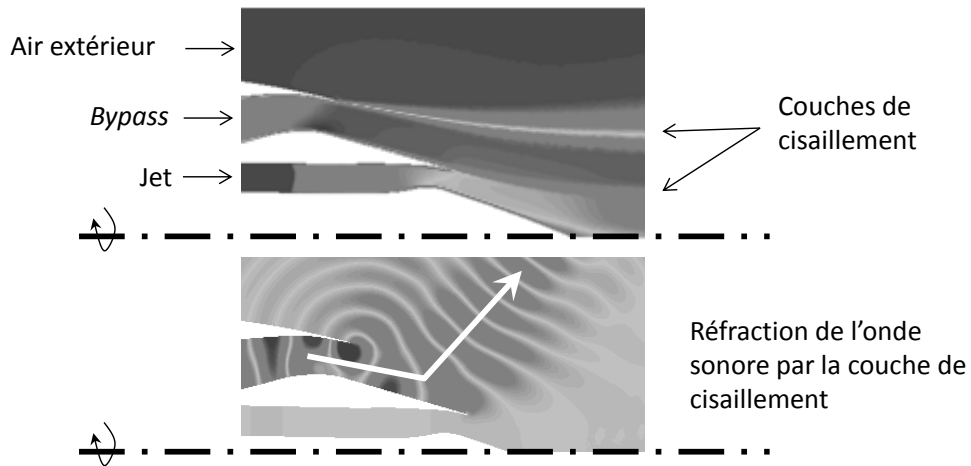
©Sjoerd Rienstra. Used by permission.

Figure 15.4: Schéma d'un réacteur d'avion double flux.



©ACTRAN by Free Field Technologies. Used by permission.

Figure 15.5: Rayonnement acoustique de la soufflante au travers de la nacelle. La carte de gauche correspond au cas sans écoulement et celle de droite au cas avec écoulement.



©ACTRAN by Free Field Technologies. Used by permission.

Figure 15.6: Rayonnement acoustique de la soufflante au travers du *bypass* et effet de réfraction au travers de la couche de cisaillement. La carte du dessus montre l'écoulement en trois jets co-axiaux et les deux couches de cisaillement correspondantes. La carte du dessous montre le champ acoustique et met clairement en évidence l'effet de réfraction au travers de la couche de cisaillement à l'interface entre jet froid et air extérieur.

16

PROPAGATION ATMOSPHERIQUE

Contents

16.1	Introduction	358
16.2	Mécanismes mis en jeu	359
16.3	Formulation axisymétrique de l'équation de Helmholtz	364
16.4	Dérivation de l'équation parabolique	365
16.5	Différences finies	368
16.6	Évaluation de Ψ en $r = 0$	373
16.7	Performances numériques	376
16.8	Conclusion	380

16.1 Introduction

La propagation du bruit dans l'atmosphère est habituellement associée aux problématiques environnementales. Sa modélisation nécessite la mise en œuvre de techniques adaptées aux conditions particulières de propagation. Les distances de propagation vont de quelques mètres à quelques kilomètres et la propagation s'opère dans un milieu complexe (l'atmosphère) où les effets associés au vent et aux gradients de température peuvent être hautement significatifs. En outre, la propagation doit tenir compte des caractéristiques du sol (revêtement rigide ou absorbant) et de la présence éventuelle d'obstacles (terrain irrégulier, écrans). Ces caractéristiques empêchent la mise en œuvre de méthodes conventionnelles (telles que la méthode des éléments finis ou la méthode des éléments frontières) car elles conduisent à des modèles de taille excessive pour des applications tridimensionnelles réalistes. Des méthodes adaptées sont, dès lors, mises en œuvre.

L'approximation *parabolique* permet de modéliser plus efficacement certains problèmes d'acoustique extérieure en négligeant certains termes de l'équation d'onde. Une dérivation complète de la méthode parabolique est proposée dans ce chapitre. La méthode parabolique présente des caractéristiques attractives pour la simulation numérique. Ceci est illustré par un exemple. La méthode parabolique est largement utilisée en acoustique sous-marine et se révèle performante pour propager des perturbations acoustiques sur de longues distances. Elle est également bien adaptée au traitement de certains problèmes d'acoustique environnementale dans l'atmosphère (propagation de sources au-dessus de la surface du sol par exemple). Le lecteur intéressé par cette technique consultera avec intérêt l'ouvrage de Salomons¹ et les articles de West et Gilbert².

Les approximations introduites dans le traitement de l'équation imposent cer-

1. **Salomons E. M.**, *Computational atmospheric acoustics*, Kluwer Academic Publishers, 2001

2. **West M., Gilbert K.E. et Sack R.A.**, *A tutorial on the parabolic equation model used for long range sound propagation in the atmosphere*, Applied Acoustics, 199-228 (1992) et **Gilbert K.E. et While M.J.**, *Application of the parabolic equation to sound propagation in a refracting atmosphere*, J. Acoust. Soc. Amer., 630-637 (1989).

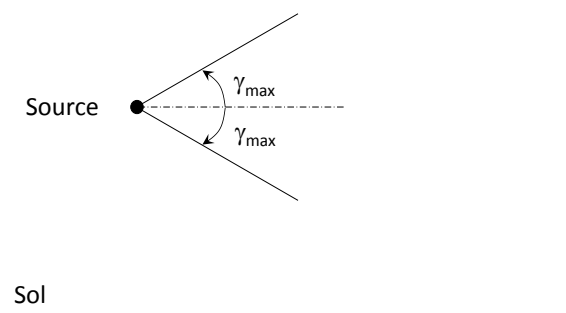


Figure 16.1: Restriction des angles d'élévation pour la méthode parabolique.

taines limites à la méthode. Ainsi est-elle seulement valable pour évaluer le champ acoustique en des points caractérisés par de faibles angles d'élévation Figure 16.1. La méthode se révèle néanmoins très attractive du point de vue de l'efficacité numérique car elle conduit à la résolution d'un problème parabolique plutôt qu'elliptique.

16.2 Mécanismes mis en jeu

L'étude de la propagation d'ondes sonores dans l'atmosphère requiert la prise en compte de mécanismes multiples (également rencontrés dans d'autres applications) tels que l'atténuation géométrique, l'absorption atmosphérique, la turbulence et la diffraction. Au voisinage du sol, l'absorption joue un rôle fondamental sur l'amplitude et la phase du champ réfléchi. En outre, le vent et les gradients thermiques peuvent provoquer des effets de réfraction à l'origine d'une augmentation ou d'une diminution significative des niveaux de bruit. Le profil du sol peut affecter également les niveaux observés. Ces différents mécanismes sont brièvement décrits ci-après.

16.2.1 Atténuation géométrique

L'atténuation géométrique peut être décrite en considérant le rayonnement d'une source ponctuelle en champ libre. À une distance r de la source, le front d'ondes associé est décrit par une surface sphérique ($4\pi r^2$). En l'absence de phénomènes dissipatifs, chaque doublement de la distance r conduit à une réduction de la pression par un facteur 4 et donc à une réduction de 6 décibels du niveau de pression. L'atténuation géométrique peut être décrite par la relation suivante donnant le niveau de pression L_p à une distance r d'une source de niveau de puissance L_W :

$$L_p = L_W - 10 \log(4\pi r^2) \quad (16.1)$$

16.2.2 Absorption atmosphérique

L'absorption dans l'atmosphère se caractérise par une perte d'énergie de l'onde sonore résultant de deux phénomènes décrits ci-dessous.

– **Conduction thermique et viscosité de l'air**

Les gradients de température et de vitesse présents dans l'onde sonore sont réduits respectivement par conduction thermique et transfert de la quantité de mouvement. Ces processus sont régis par la conduction thermique et la viscosité de l'air ; ils conduisent à une perte d'énergie sous forme de chaleur. Ils peuvent être décrits par les équations de la mécanique des fluides. L'atténuation associée à ces effets croît avec la fréquence car les gradients augmentent avec la fréquence.

– **Pertes par relaxation des molécules d'oxygène et d'azote**

Le phénomène de relaxation moléculaire est associé au retard à l'établissement d'un équilibre à la suite d'une sollicitation externe. Ce retard est directement influencé par la concentration du milieu en molécules polyatomiques. Ce processus conduit à une perte additionnelle d'énergie sous forme de chaleur et est fortement influencé par la présence de molécules d'eau dans l'air (humidité naturelle).

f_c	16	31.5	63	125	250	500	1 000	2 000	4 000
α	0.007	0.028	0.11	0.37	1.02	1.96	3.57	8.8	29.0

Table 16.1: Coefficient d'absorption α ([dB/km]) de l'atmosphère (à 10 degrés Celsius, 1 atmosphère, 80% d'humidité) pour les fréquences centrales des bandes de tiers d'octave (f_c [Hz]) entre 16 Hz et 4 000 Hz. On voit clairement que les *hautes* fréquences sont fortement atténuées dans l'atmosphère alors que les *basses* fréquences subissent une atténuation faible.

La prise en compte de l'absorption atmosphérique dans l'évaluation du niveau de pression L_p à une distance r d'une source ponctuelle de niveau de puissance L_W se solde par une mise à jour de l'équation 16.1 :

$$L_p = L_W - 10 \log(4\pi r^2) - \alpha r \quad (16.2)$$

où α est le coefficient d'absorption atmosphérique (exprimé en dB par unité de longueur). Le terme $-\alpha r$ est significatif pour les distances habituellement associées à des problématiques environnementales (centaine(s) de mètres) et pour des fréquences élevées. La norme ISO 9613-1 :1993³ fournit des formules donnant le coefficient α en fonction de la fréquence, de la température, de la pression atmosphérique et de l'humidité relative. On retiendra, en particulier, que le coefficient α est proportionnel au carré de la fréquence. À titre illustratif, on trouvera dans la table 16.1 les valeurs du coefficient α pour les fréquences centrales des bandes de tiers d'octave entre 16 et 4 000 Hz. Ces valeurs ont été calculées pour une température de 10 degrés Celsius, une pression atmosphérique de 101.325 Pa et un taux d'humidité de 80 %.

16.2.3 Réfraction atmosphérique

Dans l'atmosphère, la température varie de manière significative avec l'altitude. Habituellement, la température décroît avec l'altitude durant la période de jour tandis qu'elle augmente avec celle-ci durant la nuit. Il en résulte des variations correspondantes de la vitesse du son. En première approximation, on peut considérer, entre -20 degrés Celsius et $+40$ degrés Celsius, qu'une

3. **ISO 9613-1 :1993**, *Acoustics - Attenuation of sound during propagation outdoors - Part 1 : Calculation of the absorption of sound by the atmosphere*

augmentation de la température de un degré se solde par une augmentation de la vitesse du son de 0.6 m/s (Equation 4.67). Cette variation de la vitesse du son avec l'altitude est à l'origine du phénomène de réfraction. Une onde sonore sera systématiquement réfractée vers la région où la vitesse du son est la plus faible. Ceci est illustré à la figure 16.2 pour deux profils de vitesse du son (jour *versus* nuit).

16.2.4 Turbulence

La considération d'une atmosphère où les profils de température et de vitesse du vent ne varieraient pas dans le temps correspond à une situation idéalisée. En pratique, ces profils fluctuent dans le temps à des vitesses variables (de l'ordre de l'heure pour les plus lentes et de la seconde pour les plus rapides). Les fluctuations rapides du champ de vitesse dans un fluide sont habituellement associées à la turbulence et se matérialisent sous la forme de tourbillons de tailles variables. À ceux-ci sont également associées des fluctuations de température.

La prise en compte d'une atmosphère turbulente sans un modèle de propagation atmosphérique s'opère habituellement en considérant une composante de vitesse du son fluctuant de manière aléatoire. Ce formalisme permet d'évaluer les niveaux acoustiques moyennés sur une période de quelques minutes en considérant de multiples réalisations du champ de vitesse du son dans l'atmosphère étudiée.

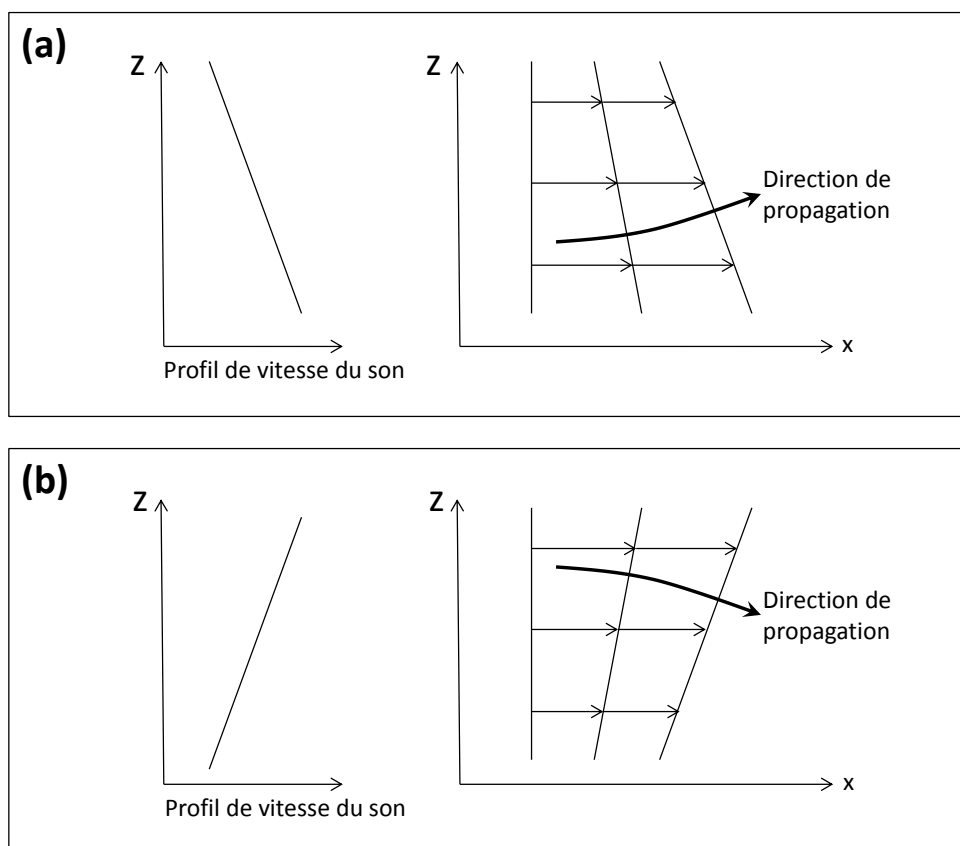


Figure 16.2: Réfraction atmosphérique pour deux profils de vitesse du son : (a) réfraction vers le haut résultant de vitesses décroissantes avec l'altitude z , (b) réfraction vers le bas résultant de vitesses croissantes avec l'altitude z .

Formulation axisymétrique de l'équation de Helmholtz

L'évaluation de la méthode parabolique présentée dans ce chapitre repose sur le traitement du rayonnement acoustique d'une source ponctuelle dans un demi-espace Figure 16.3. Ce problème est modélisé par l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + k_z^2 p = 0 \quad (16.3)$$

où le nombre d'onde k_z peut exhiber une dépendance vis-à-vis de la coordonnée z (atmosphère stratifiée par exemple). Compte tenu de la nature axisymétrique du problème, le champ de pression p ne dépend pas de l'angle ϕ de telle sorte que l'équation 16.3 se réduit à la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + k_z^2 p = 0. \quad (16.4)$$

La méthode parabolique est basée sur des approximations successives de l'équation 16.4. Ces approximations sont introduites *via* une forme alternative de cette équation faisant usage d'une présentation factorisée de la solution $p(r, z)$:

$$p(r, z) = \frac{1}{\sqrt{r}} q(r, z). \quad (16.5)$$

Cette forme particulière est basée sur la dépendance radiale (exprimée par le terme $r^{-\frac{1}{2}}$) de la solution du problème bidimensionnel. Celle-ci conduit à l'équation suivante pour le champ q :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{4r^2} q + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + k_z^2 q = 0. \quad (16.6)$$

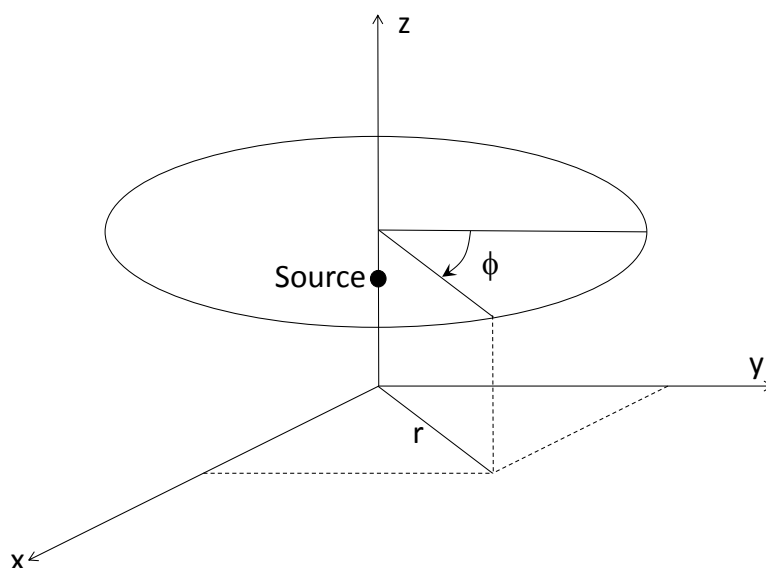


Figure 16.3: Rayonnement d'une source en demi-espace (coordonnées cartésiennes et cylindriques).

Dérivation de l'équation parabolique à partir de l'équation de Helmholtz

16.4

La méthode parabolique peut être dérivée à partir de l'équation 16.6 en y introduisant des simplifications relatives au traitement du champ lointain, à un régime d'ondes sortantes et à l'approximation *angle étroit*.

16.4.1 Approximation du champ lointain

Si on se borne à rechercher la solution à des distances radiales $r \gg \lambda$ (où λ est la longueur d'onde), le deuxième terme de l'équation 16.6 peut être négligé de telle sorte que cette équation se réduit à l'équation de Helmholtz

bidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + k_z^2 q = 0. \quad (16.7)$$

16.4.2 Ondes sortantes

L'équation 16.7 peut être formulée en utilisant un nombre d'onde de référence k_a (correspondant à une hauteur moyenne si le milieu est non homogène) :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + H_2(z)q = 0, \quad (16.8)$$

où H_2 est donné par :

$$H_2(z) = k_a^2(1 + s), \quad (16.9)$$

avec s défini comme suit :

$$s = \frac{1}{k_a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 - k_a^2 \right). \quad (16.10)$$

L'équation 16.8 peut être factorisée sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - iH_1(z) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + iH_1(z) \right) q = 0, \quad (16.11)$$

où H_1 est donné par :

$$H_1(z) = k_a \sqrt{1 + s} \simeq k_a \left(1 + \frac{s}{2} \right). \quad (16.12)$$

Si on considère seulement des ondes se propageant dans la direction $r > 0$, l'équation 16.11 se réduit à :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + iH_1(z) \right) q = 0, \quad (16.13)$$

ou plus explicitement :

$$\frac{\partial q}{\partial r} + ik_a q + \frac{i}{2k_a} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + (k_z^2 - k_a^2)q \right) = 0. \quad (16.14)$$

16.4.3 Approximation *angle étroit*

La solution $q(r, z)$ de l'équation 16.14 peut être formulée sous la forme factorisée suivante :

$$q(r, z) = \psi(r, z) \exp(-ik_a r) \quad (16.15)$$

où la fonction ψ varie de manière lisse selon la direction radiale. La substitution de cette expression dans l'équation 16.14 donne le résultat suivant (après avoir éliminé le facteur multiplicatif $\exp(-ik_a r)$) :

$$2ik_a \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - (k_z^2 - k_a^2) \psi = 0, \quad (16.16)$$

ou

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \beta_z \psi, \quad (16.17)$$

où α et β_z sont donnés par :

$$\alpha = \frac{1}{2ik_a}, \quad (16.18)$$

et

$$\beta_z = \frac{k_z^2 - k_a^2}{2ik}. \quad (16.19)$$

Cette équation est précisément dénommée *équation parabolique*. Elle doit être résolue dans le domaine acoustique ($z \geq 0; r \geq 0$) et doit bien entendu vérifier des conditions frontières associées. Celles-ci sont habituellement formulées comme suit :

- impédance fixée en $z = 0$ liant la pression p à la vitesse normale v_n en $z = 0$ (où la normale n pointe à l'extérieur du domaine acoustique) :

$$\left(\frac{p}{v_n} \right)_{z=0} = \left(\frac{p}{-v_z} \right)_{z=0} = \zeta \rho c \quad (16.20)$$

où ζ est l'impédance caractéristique le long de la surface du sol ;

- impédance fixée en $z = l_z$ (où l_z est la hauteur du domaine acoustique) :

$$\left(\frac{p}{v_n} \right)_{z=l_z} = \left(\frac{p}{v_z} \right)_{z=l_z} = \rho c \quad (16.21)$$

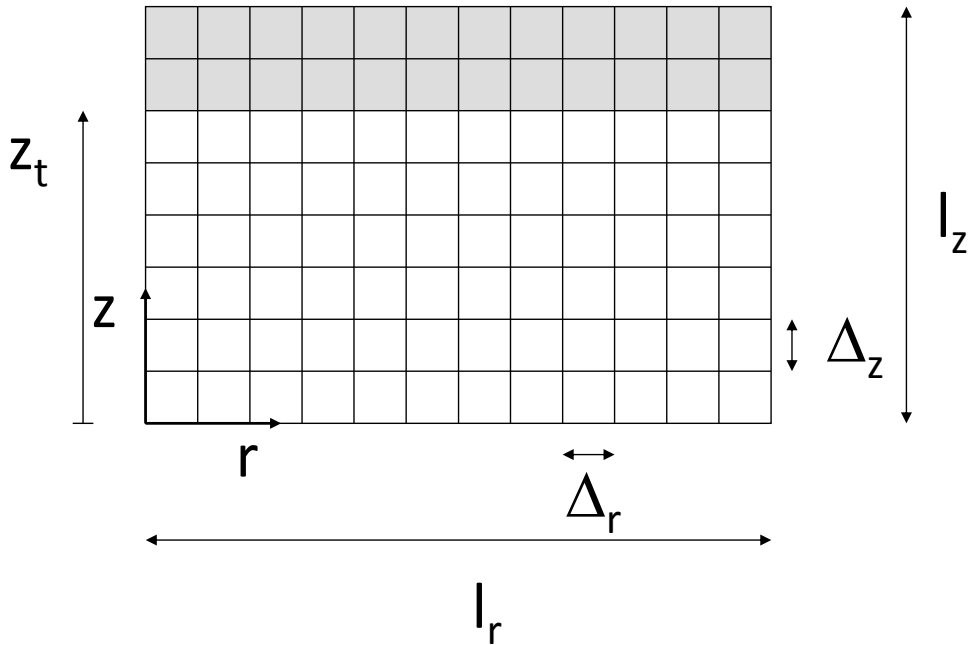


Figure 16.4: Grille supportant la résolution par différences finies du problème de Helmholtz dans le demi-plan ($z \geq 0$).

Méthode des différences finies pour la résolution de l'équation parabolique

16.5

16.5.1 Forme discrète

L'équation 16.17 indique clairement que le problème résultant est un problème aux valeurs initiales. La solution de ce problème avec les conditions frontières (équations 16.20 et 16.21) reformulées en termes de la fonction ψ peut être évaluée en utilisant la méthode des différences finies. Ce schéma numérique Figure 16.4 exploite une grille régulière (pas radial Δ_r , pas vertical Δ_z) du domaine de calcul (longueur radiale l_r , longueur verticale l_z).

Si on désigne par $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M$ les valeurs de la fonction ψ aux M points de coordonnées $z_j = (j-1)\Delta z$ (où $j = 1, 2, \dots, M$), la forme discrète de l'équation 16.17 est obtenue en utilisant la différence finie suivante pour approximer la dérivée seconde de ψ par rapport à z :

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_{z=z_j} = \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{\Delta_z^2} . \quad (16.22)$$

La forme discrète de l'équation 16.17 se formule comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \dots \\ \psi_{M-2} \\ \psi_{M-1} \\ \psi_M \end{pmatrix} &= \frac{\alpha}{\Delta_z^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \dots \\ \psi_{M-2} \\ \psi_{M-1} \\ \psi_M \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \beta_1 \psi_1 \\ \beta_2 \psi_2 \\ \beta_3 \psi_3 \\ \dots \\ \beta_{M-2} \psi_{M-2} \\ \beta_{M-1} \psi_{M-1} \\ \beta_M \psi_M \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\Delta_z^2} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \psi_{M+1} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (16.23)$$

16.5.2 Conditions frontières discrètes

La condition frontière 16.20 le long de la surface ($z = 0$) peut être reformulée en utilisant l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -i\rho c k_z v_n , \quad (16.24)$$

de telle sorte que la condition frontière devient :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} = +ik_z \frac{1}{Z} (p)_{z=0} . \quad (16.25)$$

Dans le contexte des différences finies, la dérivée première de la pression p (en $z = \Delta_z/2$) est donnée par :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=\frac{\Delta_z}{2}} \simeq \frac{p_1 - p_0}{\Delta_z} . \quad (16.26)$$

l'évaluation de la dérivée de la pression en $z = 0$ requiert l'utilisation de la dérivée seconde et s'écrit comme suit :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} \simeq \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=\frac{\Delta_z}{2}} - \frac{\Delta_z}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)_{z=\Delta_z} . \quad (16.27)$$

L'utilisation de cette expression (avec l'approximation par différences finies des dérivées première et seconde) dans l'équation 16.25 donne la relation suivante entre les pressions p_0 , p_1 et p_2 :

$$\left(2ik \frac{\Delta_z}{Z} + 3\right) p_0 = 4p_1 - p_2 . \quad (16.28)$$

Cette condition peut être reformulée en termes de ψ (puisque p est lié à ψ via la relation $p = \psi e^{-ik_a r \sqrt{r}}$) :

$$\psi_0 = \sigma_1 \psi_1 + \sigma_2 \psi_2 \quad (16.29)$$

où σ_1 et σ_2 sont donnés par :

$$\sigma_1 = \frac{4}{3 + 2ik \frac{\Delta_z}{Z}} , \quad (16.30)$$

et

$$\sigma_2 = \frac{-1}{3 + 2ik \frac{\Delta_z}{Z}} . \quad (16.31)$$

De manière similaire, la condition frontière 16.21 le long de la surface supé-

rieure ($z = l_z$) du modèle peut être formulée sous la forme :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=l_z} = -ik_z (p)_{z=l_z} . \quad (16.32)$$

Dans le contexte de la méthode des différences finies, la dérivée première de la pression p (en $z = l_z - \Delta_z/2$) est donnée par :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=l_z-\frac{\Delta_z}{2}} \simeq \frac{p_{M+1} - p_M}{\Delta_z} . \quad (16.33)$$

L'évaluation de la dérivée de la pression en $z = l_z$ requiert à nouveau une dérivée seconde et s'écrit comme suit :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=l_z} \simeq \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=l_z-\frac{\Delta_z}{2}} + \frac{\Delta_z}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)_{z=l_z-\Delta_z} . \quad (16.34)$$

L'utilisation de cette expression (avec les approximations différences finies pour les dérivées première et seconde) dans l'équation 16.32 donne la relation suivante entre les pressions p_M , p_{M-1} and p_{M-2} :

$$\left(2ik \frac{\Delta_z}{Z} + 3\right) p_{M+1} = 4p_M - p_{M-1} . \quad (16.35)$$

Cette condition peut être formulée en termes de ψ comme :

$$\psi_{M+1} = \tau_1 \psi_{M-1} + \tau_2 \psi_M , \quad (16.36)$$

où τ_1 et τ_2 sont donnés par :

$$\tau_1 = \frac{4}{3 + 2ik \frac{\Delta_z}{Z}} , \quad (16.37)$$

et

$$\tau_2 = \frac{-1}{3 + 2ik \frac{\Delta_z}{Z}} . \quad (16.38)$$

16.5.3 Système d'équations algébriques

La substitution des équations 16.29 et 16.36 dans l'équation 16.23 conduit au système discret suivant :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = (\gamma T + D) \Psi , \quad (16.39)$$

où les notations suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\alpha}{\Delta_z^2} \\ \Psi &= (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{M-1}, \psi_M)^T \\ T &= \begin{bmatrix} -2 + \sigma_1 & 1 + \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 + \tau_1 & -2 + \tau_2 \end{bmatrix} \\ D &= (\beta_1 \psi_1, \beta_2 \psi_2, \beta_3 \psi_3, \dots, \beta_{M-1} \psi_{M-1}, \beta_M \psi_M)^T \end{aligned} \quad (16.40)$$

Le traitement numérique de l'équation 16.39 exploite une intégration préliminaire des membres gauche et droit selon la direction radiale entre r et $r + \Delta_r$. Les intégrales de Ψ et de sa dérivée radiale peuvent être exprimées sous la forme :

$$\int_r^{r+\Delta_r} \Psi dr = \frac{1}{2} (\Psi(r + \Delta_r) + \Psi(r)) \Delta_r \quad (16.41)$$

$$\int_r^{r+\Delta_r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr = \Psi(r + \Delta_r) - \Psi(r) \quad (16.42)$$

La forme intégrée de l'équation 16.39 est dès lors :

$$\Psi(r + \Delta_r) - \Psi(r) = \frac{1}{2} (\gamma T + D) (\Psi(r + \Delta_r) + \Psi(r)) \Delta_r , \quad (16.43)$$

ou

$$M_2 \Psi(r + \Delta_r) = M_1 \Psi(r) , \quad (16.44)$$

avec

$$M_1 = I - \frac{1}{2}(\gamma T + D) \Delta_r \quad (16.45)$$

$$M_2 = I + \frac{1}{2}(\gamma T + D) \Delta_r \quad (16.46)$$

L'équation 16.44 permet d'évaluer successivement le vecteur Ψ pour les différentes positions radiales. Il faut toutefois évaluer préalablement le vecteur Ψ en $r = 0$. Cette évaluation fait l'objet de la section suivante.

Il convient de remarquer que le système 16.44 met en jeu une matrice tridagonale et a une taille fixée par le nombre de points selon la direction verticale. La matrice M_2 est factorisée une seule fois de telle sorte que chaque pas radial requiert un produit matrice vecteur pour la génération du membre de droite et une résolution avec la matrice factorisée. Ces caractéristiques expliquent l'efficacité numérique de la méthode parabolique.

16.6 Évaluation de Ψ en $r = 0$

Le champ initial (Ψ en $r = 0$) peut être calculé en supposant que le nombre d'onde est constant selon la direction z . Une procédure particulière doit être sélectionnée pour l'évaluation de Ψ en $r = 0$ car la localisation de la source en $(r = 0, z = 0)$ ne permet pas de faire directement usage de l'expression formelle du champ de pression rayonné par une source monopolaire. Une solution alternative consiste à exploiter une expansion en ondes planes du champ q *via* l'expression :

$$q(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} S(k_v) e^{-ik_v z - ik_r r} dk_v, \quad (16.47)$$

Le champ q requis doit vérifier l'équation 16.14 avec $k_z = k_a$:

$$\frac{\partial q}{\partial r} + ik_a q + \frac{i}{2k_a} \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0. \quad (16.48)$$

La substitution de l'équation 16.47 dans l'équation 16.48 donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(-ik_r + ik_a - \frac{ik_v^2}{2k_a} \right) S(k_v) e^{-ik_v z - ik_r r} dk_v = 0 , \quad (16.49)$$

de telle sorte que la relation de dispersion suivante doit être vérifiée :

$$k_r = k_a - \frac{k_v^2}{2k_a} . \quad (16.50)$$

L'expansion en ondes planes peut être écrite sous la forme :

$$q(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} S(k_v) e^{iF(k_v)} dk_v , \quad (16.51)$$

avec

$$F(k_v) = -k_v z - \left(k_a - \frac{k_v^2}{2k_a} \right) r . \quad (16.52)$$

L'évaluation de cette intégrale est menée en exploitant la méthode de la phase stationnaire. Les points stationnaires associés sont définis par l'équation :

$$F'(k_{v0}) = 0 , \quad (16.53)$$

ou

$$-z + \frac{2k_{v0}}{2k_a} r = 0 . \quad (16.54)$$

soit encore :

$$k_{v0} = \frac{z}{r} k_a . \quad (16.55)$$

Comme la dérivée seconde $F'' = r/k_a$ est toujours positive, on peut exprimer l'intégrale dans l'équation 16.51 :

$$q(r, z) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{F''(k_{v0})}} S(k_{v0}) e^{iF(k_{v0})} e^{i\pi/4} , \quad (16.56)$$

ou

$$q(r, z) \simeq \sqrt{\frac{2\pi k_a}{r}} S(k_{v0}) e^{-ik_a r \left(1 + \frac{z^2}{2r^2} \right)} e^{i\pi/4} , \quad (16.57)$$

La distance R entre la source (localisée en $r = 0, z = 0$) et le point d'évaluation (r, z) est donnée par :

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} = r\sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2}} \simeq r \left(1 + \frac{z^2}{2r^2} \right), \quad (16.58)$$

de telle sorte que l'équation 16.57 se reformule comme suit :

$$q(r, z) \simeq \sqrt{\frac{2\pi k_a}{r}} S(k_{v0}) e^{-ik_a R} e^{i\pi/4}, \quad (16.59)$$

Cette expression peut être comparée au champ q associé à une source monopolaire :

$$q(r, z) = \sqrt{r} \frac{e^{-ik_a R}}{R}. \quad (16.60)$$

Ceci conduit à l'identification du terme $S(k_{v0})$:

$$S(k_{v0}) = \frac{r}{R} \frac{1}{\sqrt{2i\pi k_a}}, \quad (16.61)$$

ou, en utilisant les équations 16.55 et 16.57 :

$$S(k_{v0}) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi k_a}} \left(1 + \frac{k_{v0}^2}{2k_a^2} \right)^{-1} \simeq \frac{1}{\sqrt{2i\pi k_a}} \left(1 + \frac{k_{v0}^2}{k_a^2} \right)^{-1/2}, \quad (16.62)$$

Cette expression peut encore être simplifiée en utilisant :

$$\left(1 + \frac{k_{v0}^2}{k_a^2} \right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{k_{v0}^2}{2k_a^2} \simeq e^{-\frac{k_{v0}^2}{2k_a^2}}, \quad (16.63)$$

de telle sorte que l'expression finale de $S(k_{v0})$ est :

$$S(k_{v0}) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi k_a}} e^{-\frac{k_{v0}^2}{2k_a^2}}. \quad (16.64)$$

L'expression de $q(0, z)$ qui y est associée s'obtient *via* l'équation 16.51 :

$$q(0, z) = \int_{-\infty}^{\infty} S(k_v) e^{iF(k_v)} dk_v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2i\pi k_a}} e^{-\frac{k_v^2}{2k_a^2}} e^{-ik_v z} dk_v, \quad (16.65)$$

Cette intégrale peut être évaluée analytiquement :

$$q(0, z) = \sqrt{\frac{k_a}{i}} e^{-\frac{k_a^2 z^2}{2}}. \quad (16.66)$$

Comme $q(0, z)$ est égal à $\psi(0, z)$, cette expression donne les valeurs cherchées de ψ en $r = 0$:

$$\psi(0, z) = \sqrt{\frac{k_a}{i}} e^{-\frac{k_a^2 z^2}{2}}. \quad (16.67)$$

16.7 Performances numériques

Une évaluation des performances du modèle parabolique (avec l'approximation *angle étroit*) est menée ci-dessous en exploitant le cas du rayonnement d'une source au-dessus d'un plan rigide.

16.7.1 Formulation du problème

Ce cas simple consiste à évaluer le champ rayonné par une source monopolaire dans un demi-espace délimité par une surface plane rigide. La source considérée est un monopôle localisé à 2 m de hauteur et opérant à des fréquences comprises entre 30 et 1 000 Hz. L'objectif est l'évaluation du champ de pression dans un domaine géométrique de dimensions L (dans le sens horizontal) $\times h$ (dans le sens vertical). Un système de coordonnées cylindriques (r, z) est sélectionné Figure 16.5. Le champ de pression totale résulte de la combinaison de composantes incidente et diffractée. Le champ incident est obtenu en considérant une propagation en champ libre et s'exprime sous la forme :

$$p_{free} = S \frac{e^{(-ikR_1)}}{R_1} \quad (16.68)$$

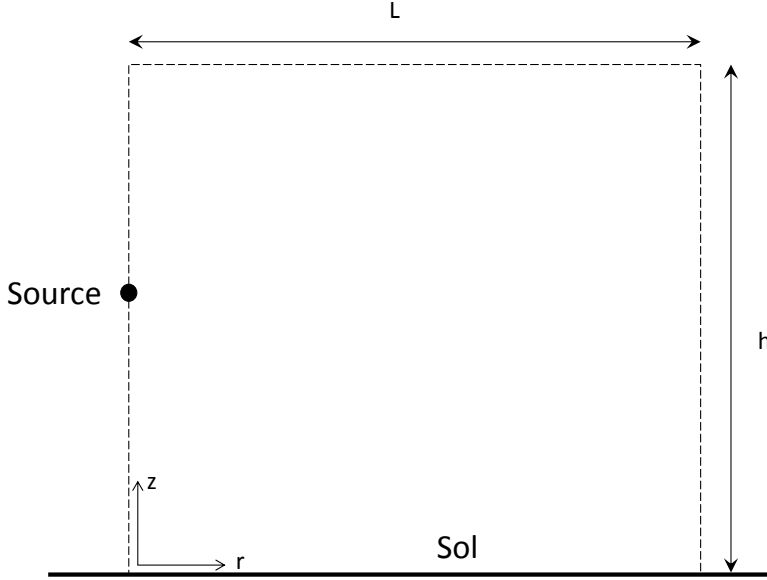


Figure 16.5: Rayonnement d'une source monopolaire au-dessus d'un plan rigide.

où S est l'amplitude de la source et R_1 représente la distance entre la source localisée en $(0, z_s)$ et le point d'évaluation localisé en (r, z) :

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z - z_s)^2} \quad (16.69)$$

Le champ diffracté (ou réfléchi) est obtenu en supposant une surface réfléchissante :

$$p_{\text{reflected}} = QS \frac{e^{(-ikR_2)}}{R_2} \quad (16.70)$$

où R_2 est la distance entre la source image localisée en $(0, -z_s)$ et le point d'évaluation :

$$R_2 = \sqrt{r^2 + (z + z_s)^2} \quad (16.71)$$

tandis que Q est le coefficient de réflexion dépendant de l'impédance de la surface. La pression totale au point d'évaluation localisé en (r, z) est donnée

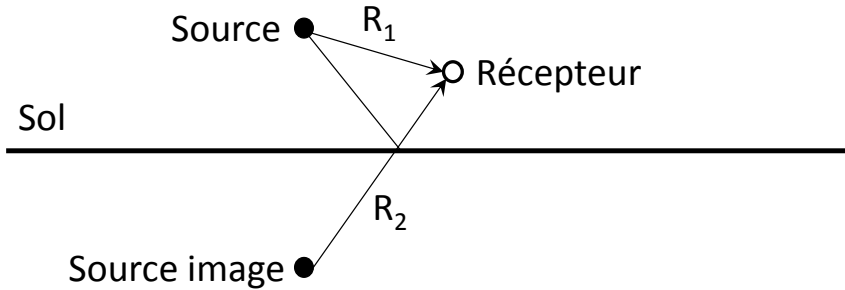


Figure 16.6: Décomposition du champ de pression totale en composantes incidente et diffractée.

par :

$$p_c = S \frac{e^{(-ikR_1)}}{R_1} + QS \frac{e^{(-ikR_2)}}{R_2} \quad (16.72)$$

16.7.2 Examen des résultats numériques

L'évaluation du champ de pression au moyen de la méthode parabolique nécessite la définition préalable d'un domaine tronqué. La partie supérieure de ce domaine met en jeu une couche absorbante. La procédure de discrétisation du problème requiert également la sélection de pas spatiaux appropriés. Le cas considéré met en jeu un domaine acoustique ayant pour tailles $L = 100$ m et $h = 100$ m. Le calcul est mené dans la bande de fréquences allant de 30 à 4 000 Hz et met en jeu mille points dans la direction verticale⁴. On peut vérifier la performance de la méthode en évaluant la réponse à quatre fréquences particulières (100, 250, 500 et 1 000 Hz). Les figures 16.7, 16.8 et 16.9 illustrent le champ de pression (logarithme de l'amplitude de la pression) à ces fréquences. Ces cartes montrent que la solution est précise pour un angle d'élévation suffisamment faible. En dehors de cette région (c'est-à-dire pour des angles d'élévation plus élevé), la précision se dégrade. Cette appréciation

4. **Salomons E. M.**, *Computational atmospheric acoustics*, Kluwer Academic Publishers, 2001.

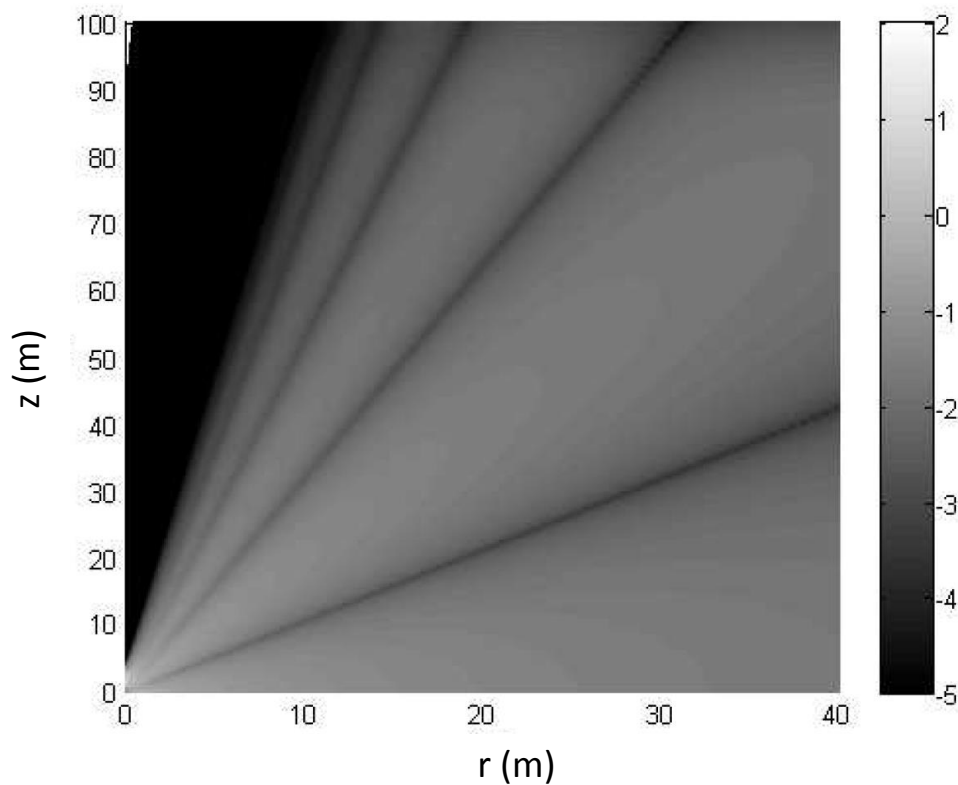


Figure 16.7: Amplitude de la pression (échelle logarithmique) à 100 Hz calculée par la méthode parabolique pour le rayonnement d'une source située à 2 m de hauteur au-dessus d'un sol rigide (domaine acoustique = $[100 \text{ m} \times 100 \text{ m}]$).

résulte d'une comparaison des solutions numériques avec la solution exacte du problème (équation 16.72) ainsi qu'indiquée à la figure 16.9 pour la fréquence de 500 Hz. La bonne précision de méthode parabolique pour des points situés à un angle d'élévation faible par rapport à la source est illustrée par les figures 16.10 et 16.11. Celles-ci permettent de comparer la solution numérique (pression) à la solution exacte à 100, 250, 500 et 1 000 Hz pour des points situés à la même hauteur que la source. L'examen de ces figures montre que l'équation parabolique donne des résultats précis aux fréquences considérées. La précision de la méthode est meilleure à de grandes distances radiales de la source. Ce comportement est bien adapté à des applications environnementales où les points d'évaluation sont traditionnellement distants de la source et positionnés à de faibles angles d'élévation.

16.8 Conclusion

La propagation de perturbations acoustiques dans l'atmosphère demande la prise en compte de phénomènes particuliers tels que l'absorption atmosphérique (très significative pour les hautes fréquences) et la réfraction induite par l'hétérogénéité du milieu (présence de gradients de température). En outre, la complexité du champ de vitesse (vent), la présence de structures turbulentes, l'absorption au niveau du sol, le relief et la présence d'obstacles (écrans, bâtiments) peuvent impacter significativement le champ rayonné par les sources.

Compte tenu du fait que la propagation s'opère sur des distances importantes (allant de quelques centaines de mètres à plusieurs kilomètres), la mise en œuvre de méthodes de calcul conventionnelles (éléments finis, éléments frontières) se révèle difficile. La méthode parabolique présentée dans ce chapitre apparaît dès lors comme une approche alternative bien adaptée au traitement de problèmes environnementaux.

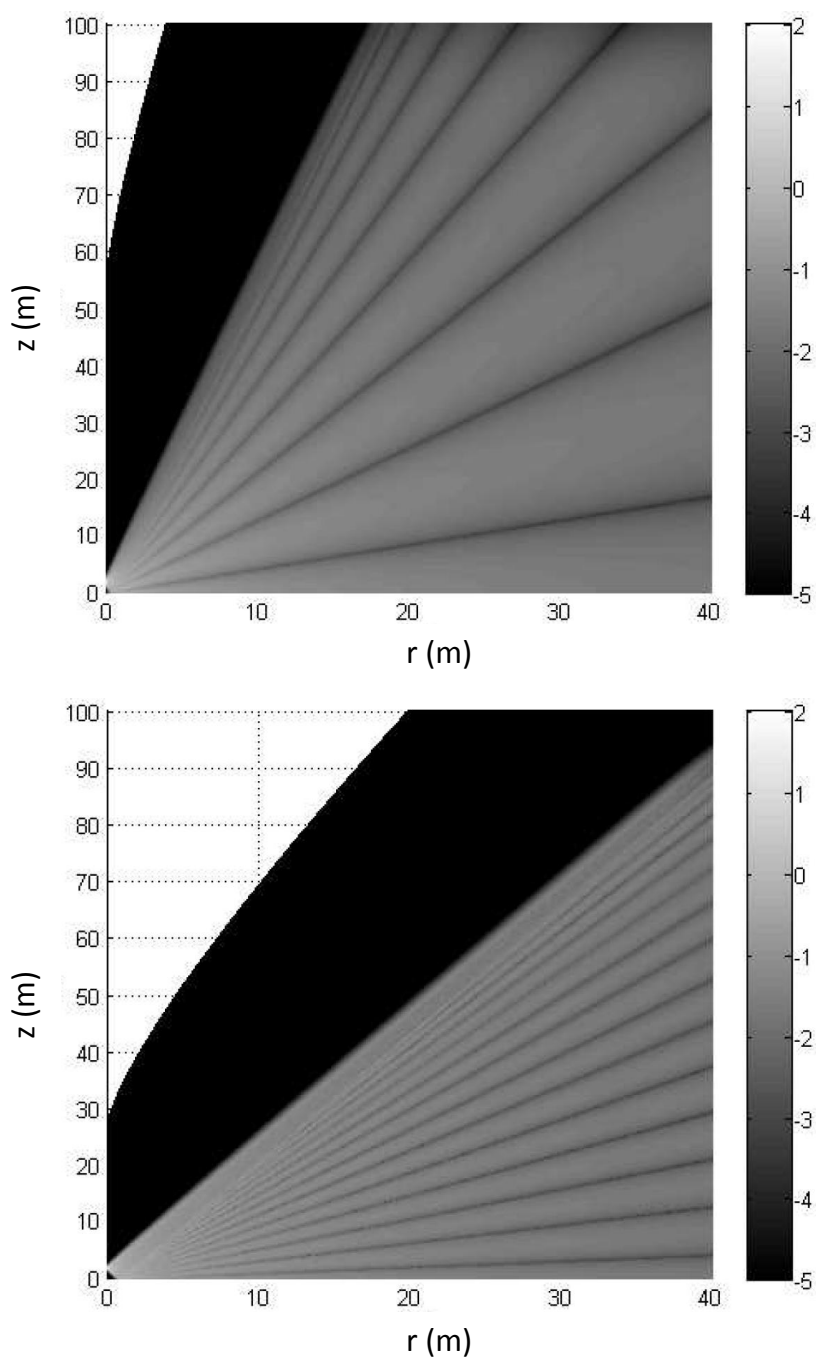


Figure 16.8: Amplitude de la pression (échelle logarithmique) à 250 et 1 000 Hz calculée par la méthode parabolique pour le rayonnement d'une source située à 2 m de hauteur au-dessus d'un sol rigide (domaine acoustique = $[100 \text{ m} \times 100 \text{ m}]$).

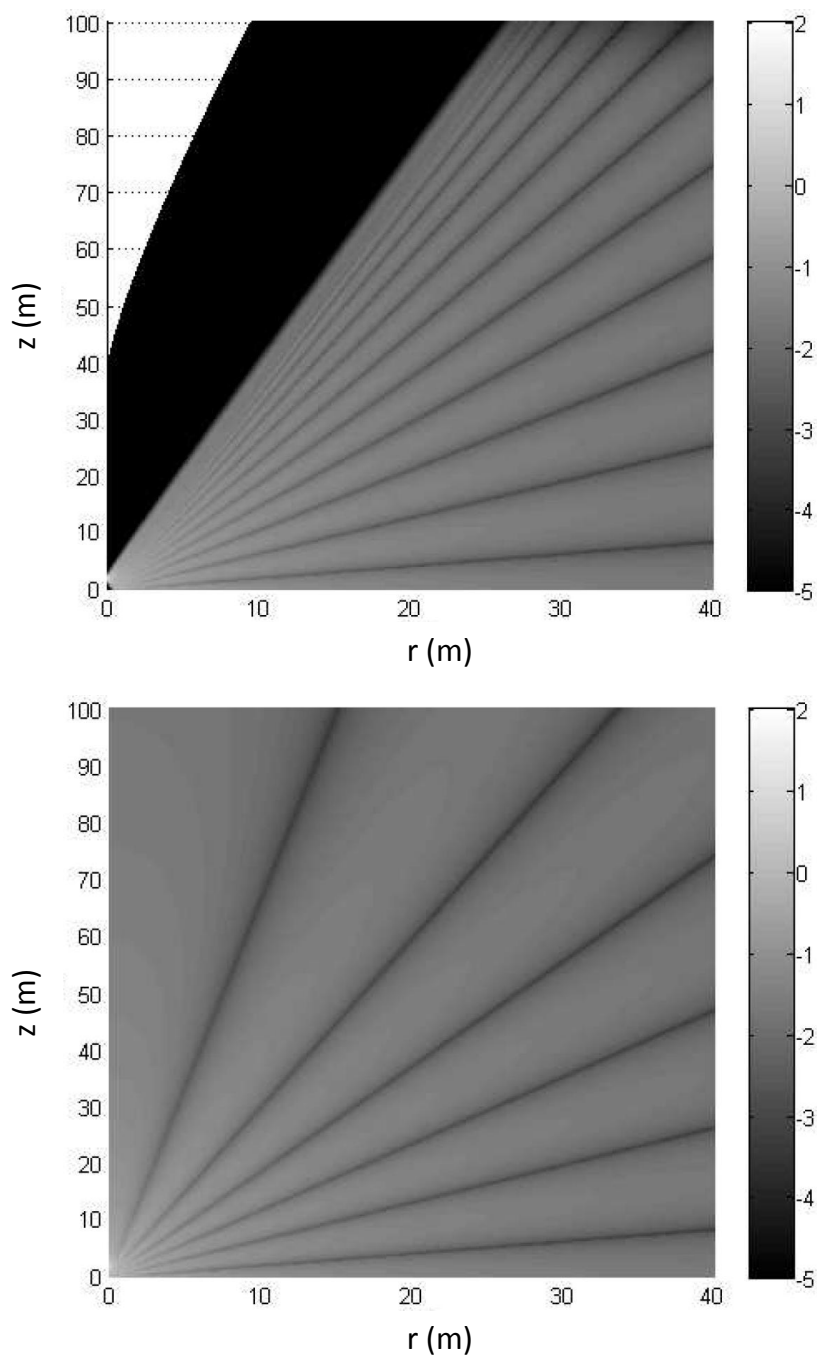
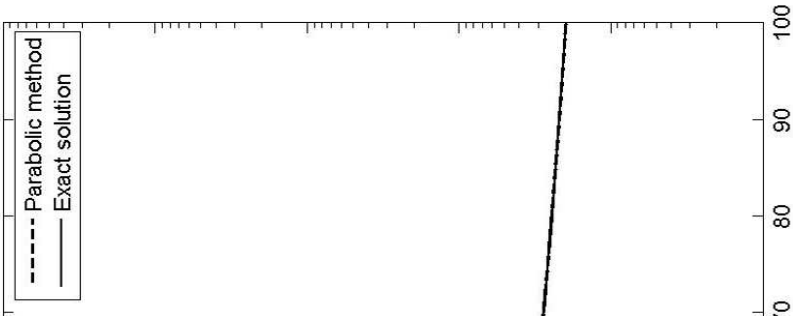
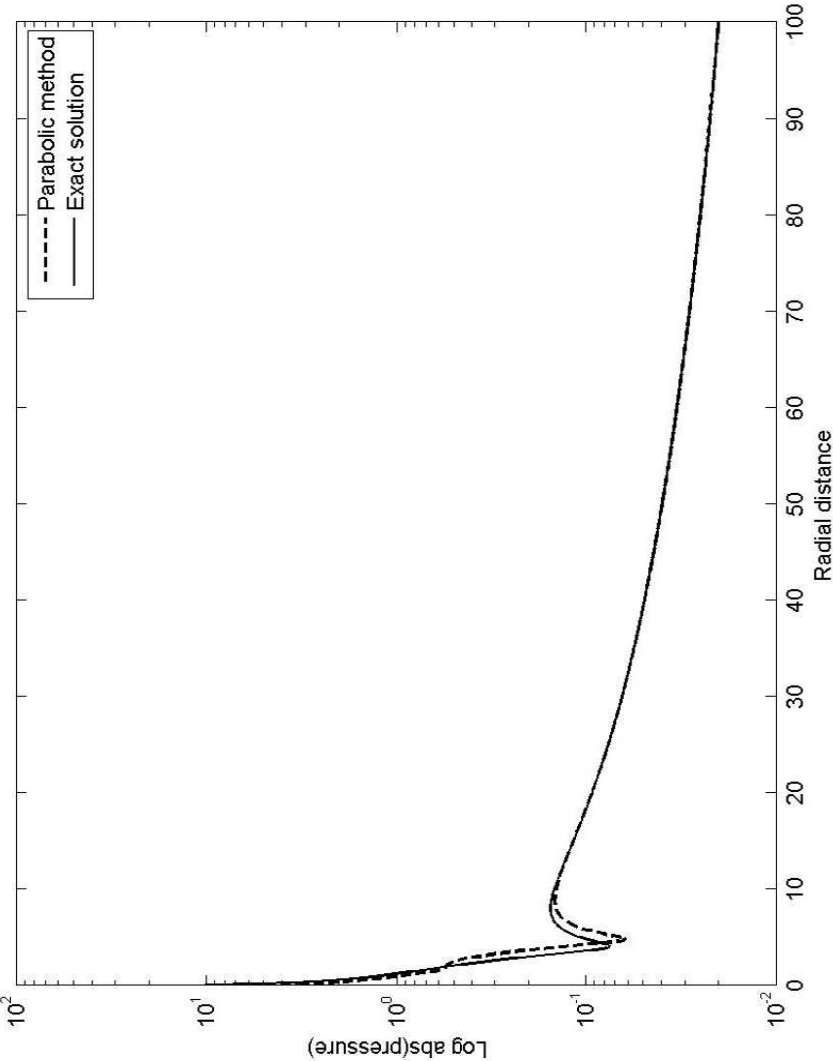
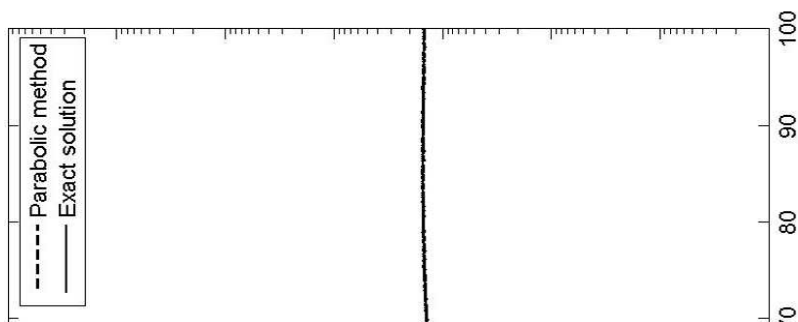
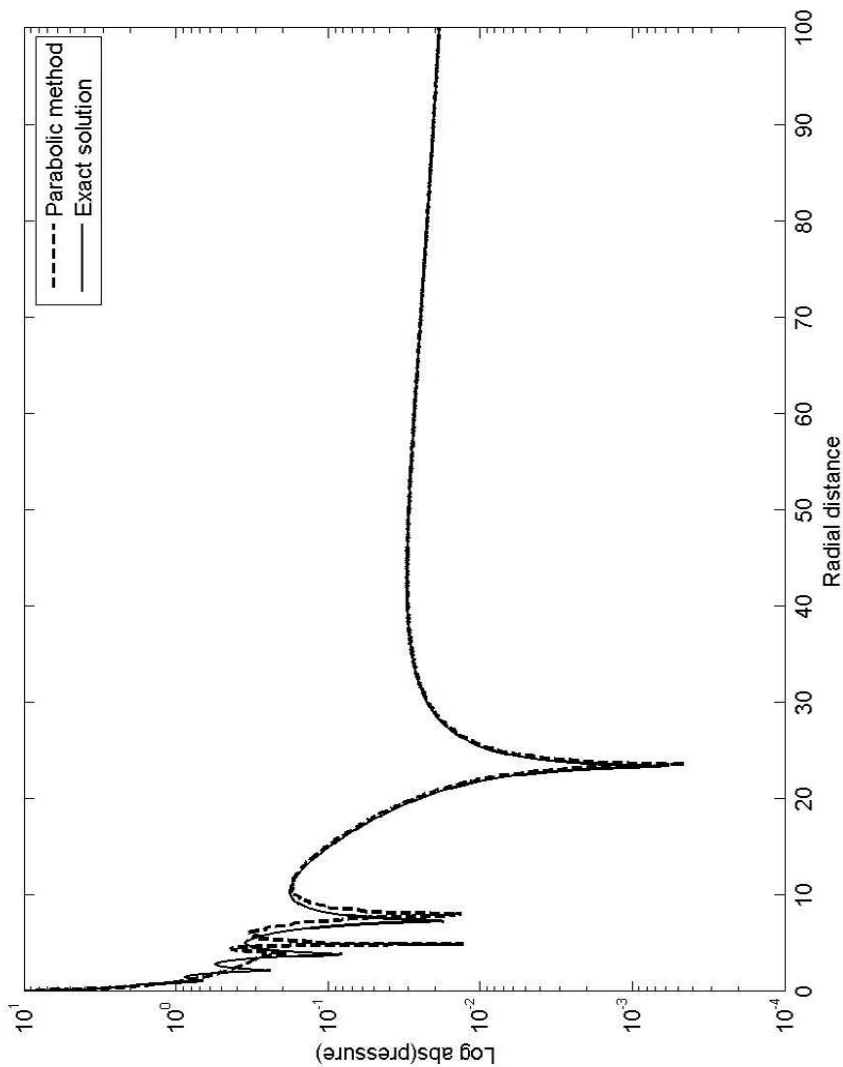


Figure 16.9: Amplitude de la pression (échelle logarithmique) à 500 Hz pour le rayonnement d'une source située à 2 m de hauteur au-dessus d'un sol rigide (domaine acoustique = $[100 \text{ m} \times 100 \text{ m}]$). La méthode parabolique est utilisée pour produire l'image du haut alors que l'image du bas donne le résultat d'un calcul exact.





17

INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

Contents

17.1 Masse-ressort et colonne de fluide	386
17.2 Interaction fluide-structure	395
17.3 Cadre général d'analyse vibro-acoustiques	404

Nous étudierons à présent l'effet du champ acoustique rayonné par une structure sur la dynamique de cette structure elle-même. La structure et le fluide acoustique constituent en effet un système couplé, l'un agissant sur l'autre et réciproquement.

17.1 Système masse-ressort couplé à une colonne de fluide

17.1.1 Cas général

Soit un système masse-ressort connecté à un composant acoustique tel que la pression acoustique est uniforme au droit du piston. La dynamique du piston est représentée par sa rigidité K , sa masse m et son amortissement d ; une force extérieure F lui est appliquée et on note u son déplacement. La vitesse des particules de fluide au droit du piston est $i\omega u$ et si le composant acoustique est caractérisé par une impédance Z_a alors la pression acoustique agissant sur le piston est $i\omega Z_a u$. L'équation dynamique du système masse-ressort couplé au composant acoustique est :

$$Z_s u = F - Sp \quad (17.1)$$

en notant $Z_s = K + i\omega d - \omega^2 m$. En remplaçant p par sa valeur et en regroupant à gauche les termes en u on obtient l'équation modifiée :

$$(Z_m + i\omega Z_a S) u = F \quad (17.2)$$

Pour être conforme aux unités (force sur déplacement) et à la convention de signe (force et pression sont positives dans des direction opposées) on peut définir une impédance ζ_a qui est l'équivalent mécanique de Z_a :

$$\zeta_a = -i\omega Z_a S \quad (17.3)$$

Avec cette notation, l'équation dynamique du piston s'écrit :

$$(Z_m - \zeta_a) u = F \quad (17.4)$$

Si on pose alors :

$$\mu = \frac{Z_m}{\zeta_a} \quad (17.5)$$

on trouve successivement :

$$u = \frac{F}{Z_m - \zeta_a} = -\frac{F}{Z_m} \cdot \frac{\mu}{\mu - 1} \quad (17.6)$$

$$v = \frac{i\omega F}{Z_m - \zeta_a} = \frac{i\omega F}{Z_m} \cdot \frac{\mu}{\mu - 1} \quad (17.7)$$

$$p = -\frac{F}{S} \frac{\zeta_a}{Z_m - \zeta_a} = -\frac{F}{S} \cdot \frac{1}{1 - \mu} \quad (17.8)$$

Notons que la deuxième forme de chaque résultat ci-dessus, celle utilisant l'impédance réduite μ , présente pression, vitesse et déplacement couplé comme égaux à leurs homologues non couplés mais multipliés par un facteur d'amplification (ou de réduction) dû au couplage. Ce facteur est :

$$\frac{p_c}{p_u} = \frac{1}{1 - \mu} \quad (17.9)$$

pour la pression et

$$\frac{u_c}{u_u} = \frac{v_c}{v_u} = \frac{\mu}{\mu - 1} \quad (17.10)$$

pour le déplacement et la vitesse ; les indices u et c réfèrent respectivement aux conditions non couplées (u pour *uncoupled*) et couplées (c pour *coupled*).

On peut noter que :

- μ et les facteurs d'amplification sont complexes et fonctions de la fréquence ;
- les déplacements (ou les vitesses) couplé et non couplé sont égaux lorsque $\mu = \infty$ c'est-à-dire lorsque $\zeta_a = 0$;
- les déplacements (ou les vitesses) couplé et non couplé sont de même amplitude mais déphasés de π lorsque $\mu = \frac{1}{2}$ ($\zeta_a = 2Z_m$) ;
- les pressions couplée et non couplée sont égales lorsque $\mu = 0$ ($Z_m = 0$) et sont de même amplitude mais déphasées de π lorsque $\mu = 2$ ($Z_m = 2\zeta_a$).

On voit aussi que le système couplé est résonant lorsque $Z_m = \zeta_a$ (adaptation d'impédance). D'une manière générale, l'impédance mécanique se voit

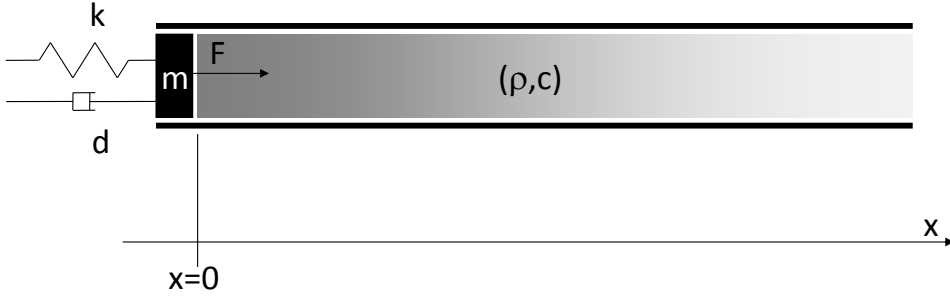


Figure 17.1: Système masse-ressort couplé à une colonne de fluide d'extension infinie.

augmentée d'une impédance additionnelle $-\zeta_a$; celle-ci dépend de la fréquence mais, à une fréquence donnée, possède une partie réelle et une partie imaginaire. La partie réelle vient s'ajouter soit au terme de rigidité ($\Re(\zeta_a) > 0$, rigidité ajoutée) ou de masse ($\Re(\zeta_a) < 0$, masse ajoutée) et la partie imaginaire ($\Im(\zeta_a)$, amortissement ajouté) accroît le terme de perte et représente l'énergie consommée par le piston pour engendrer et maintenir le champ acoustique.

17.1.2 Colonne de longueur infinie

Considérons Figure 17.1 un système masse-ressort couplé à une colonne infinie de fluide de masse volumique ρ et de vitesse du son c . L'impédance acoustique vaut :

$$Z_a = \rho c \rightarrow \zeta_a = -i\rho\omega cS \quad (17.11)$$

L'équation dynamique s'écrit donc :

$$(-\omega^2 m + i\omega(d + \rho cS) + K)U = F \quad (17.12)$$

L'effet de la colonne de fluide sur le système masse-ressort consiste donc en un *amortissement ajouté*. L'énergie dissipée dans cet amortisseur fictif est bien entendu égale à l'énergie propagée par l'onde acoustique engendrée dans la

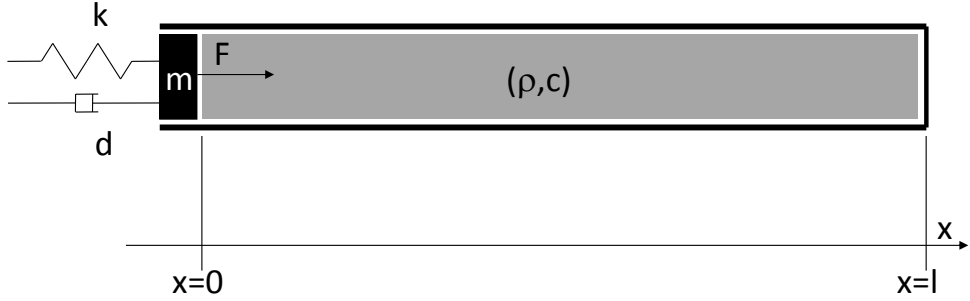


Figure 17.2: Système masse-ressort couplé à une colonne de fluide d'extension finie.

colonne de fluide :

$$\begin{aligned} W_{\text{amortisseur}} &= \frac{1}{2} \Re(F_{\text{amortisseur}} \cdot v^*) \\ &= \frac{1}{2} \Re[(i\omega \rho c S U) \cdot (i\omega U)] = \frac{\rho c S \omega^2 U^2}{2} \end{aligned} \quad (17.13)$$

$$W_{\text{rad}} = I_a \cdot S = S \cdot \frac{|p|^2}{2\rho c} = \frac{\rho c S \omega^2 U^2}{2} \quad (17.14)$$

17.1.3 Colonne de longueur finie

Considérons à présent le cas d'une colonne fluide finie Figure 17.2. Dans ce cas, l'impédance vaut (Equation 9.13) :

$$Z(\omega, x=0) = -i\rho c \frac{\cos kl}{\sin kl} \rightarrow \zeta_a = -\rho c \omega S \frac{\cos kl}{\sin kl} \quad (17.15)$$

ζ_a est purement réelle et contribue donc, suivant les fréquences, à la masse ajoutée ou à la rigidité ajoutée. Il n'y a pas de terme d'amortissement ajouté puisque, le champ acoustique engendré dans le tube étant stationnaire, il n'y a pas d'intensité active propagée et donc pas de perte par rayonnement acoustique : l'énergie transmise au fluide par la masse pendant une partie du cycle lui est restituée pendant l'autre partie du cycle. Le système couplé sera

résonant lorsque $Z_m = \zeta_a$:

$$(K + i\omega d - \omega^2) = -\rho c \omega S \frac{\cos kl}{\sin kl} \quad (17.16)$$

ce qu'on peut réécrire :

$$K \left(1 + 2i\xi \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) = -\frac{\rho c^2 S}{l} kl \cot kl \quad (17.17)$$

Soit encore :

$$\frac{K}{\frac{\rho c^2 S}{l}} \cdot \left(1 + 2i\xi \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) = -kl \cot kl \quad (17.18)$$

où ω_0 est la fréquence de résonance $\sqrt{\frac{k}{m}}$ et ξ est le coefficient d'amortissement $\frac{d}{2\sqrt{Km}}$. Le premier facteur du membre de gauche mesure la rigidité relative du ressort et de la colonne de fluide ; le second est le coefficient d'amplification dynamique du système masse-ressort non couplé. Les résonances du système couplé masse-ressort-tube apparaissent aux intersections des courbes représentant les deux membres de l'équation précédente Figure 17.3.

Considérons encore deux cas particuliers caractérisés par les valeurs suivantes des paramètres : $\rho = 1.225$, $c = 340$, $l = 1$, $S = 1$, $d = 2\xi\sqrt{km}$ avec $\xi = 0.02$, m vaut 1 dans le premier cas et 5 dans le second, K est choisi de telle sorte que la fréquence propre du système masse-ressort non couplé soit à 300 Hz. Le premier cas correspond à un couplage fort car la masse de fluide contenue dans le tube (1.225 kg) est voisine de la masse du système masse-ressort (1 kg). Le second correspond à un couplage plus faible. La réponse dynamique du système peut s'analyser en consultant les figures 17.4 et 17.5. On peut y observer les éléments suivants :

1. L'impédance acoustique est nulle pour $kl = \frac{\pi}{2} + n\pi$ c'est-à-dire lorsque le tube est un résonateur quart d'onde. À ces fréquences, le système masse-ressort se comporte exactement comme s'il n'y avait pas de tube puisque la pression acoustique agissant sur le piston (p_0) est nulle. Ces points sont indiqués par un \times sur la figure 17.4.
2. Aux deux fréquences pour lesquelles $Z_a = -2Z_m$ on a $Z_a + Z_m = -Z_m$ et les réponses des systèmes couplés et non couplés sont égales mais en opposition de phase. Ces points sont représentés par des cercles pleins sur la figure 17.4.

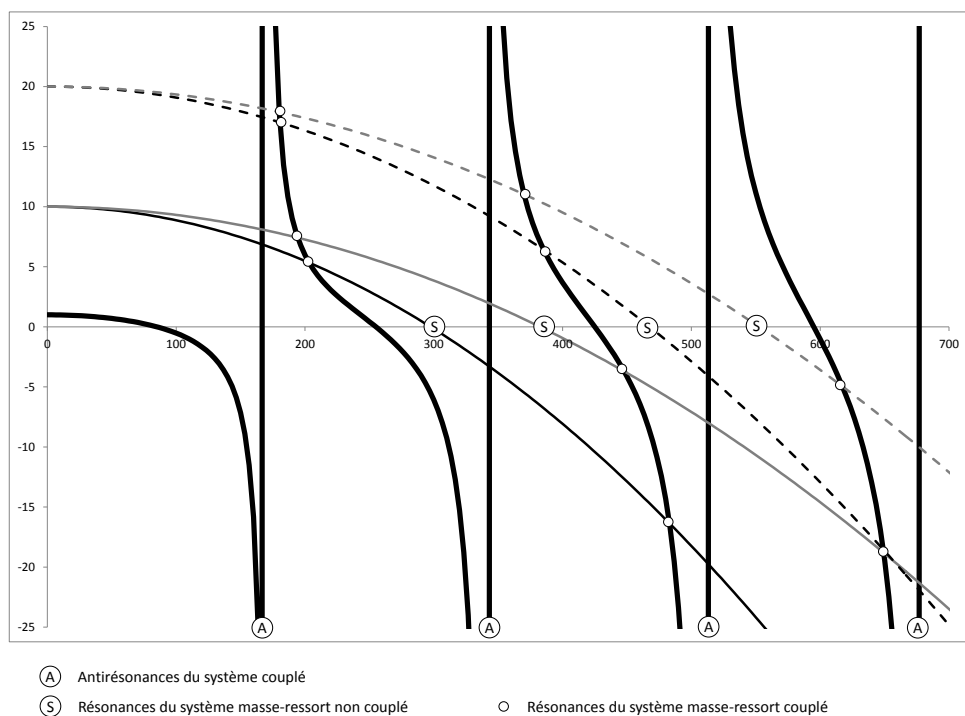


Figure 17.3: Analyse des fréquences de résonance d'un système masse-ressort (non amorti) couplé à une colonne de fluide pour différentes valeurs de la rigidité relative $\frac{Kl}{\rho c^2 S}$ et de la fréquence de résonance du système masse-ressort non couplé (ω_0). Les résonances du système couplé ($Z_m = \zeta_a$) sont toujours précédées ($\omega < \omega_0$) ou suivies ($\omega > \omega_0$) d'une antirésonance ($\zeta_a = \infty$) où le fluide impose une résistance infinie au piston.

3. Le système présente des antirésonances (réponse nulle) lorsque $kl = n\pi$ (170, 340, 510, etc.) puisque l'impédance acoustique (et donc l'impédance totale) devient infinie. À ces fréquences, tout mouvement de la masse engendre une contre-pression infinie ; il n'y a donc ni mouvement ($U = 0$), ni pression ($p = 0$). Ces points sont représentés par des losanges pleins sur la figure 17.4.
4. Le système couplé présente des résonances lorsque l'impédance totale du système $Z_a + Z_m$ est nulle. Ces points sont représentés par des carrés pleins sur la figure 17.4. La deuxième résonance (282 Hz, carré gris) correspond à celle du système masse-ressort mais elle apparaît à une fréquence inférieure à celle observée dans le cas non couplé. L'impédance acoustique est en effet négative au voisinage de 300 Hz et agit comme une *masse ajoutée* d'où le décalage vers la gauche de la fréquence propre correspondante. Ce décalage est plus important dans le cas du couplage fort ($m = 1$) que dans celui du couplage faible ($m = 5$).
5. Les autres résonances sont des résonances acoustiques mais elles ne se produisent pas aux fréquences pour lesquelles $Z_a = 0$. Au contraire, plus l'ordre de la résonance augmente, plus l'impédance mécanique est grande (positive pour la résonance 1, négative pour 3 et 4) et plus la résonance couplée correspondra à une valeur de $Z_a = -Z_m$ élevée. Les fréquences de résonances *acoustiques* du système couplé sont donc proches des fréquences d'*antirésonance* du système acoustique non couplé. Elles sont situées juste avant la première résonance (de manière à avoir $Z_a > 0$ puisque $Z_m < 0$ à cette fréquence) et juste après les autres ($Z_m < 0$ et donc il faut avoir $Z_a > 0$).
6. On observe donc un pic simple pour la résonance de type structure et des couples résonance-antirésonance pour les résonances de type fluide.

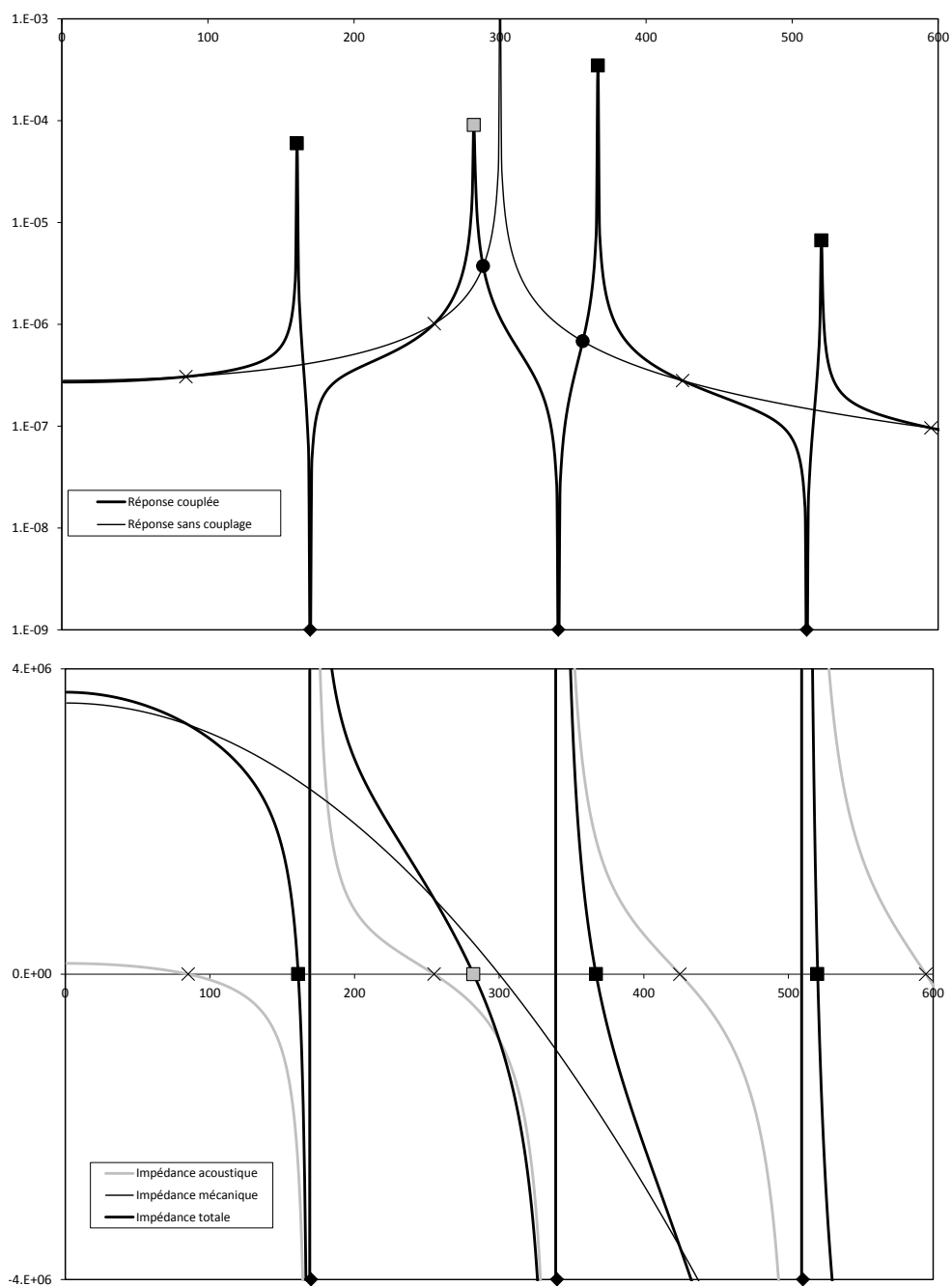


Figure 17.4: Graphe du dessus : réponse dynamique d'un système masse-ressort non amorti couplé à un tube (couplage fort : $m = 1$). La réponse couplée est en trait épais, la réponse non couplée en trait fin. **Graphe du dessous :** impédance de l'air (trait gris), impédance mécanique (trait noir fin) et impédance totale (trait noir épais) d'un système masse-ressort non amorti couplé à un tube (cas $m = 1$).

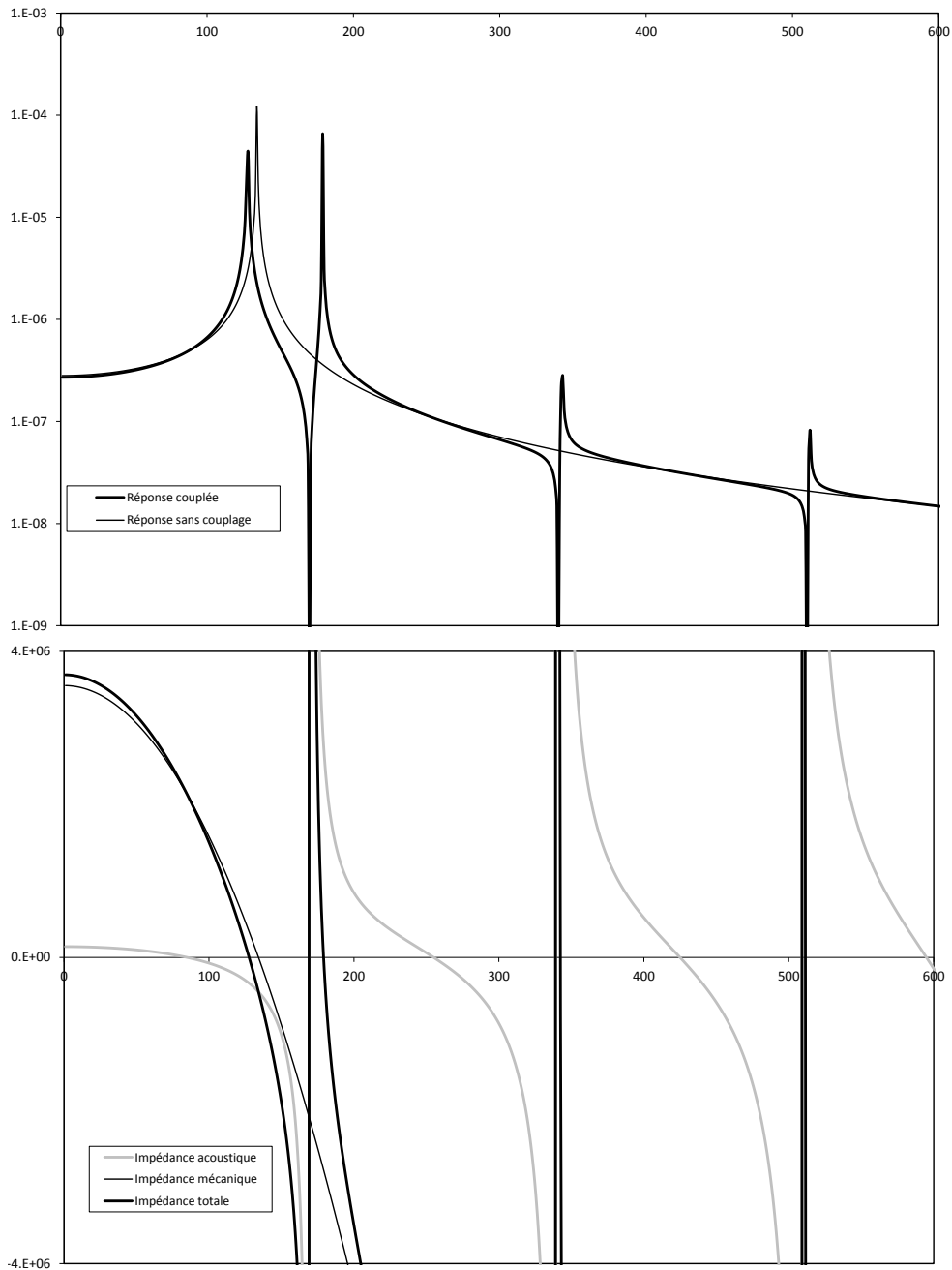


Figure 17.5: Graphe du dessus : réponse dynamique d'un système masse-ressort non amorti couplé à un tube (couplage faible : $m = 5$). La réponse couplée est en trait épais, la réponse non couplée en trait fin. **Graphe du dessous :** impédance de l'air (trait gris), impédance mécanique (trait noir fin) et impédance totale (trait noir épais) d'un système masse-ressort non amorti couplé à un tube.

17.2 Interaction fluide-structure

Nous présenterons ici une théorie générale de l'interaction fluide-structure qui généralise les concepts vus ci-dessus. Cette théorie s'exprime dans un formalisme matriciel tel qu'il ressortirait par exemple d'une discrétisation numérique par éléments finis. Il est important toutefois de noter que les concepts identifiés sont généraux et indépendants du formalisme adopté.

17.2.1 Origine du couplage

Considérons le comportement vibro-acoustique d'un domaine fluide F interagissant avec une structure S . Si la structure est décomposée en éléments finis, son comportement dynamique harmonique est décrit par le système d'équations :

$$\left[K_s + i\omega C_s - \omega^2 M_s \right] (u) = (F_s) \quad (17.19)$$

avec K_s la matrice de rigidité de la structure, M_s sa matrice de masse, C_s sa matrice d'amortissement, u le vecteur des déplacements nodaux, F le vecteur des amplitudes complexes des forces harmoniques appliquées à la structure. Le domaine fluide est également décomposé en éléments finis et la distribution de pression est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\left[K_f + i\omega C_f - \omega^2 M_f \right] (p) = (F_f) \quad (17.20)$$

Les vibrations de la structure et le champ de pression dans le fluide sont en fait interdépendants puisque :

- la pression acoustique excite les vibrations de la structure c'est-à-dire qu'aux forces extérieures appliquées F_s s'ajoute un terme de force distribué proportionnel à p ;
- les vibrations de la structure constituent la source du champ de pression et le terme F_f est proportionnel aux vitesses de vibration c'est-à-dire à $-i\omega u$.

Quantifions successivement ces deux mécanismes de couplage. Une distribution de pression p sur S représente un chargement dynamique distribué ; la

force nodale (normale) induite au nœud i par cette pression est donnée par :

$$F_{sni} = - \int_S N_i^u p dS \quad (17.21)$$

où N_i^u est la fonction de forme utilisée pour approximer les déplacements au voisinage du nœud i (N_i^u vaut 1 au nœud i et est nulle en tous les autres nœuds). Si on introduit l'expression de p en fonction des pressions nodales p_i et des fonctions de forme associées au maillage acoustique, on obtient, en supposant pour simplifier que les maillages de la structure et du fluide sont compatibles :

$$F_{sni} = - \sum_j p_j \int_S N_i^u N_j^p dS \quad (17.22)$$

On peut aisément passer de la force normale au vecteur force en la multipliant par le vecteur normal unitaire au nœud i :

$$\vec{F}_{si} = F_{sni} \vec{n}_i \quad (17.23)$$

On peut écrire cette relation de manière matricielle en introduisant la matrice de couplage C qui relie le vecteur des forces nodales induites par la pression au vecteur des pressions nodales :

$$(F_s^p) = -[C](p) \quad (17.24)$$

On peut alors écrire le système d'équations pour les déplacements nodaux de la structure en présence d'un champ de pression acoustique p de la manière suivante :

$$\left[K_s + i\omega C_s - \omega^2 M_s \right] (u) = (F_s) - [C](p) \quad (17.25)$$

Les dimensions de la matrice C sont les suivantes : le nombre de lignes est égal au nombre de degrés de liberté de la structure et le nombre de colonnes est égal au nombre de degrés de liberté du fluide. De la même manière, le déplacement normal de la structure engendre un second membre au système d'équations décrivant le milieu acoustique :

$$F_{fi} = -i\rho\omega \int_S v_n N_i^p dS \quad (17.26)$$

Introduisons l'expression de v_n en fonction des déplacements nodaux u_{ni} et des fonctions de forme associées au maillage structure :

$$F_{fi} = \rho\omega^2 \sum_j u_{nj} \int_S N_j^u N_i^p dS \quad (17.27)$$

En remplaçant le déplacement normal par le vecteur déplacement, on peut de nouveau écrire cette relation sous la forme :

$$(F_f^u) = -\rho\omega^2 [C]^t(u) \quad (17.28)$$

qui fait apparaître la même matrice $[C]$. On a donc le système suivant pour le champ acoustique en présence d'une structure vibrante (en supposant que les vibrations de la structure sont la seule source acoustique, c'est-à-dire que $F_f = 0$) :

$$\left[K_f + i\omega C_f - \omega^2 M_f \right] (p) = -\rho\omega^2 [C]^t(u) \quad (17.29)$$

Les équations obtenues pour la structure et le fluide peuvent être regroupées de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} K_s + i\omega C_s - \omega^2 M_s & C \\ \rho\omega^2 C^t & K_f + i\omega C_f - \omega^2 M_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.30)$$

17.2.2 Couplage faible et couplage fort

En théorie, tous les systèmes vibro-acoustiques sont couplés, c'est-à-dire qu'on ne peut déterminer séparément les déplacements de la structure et le champ de pression dans le fluide puisque les deux champs s'influencent mutuellement. Dans de nombreux cas concrets cependant, on néglige l'impact du champ acoustique sur la structure pour ne considérer que l'effet de la structure sur le fluide. Ceci revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} K_s + i\omega C_s - \omega^2 M_s & 0 \\ \rho\omega^2 C^t & K_f + i\omega C_f - \omega^2 M_f \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.31)$$

qui peut être résolu en deux étapes :

1. élimination des déplacements par résolution du premier groupe d'équations ne faisant intervenir que les degrés de liberté de la structure ;
2. calcul des pressions en insérant les déplacements obtenus à l'étape précédente dans le second groupe d'équations.

Cette approche est valable si l'impact du champ acoustique sur la structure est effectivement faible ce qui est le cas si la structure est suffisamment rigide et/ou si le fluide est suffisamment léger. On comprend bien par exemple que les vibrations d'un bloc moteur ne sont pas affectées par l'air qui l'entoure (structure très rigide et fluide léger). Inversement, les vibrations d'une coque de navire sont affectées par le champ de pression qui se développe dans l'eau (structure flexible et fluide lourd). De la même manière, la dynamique d'une membrane de haut-parleur est modifiée par la masse d'air qu'elle doit déplacer (fluide léger mais structure également légère). Dans ces deux derniers cas, le couplage est dit *fort* et on doit résoudre le système complet soit directement, soit en projetant chacun des deux sous-systèmes dans sa base modale propre.

17.2.3 Approches modales

Les équations relatives à la structure peuvent être projetées dans la base modale appropriée Φ_s :

$$\begin{bmatrix} [\Phi_s]^t [K_s + i\omega C_s - \omega^2 M_s] [\Phi_s] & [\Phi_s]^t [C] \\ \rho\omega^2 [C]^t [\Phi_s] & [K_f + i\omega C_f - \omega^2 M_f] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_s \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\Phi_s]^t F_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.32)$$

où les coefficients a_s sont les facteurs de participation modaux ($u = \Phi_s \cdot a_s$). Si le domaine fluide est borné, la partie acoustique peut également être projetée dans sa propre base modale Φ_f :

$$\begin{bmatrix} [\Phi_s]^t [K_s + i\omega C_s - \omega^2 M_s] [\Phi_s] & [\Phi_s]^t [C] [\Phi_f] \\ \rho\omega^2 [\Phi_f]^t [C]^t [\Phi_s] & [\Phi_f]^t [K_f + i\omega C_f - \omega^2 M_f] [\Phi_f] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_s \\ a_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\Phi_s]^t F_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.33)$$

où les coefficients a_f sont les facteurs de participation modaux ($p = \Phi_f \cdot a_f$)

17.2.4 Impédance de rayonnement

Reprenons le système couplé et introduisons, pour alléger les notations, les matrices d'impédance de la structure (Z_s) et du fluide¹ (Z_f) :

$$\begin{bmatrix} Z_s & C \\ \rho\omega^2 C^t & Z_f \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.34)$$

Éliminons la pression du système en écrivant successivement :

$$p = -\rho\omega^2 Z_f^{-1} C^t u \quad (17.35)$$

$$(Z_s - \rho\omega^2 C Z_f^{-1} C^t) u = F_s \quad (17.36)$$

soit en posant $\zeta_f = \rho\omega^2 C Z_f^{-1} C^t$

$$(Z_s - \zeta_f) u = F_s \quad (17.37)$$

La matrice ζ_f est appelée impédance de rayonnement ; elle généralise le coefficient ζ_a des sections précédentes (Equation 17.3). Sa partie réelle est de type masse et rigidité ajoutée (il n'est pas possible, ici, de séparer les effets *positifs* et *négatifs*) et sa partie imaginaire de type amortissement/dissipation ajouté.

17.2.5 Analyse qualitative d'un système à couplages multiples

Un système d'échappement génère deux composantes sonores distinctes :

- **le bruit de bouche** rayonné à l'extrémité du silencieux possède lui-même deux composantes :

1. On parle de matrice d'impédance acoustique dans le sens où elle relie deux grandeurs acoustiques harmoniques ; cependant, dans ce contexte, il s'agirait plutôt d'une matrice d'admittance.

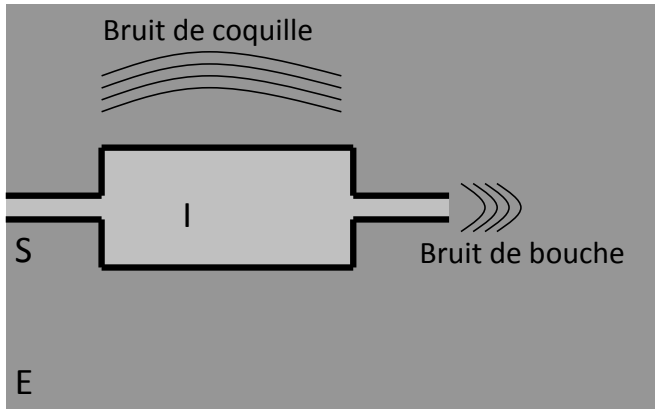


Figure 17.6: Représentation schématique d'un pot d'échappement et de son environnement. S désigne la structure, I le milieu acoustique interne et E le milieu acoustique externe.

- le signal résiduel provenant du moteur et filtré par les différents éléments du silencieux (voir le chapitre 10) ;
- le *bruit de souffle* résultant de l'écoulement turbulent des gaz d'échappement dans le silencieux, particulièrement dans le changement de section entre la dernière chambre d'expansion et la canule de sortie ;
- le **bruit de coquille** est engendré par les vibrations de la structure mécanique du pot d'échappement sous l'effet :
 - des forces extérieures appliquées, par exemple au travers des liaisons mécaniques entre le pot et le moteur ou le châssis ;
 - du champ acoustique existant à l'intérieur et à l'extérieur du pot d'échappement.

Il ne s'agit pas ici de détailler ces composantes de bruit mais d'utiliser cet exemple pour réaliser une analyse qualitative d'un problème multi-couplé. Le problème considéré Figure 17.6 se décompose en trois sous-modèles :

1. un modèle du champ acoustique interne (I) : une onde plane incidente à l'entrée induit dans le silencieux un champ acoustique caractérisé par la distribution de pression acoustique p_I ;
2. un modèle dynamique du silencieux (S) : le champ acoustique interne agit comme une excitation mécanique sur cette structure y induisant des vibrations u ;

3. un modèle acoustique du champ acoustique externe (E) : ces vibrations du pot sont transmises au milieu extérieur et y génèrent un champ acoustique p_E .

Les champs p_I et p_E sont par ailleurs couplés au travers de la bouche du pot d'échappement. Si chacun des composants est modélisé par une méthode d'éléments finis, le système d'équations global est de la forme :

$$\begin{bmatrix} Z_I & \rho\omega^2 C_{IS} & C_{IE} \\ C_{SI} & Z_S & C_{SE} \\ C_{EI} & \rho\omega^2 C_{ES} & Z_E \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_I \\ u \\ p_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_I \\ F_S \\ F_E \end{pmatrix} \quad (17.38)$$

Ce système peut être résolu tel quel mais il est intéressant, ne serait-ce que d'un point de vue formel, de considérer un système faiblement couplé basé sur les **hypothèses** énoncées ci-dessous.

1. Il n'y a pas de couplage direct entre champs acoustiques interne et externe ; nous considérons donc exclusivement le bruit de coquille et n'incluons le champ interne que comme excitation mécanique agissant sur le pot. Ceci revient à poser $C_{IE} = C_{EI} = 0$.
2. Il n'y a pas d'excitation mécanique autre que p_i et donc $F_S = 0$.
3. Il n'y a pas de source de bruit à l'extérieur du silencieux (autres que les vibrations du pot) et donc $F_E = 0$.
4. Le champ acoustique interne charge dynamiquement la structure et y induit des vibrations mais ce champ n'est pas en retour affecté par les vibrations. On pose donc $C_{IS} = 0$.
5. Les vibrations du silencieux engendrent le champ p_e mais ne sont pas affectées par lui ($C_{SE} = 0$).
6. Les deux dernières hypothèses sont justifiées par la différence de niveau entre le champ p_I et le champ acoustique rayonné par la structure.

Ces hypothèses conduisent au système modifié :

$$\begin{bmatrix} Z_I & 0 & 0 \\ C_{SI} & Z_S & 0 \\ 0 & \rho\omega^2 C_{ES} & Z_E \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_I \\ u \\ p_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.39)$$

qui est en fait constitué de trois sous-systèmes d'équations découplés qui peuvent être résolus successivement, de manière étagée, la résolution de cha-

cune produisant le membre de droite de l'équation suivante :

$$Z_I p_I = F_I \quad (17.40)$$

$$Z_S u = -C_{SI} p_I \quad (17.41)$$

$$Z_E p_E = -\rho \omega^2 C_{ES} u \quad (17.42)$$

Utilisons maintenant une décompositioon modale pour u et p_I :

$$p_I = \Phi_I a_I \quad (17.43)$$

$$u = \Phi_S a_S \quad (17.44)$$

ce qui conduit aux équations :

$$\left(\Phi_I^t Z_I \Phi_I \right) a_I = \Phi_I^t F_I \quad (17.45)$$

$$\left(\Phi_S^t Z_S \Phi_S \right) a_S = -\Phi_S^t C_{SI} \Phi_I a_I \quad (17.46)$$

$$Z_E p_E = -\rho \omega^2 C_{ES} \Phi_S a_S \quad (17.47)$$

Introduisons également la matrice de rayonnement modal Φ_E définie comme suit :

$$Z_E \Phi_E = -\rho \omega^2 C_{ES} \Phi_S \quad (17.48)$$

Cette matrice permet d'écrire le champ rayonné sous la forme d'une combinaison linéaire de termes représentant la pression rayonnée individuellement par chacun des modes de la structure :

$$p_E = \Phi_E a_S \quad (17.49)$$

La puissance acoustique rayonnée par le pot est donnée par :

$$W_{rad} = \frac{1}{2} \int_S p v_n^* dS \quad (17.50)$$

soit :

$$\begin{aligned} W_{rad} &= \frac{i\omega}{2} a_S^t \cdot \left[\int_S \Phi_E^t C_{ES} \Phi_S dS \right] \cdot a_S^* \\ &= \frac{i\omega}{2} a_S^t \cdot W \cdot a_S^* \end{aligned} \quad (17.51)$$

en introduisant la matrice des puissances modales W . Cette analyse montre que le bruit de coquille est essentiellement contrôlé par deux grandeurs fondamentales du système : le champ acoustique interne et les modes de la structure.

1. Le champ acoustique interne p_I est la source du bruit de coquille. Il l'influencera par son *niveau* mais aussi par sa *distribution spatiale*.
2. Les modes Φ_S de la structure jouent un rôle central dans le modèle en contrôlant le transfert de l'énergie acoustique de l'intérieur vers l'extérieur du silencieux :
 - Ils filtrent le bruit intérieur car seules les composantes de p_I qui sont *compatibles* avec les modes de la structure vont significativement exciter cette structure. Cette compatibilité est mesurée par le vecteur des forces modales $-\Phi_S^t C_{SI} p_I$ ou par la matrice d'excitation modale $-\Phi_S^t C_{SI} \Phi_I$.
 - Ils contrôlent le champ acoustique rayonné car seuls les modes ayant une efficacité de rayonnement élevée contribueront au bruit de coquille. Cette propriété est mesurée par la matrice de rayonnement modal Φ_E .

Un pot d'échappement à faible bruit de coquille sera donc conçu de manière à combiner les exigences suivantes :

- assurer une incompatibilité maximale entre les modes acoustiques internes et les modes de vibration de la structure c'est-à-dire faire en sorte que :
 - les composantes de la matrice de couplage modal $\Phi_S^t C_{SI} \Phi_I$ soient aussi faibles que possible ;
 - les spectres de fréquences propres associés au champ acoustique interne et aux vibrations de la structure soient aussi séparés que possible ;
- veiller à ce que les modes de vibration excités aient l'efficacité de rayonnement la plus faible possible.

Cadre général d'analyse des systèmes

17.3 vibro-acoustiques

Cette section décrit, très brièvement, un schéma général d'analyse des systèmes vibro-acoustiques. Il consiste à considérer que la pression acoustique p_j en un point P_j donné est le résultat de l'action de diverses sources mécaniques F_i et acoustiques q_i . Les sources mécaniques induisent des vibrations qui se propagent dans toute la structure et engendrent, par rayonnement, une contribution au signal sonore ; ce transfert d'énergie de la source au récepteur est qualifié de *transfert solide* et il est caractérisé par une fonction de transfert S_{ij} . Les sources acoustiques induisent un champ sonore qui se propage jusqu'au récepteur ; ce transfert d'énergie de la source au récepteur est qualifié de *transfert aérien*, il est caractérisé par une fonction de transfert A_{ij} . La relation linéaire suivante peut être écrite :

$$p_i(\omega) = \sum_j (S_{ij}(\omega) \cdot F_j(\omega) + A_{ij}(\omega) \cdot q_j(\omega)) \quad (17.52)$$

Le problème de l'ingénieur consiste, dans la majorité des cas, à minimiser ou réduire la valeur de p_i et donc à réduire l'amplitude des sources (F_j ou q_j) ou à contrôler les fonctions de transfert pour chercher à créer un effet d'atténuation maximal. Ce cadre conceptuel est très largement utilisé pour analyser un problème et définir un plan d'action. Il appelle toutefois plusieurs commentaires.

- Une voie de transfert réelle est souvent mixte. Le bruit rayonné par un moteur de voiture pénètre dans le compartiment passager au travers du tablier et le transfert pourrait donc être qualifié d'aéro-solido-aérien. Les vibrations transmises par ce même moteur au châssis se propagent à l'ensemble de la caisse qui rayonne alors dans le compartiment passager ; la voie de transfert correspondante est donc solido-aérienne.
- Le découplage source-voie de transfert donne l'impression que ces deux éléments sont indépendants. Or, comme nous l'avons vu dans la discussion sur la différence entre sources de vitesse et de pression Section 9.1.3 le comportement d'une source dépend de la nature du système dans lequel elle injecte de l'énergie. En fait une source est elle-même un système mécanique

et a sa propre impédance qui s'adapte à celle du système dans lequel elle débite. Changer radicalement une voie de transfert va donc avoir un effet sur la source elle-même ou plutôt sur sa capacité à injecter de la puissance dans le système.

- Les différentes voies de transfert ne sont pas indépendantes. En affectant profondément une voie de transfert on modifie également les autres.

On peut donc *en première analyse* travailler indépendamment sur chaque source et chaque voie de transfert mais il est important *en seconde analyse* d'étudier l'effet que la modification d'un des éléments du système a sur tous les autres éléments du système.

18

TRANSMISSION ET ISOLATION

Contents

18.1 Paroi rigide sur supports élastiques	409
18.2 Paroi flexible infinie	414
18.3 Parois doubles	423
18.4 TL de plaques finies	427
18.5 Mesure du TL en chambres associées	429

Nous verrons dans ce chapitre comment le son peut se transmettre d'un milieu acoustique à un autre au travers de parois élastiques et quel *affaiblissement* il subit en passant d'un domaine à l'autre. Cet *affaiblissement* est une mesure du pouvoir isolant de la paroi ; il peut être mesuré de différentes manières : par la différence de niveau sonore entre deux points situés de part et d'autre de la paroi, par la différence d'énergie sonore dans les deux cavités que séparent cette paroi ou, et c'est la définition propre de l'indice d'affaiblissement (dénoté TL pour *Transmission Loss*), par le rapport, exprimé en décibel, de la puissance acoustique incidente à la paroi et de la puissance acoustique transmise par celle-ci. La figure 18.1 montre l'allure typique de la variation du TL avec la fréquence. Plusieurs comportements distincts peuvent être observés dans différentes gammes de fréquences.

1. À basse fréquence l'isolation dépend essentiellement de la rigidité de la paroi et de ses supports et elle décroît régulièrement jusqu'à la première fréquence de résonance.
2. On observe ensuite une zone dans laquelle l'isolation est contrôlée par les résonances successives de la plaque ; l'isolation est minimale aux fréquences de résonance et y dépend principalement de l'amortissement de la paroi.
3. Vient ensuite une troisième zone où la *loi de masse* s'applique. Malgré l'existence de pics résiduels dus aux résonances du panneau, la croissance de l'isolation est quasi linéaire avec une pente de 6 dB/octave. C'est la masse du panneau qui définit le niveau d'atténuation atteint.
4. Une chute brutale de l'isolation apparaît à une fréquence particulière appelée *fréquence de coïncidence*.
5. Suit une croissance rapide de l'isolation de 9 à 18 dB/octave suivant la nature de l'excitation.

Les zones 1 et 3 sont bien représentées par le modèle très simple présenté à la section 18.1 et qui assimile la paroi à un corps rigide posé, sur son contour, sur un support élastique. Les zones 3, 4 et 5 nécessitent de prendre en compte la flexibilité de la plaque et les ondes de flexion qui s'y propagent ; le modèle correspondant, faisant l'hypothèse que la plaque est de dimension infinie, est présenté à la section 18.2. La zone 2 du diagramme ne peut être expliquée en détail que par un modèle sophistiqué intégrant la dimension finie de la plaque ; un tel modèle, présenté superficiellement à la section 18.4, contient en fait tous les autres modèles et couvre toute la gamme de fréquence.

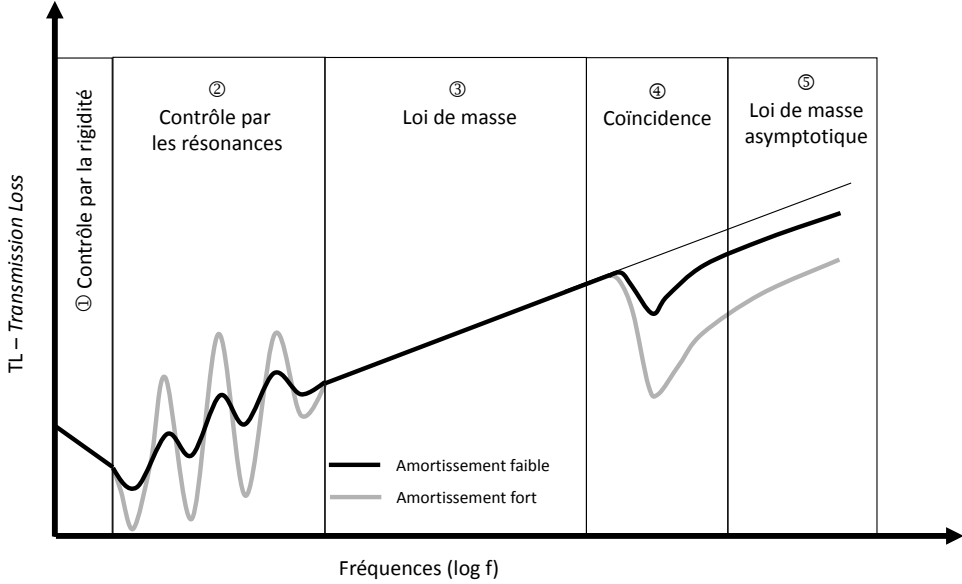


Figure 18.1: Représentation schématique d'une courbe d'isolation montrant les différents comportements.

Transmission au travers d'une paroi rigide sur supports élastiques

18.1

Soit une paroi rigide ($x = 0$) de masse m montée sur des supports visco-élastiques de rigidité k et d'amortissement d Figure 18.2. La paroi sépare deux milieux ayant respectivement les impédances $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$. Soit une onde incidente se propageant dans le milieu 1 suivant l'axe des x . Les champs acoustiques dans les milieux 1 et 2 valent respectivement :

$$p_1(x) = I(\omega)e^{-ik_1x} + R(\omega)e^{ik_1x} \quad (18.1)$$

$$p_2(x) = T(\omega)e^{-ik_2x} \quad (18.2)$$

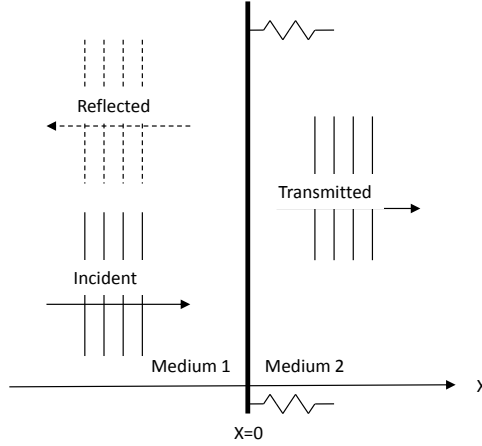


Figure 18.2: Transmission au travers d'une paroi rigide montée sur supports élastiques.

Si la paroi vibre avec un déplacement u_x , alors la continuité des vitesses à la paroi impose que :

$$\frac{I - R}{Z_1} = \frac{T}{Z_2} = i\omega u_x \quad (18.3)$$

dont on tire :

$$R = I - i\omega Z_1 u_x \quad (18.4)$$

et

$$T = i\omega Z_2 u_x \quad (18.5)$$

Par ailleurs l'équation dynamique de la plaque s'écrit :

$$(-\omega^2 m + i\omega d + k) \cdot u_x = F \quad (18.6)$$

où F est la force agissant sur la plaque c'est-à-dire la pression nette exercée par les fluides multipliée par la surface S de la plaque :

$$F = (I + R - T) \cdot S = (I + (I - i\omega Z_1 u_x) - i\omega Z_2 u_x) \cdot S \quad (18.7)$$

L'équation dynamique de la plaque peut donc s'écrire :

$$(-\omega^2 m + i\omega(d + SZ_1 + SZ_2) + k) \cdot u_x = 2IS \quad (18.8)$$

On retrouve le principe suivant lequel l'équation dynamique du système couplé s'obtient en ajoutant à l'impédance mécanique propre du système, l'impédance acoustique du milieu environnant et en la chargeant avec la *pression bloquée* c'est-à-dire celle qui s'exercerait sur la plaque si elle était parfaitement rigide et immobile. On en déduit :

$$u_x = \frac{2IS}{-\omega^2 m + i\omega(d + SZ_1 + SZ_2) + k} \quad (18.9)$$

et

$$T = \frac{2i\omega ISZ_2}{-\omega^2 m + i\omega(d + SZ_1 + SZ_2) + k} \quad (18.10)$$

Le facteur de transmission est défini comme le rapport de l'intensité transmise à l'intensité incidente et vaut donc :

$$\tau = \frac{\frac{|T(\omega)|^2}{2\rho_2 c_2}}{\frac{|I(\omega)|^2}{2\rho_1 c_1}} = \frac{4\omega^2 S^2 Z_1 Z_2}{k^2(1 - \omega_r^2)^2 + \omega^2(d + SZ_1 + SZ_2)^2} \quad (18.11)$$

en notant :

$$\omega_r = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (18.12)$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (18.13)$$

L'indice d'affaiblissement est défini par :

$$R = 10 \log \frac{1}{\tau} \quad (18.14)$$

Sa variation avec la fréquence est présentée à la figure 18.3. Aux **basses fréquences** c'est-à-dire si $\omega_r \ll 1$, on a $(1 - \omega_r^2) \simeq 1$ et $k \gg \omega(d + SZ_1 + SZ_2)$; on peut donc approximer le facteur de transmission de la manière suivante :

$$\tau \simeq \frac{4\omega^2 S^2 Z_1 Z_2}{k^2} \quad (18.15)$$

L'indice d'affaiblissement est donc essentiellement déterminé par la rigidité à ces basses fréquences et il décroît de 6 dB /octave ($10 \log 2^2$). Aux **hautes fréquences**, en revanche, on a $\omega_r \gg 1$ et $(1 - \omega_r^2)^2 \simeq \omega_r^4$; comme par ailleurs $k^2 \omega_r^4 = m^2 \omega^4$ on trouve l'expression simplifiée suivante pour le facteur

de transmission :

$$\tau \simeq \frac{4S^2 Z_1 Z_2}{m^2 \omega^2} \quad (18.16)$$

L'indice d'affaiblissement est donc essentiellement déterminé par la masse au-delà de la fréquence de résonance du panneau sur ses supports et il croît de 6 dB /octave.

Note

Ce modèle extrêmement simple représente assez bien le comportement du mode fondamental d'un panneau de grande taille. Il est également strictement applicable pour un panneau monté sur support élastique (vitre latérale d'une voiture) tant que la flexibilité intrinsèque du panneau peut être négligée c'est-à-dire en dessous de sa première fréquence de résonance.

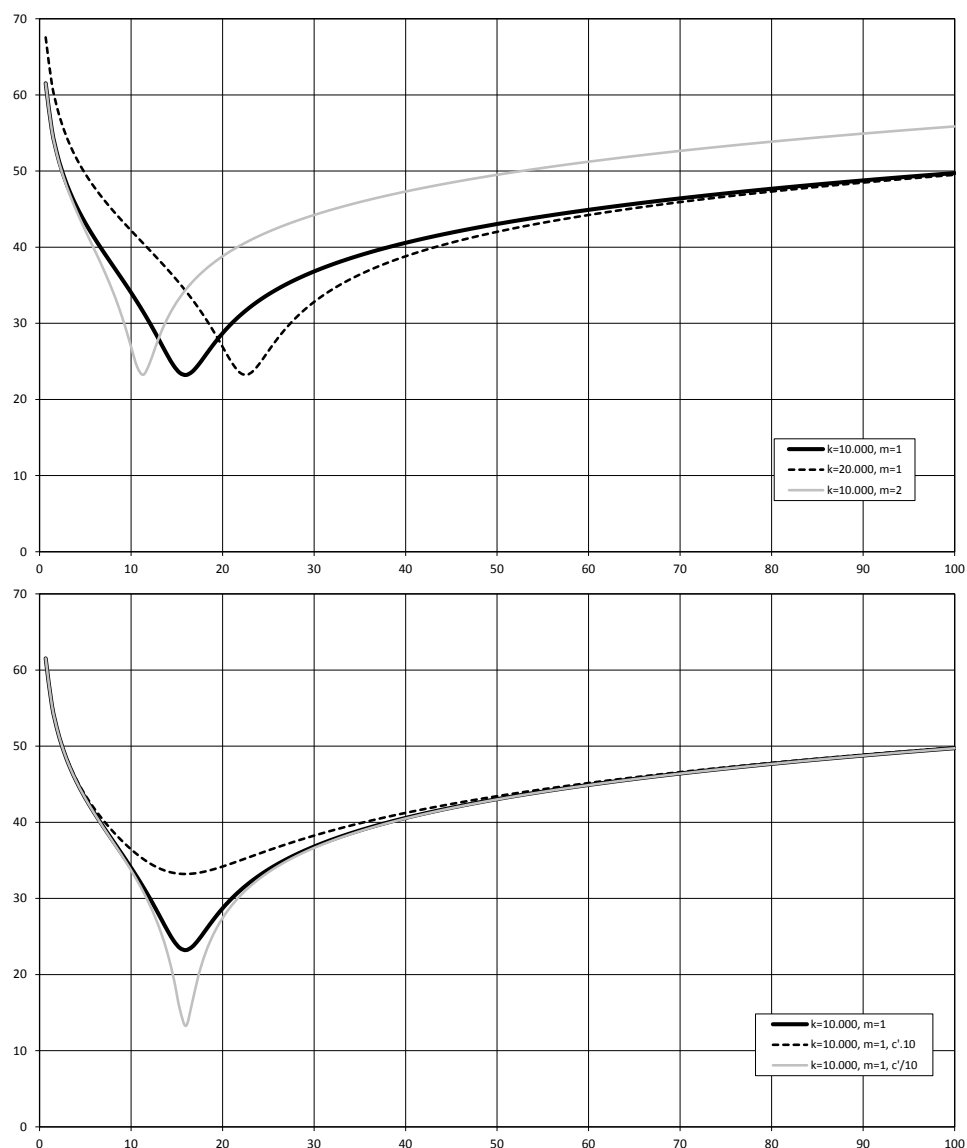


Figure 18.3: Transmission au travers d'une paroi rigide montée sur supports élastiques. Le **diagramme du haut** montre la variation de l'indice d'affaiblissement avec la rigidité des supports élastiques et la masse de la paroi ; les courbes en traits pleins sont obtenues avec la même valeur de la rigidité k alors que les deux courbes en noir ont la même masse. On voit que les courbes en traits pleins convergent à basses fréquences et divergent à hautes fréquences alors que les courbes noires divergent à basses fréquences et convergent à hautes fréquences. Le **diagramme du bas** montre l'effet de l'amortissement total. Pour que cet effet soit visible, l'amortissement est arbitrairement multiplié ou divisé par 10 par rapport à la valeur de référence.

18.2 Transmission au travers d'une paroi flexible d'extension infinie

18.2.1 Calcul de l'atténuation

Soit une onde plane d'incidence θ_1 excitant une plaque mince, plane ($y = 0$) et d'extension infinie séparant deux milieux ayant respectivement les masses volumiques ρ_1 et ρ_2 et les vitesses du son c_1 et c_2 . Le comportement mécanique de la plaque est caractérisé par sa raideur flexionnelle D et sa masse par unité de surface M qui sont définies par :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (18.17)$$

$$M = \rho_s h \quad (18.18)$$

où E est le module d'Young du matériau, ν son coefficient de Poisson, ρ_s sa masse volumique et h l'épaisseur de la plaque. Le champ acoustique dans le milieu d'émission est donné par :

$$p_1 = I(\omega)e^{-ik_1(x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1)} + R(\omega)e^{-ik_1(x \sin \theta_1 + y \cos \theta_1)} \quad (18.19)$$

alors que dans le milieu de réception on trouve :

$$p_2 = T(\omega)e^{-ik_2(x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2)} \quad (18.20)$$

Ce chargement impose à la plaque un déplacement vertical u donné par :

$$u(\omega, x) = U(\omega)e^{-i\kappa x} \quad (18.21)$$

où κ est le nombre d'onde associé aux ondes de flexion dans la plaque. La nécessaire égalité de la projection du vecteur d'onde sur le plan $y = 0$ impose la condition suivante :

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 = \kappa \quad (18.22)$$

soit en termes de vitesse de propagation :

$$\frac{c_1}{\sin \theta_1} = \frac{c_2}{\sin \theta_2} = c_b \quad (18.23)$$

où c_b est la vitesse des ondes de flexion dans la plaque qui est donc toujours égale ou supérieure à la vitesse du son dans les deux milieux. La continuité des vitesses normales en $y = 0$ doit par ailleurs être vérifiée ce qui donne :

$$\frac{(I(\omega) - R(\omega)) \cos \theta_1}{\rho_1 c_1} = \frac{T(\omega) \cos \theta_2}{\rho_2 c_2} = i\omega U(\omega) \quad (18.24)$$

d'où on tire :

$$R(\omega) = I(\omega) - \frac{i\rho_1 c_1 \omega U(\omega)}{\cos \theta_1} \quad (18.25)$$

$$T(\omega) = \frac{i\rho_2 c_2 \omega U(\omega)}{\cos \theta_2} \quad (18.26)$$

L'équation dynamique de la plaque s'écrit :

$$D\nabla^4 u - \omega^2 M u = (I(\omega) + R(\omega) - T(\omega))e^{-i\kappa x} \quad (18.27)$$

soit, en y injectant la forme choisie pour u et les valeurs de $R(\omega)$ et $T(\omega)$ ci-dessus :

$$(D\kappa^4 - \omega^2 M + \frac{i\rho_2 c_2 \omega}{\cos \theta_2} + \frac{i\rho_1 c_1 \omega}{\cos \theta_1}) \cdot U(\omega) = 2I(\omega) \quad (18.28)$$

ce qui donne :

$$U(\omega) = \frac{2I(\omega)}{D\kappa^4 - \omega^2 M + \frac{i\rho_2 c_2 \omega}{\cos \theta_2} + \frac{i\rho_1 c_1 \omega}{\cos \theta_1}} \quad (18.29)$$

et

$$T(\omega) = \frac{i\rho_2 c_2 \omega}{\cos \theta_2} \frac{2I(\omega)}{D\kappa^4 - \omega^2 M + \frac{i\rho_2 c_2 \omega}{\cos \theta_2} + \frac{i\rho_1 c_1 \omega}{\cos \theta_1}} \quad (18.30)$$

Le facteur de transmission est donné par :

$$\tau = \frac{|T(\omega)|^2 \rho_1 c_1}{|I(\omega)|^2 \rho_2 c_2} \quad (18.31)$$

et l'indice d'affaiblissement par :

$$R = 10 \log \frac{1}{\tau} \quad (18.32)$$

Considérons le cas le plus courant où la plaque sépare deux fluides identiques. On trouve alors :

$$\frac{T(\omega)}{I(\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{\cos \theta}{2i\rho c\omega} (D\kappa^4 - \omega^2 M)} \quad (18.33)$$

d'où on obtient :

$$R = 10 \log \left[1 + \left[\frac{\cos \theta}{2\rho c\omega} (D\kappa^4 - \omega^2 M) \right]^2 \right] \quad (18.34)$$

L'atténuation est représentée pour différents angles d'incidence à la figure 18.4. Outre le fait que l'atténuation est nulle à la fréquence de coïncidence discutée à la section suivante, on y observe deux comportements limites intéressants.

1. À basse fréquence le terme de masse $\omega^2 M$ domine et l'atténuation peut être approximée par :

$$R \simeq 20 \log \frac{\omega M \cos \theta}{2\rho c} \quad (18.35)$$

On a donc une croissance quasi linéaire de 6 dB/octave avant la coïncidence.

2. À haute fréquence (après la coïncidence) l'impédance de la plaque est dominée par la rigidité $D\kappa^4$ et on trouve :

$$R \simeq 20 \log \frac{D\omega^3 \sin^4 \theta \cos \theta}{2\rho c^5} \quad (18.36)$$

et l'atténuation croît de 18 dB/octave Figure 18.4.

18.2.2 Phénomène de coïncidence

On observe aussi que l'indice d'affaiblissement est nul (en l'absence d'amortissement c'est-à-dire pour D réel) lorsque l'impédance mécanique de la plaque s'annule :

$$D\kappa^4 - \omega^2 M = 0 \quad (18.37)$$

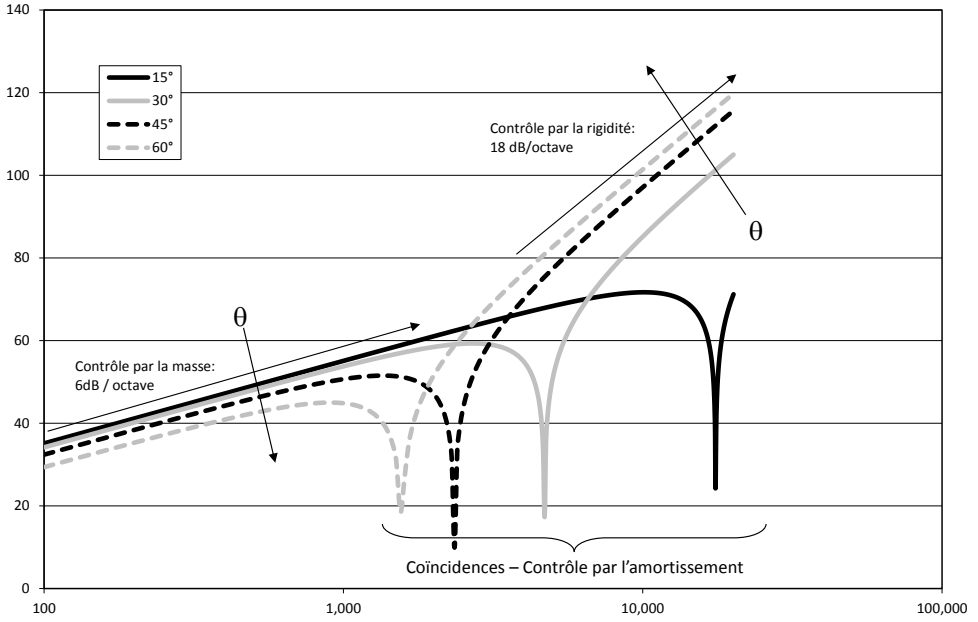


Figure 18.4: Variation de l'indice d'affaiblissement avec l'angle d'incidence.

soit pour :

$$c_b = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{D}{M}}} \quad (18.38)$$

c'est-à-dire lorsque les ondes de flexion dans la plaque se propagent à leur vitesse de propagation libre. Puisque :

$$c_b = \frac{c}{\sin \theta} \quad (18.39)$$

ceci n'est possible, à une fréquence ω donnée, que pour un angle d'incidence θ_c appelé *angle de coïncidence* Figure 18.5 et donné par :

$$\sin \theta_c = \frac{c}{\sqrt{\omega \sqrt{\frac{D}{M}}}} \quad (18.40)$$

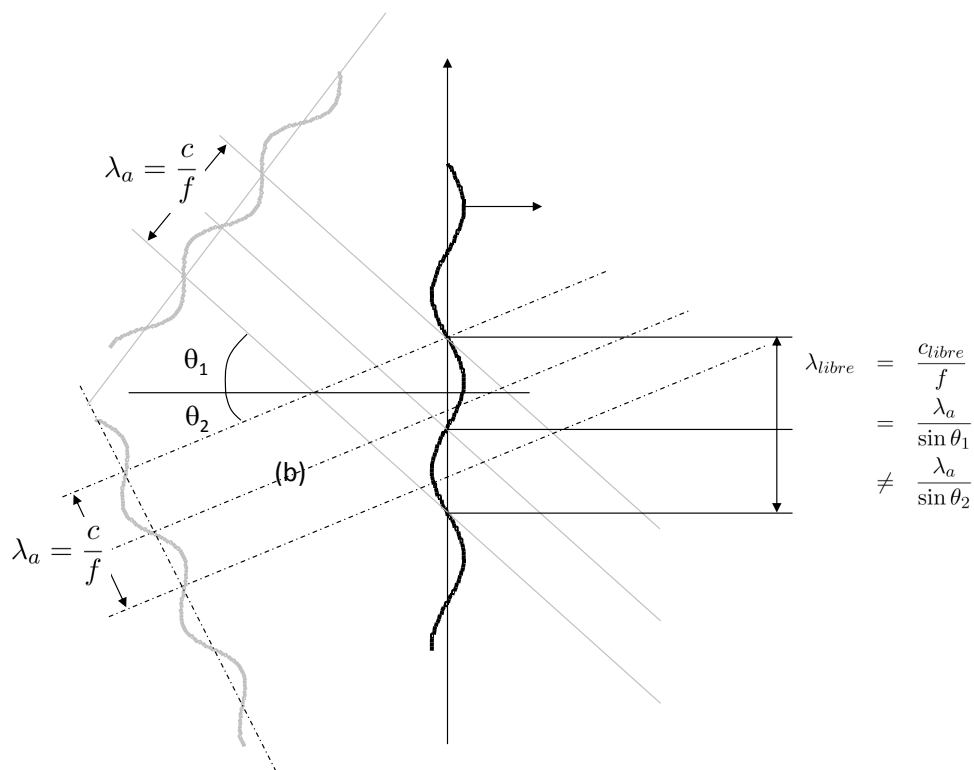


Figure 18.5: Phénomène de coïncidence.

Inversement, à tout angle d'incidence θ est associé une *fréquence de coïncidence* f_c :

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{c^2}{\sin^2 \theta} \sqrt{\frac{M}{D}} \quad (18.41)$$

soit, de manière plus explicite :

$$f_c = \frac{1}{2\pi h} \frac{c^2}{\sin^2 \theta} \sqrt{\frac{12\rho_s(1-\nu^2)}{E}} \quad (18.42)$$

Remarques :

- En pratique l'amortissement empêche l'atténuation de devenir nulle à la fréquence de coïncidence.
- La plus petite fréquence de coïncidence est appelée fréquence critique. Elle correspond à un angle d'incidence de 90° , c'est-à-dire à une incidence rasante, et est donc donnée par l'expression :

$$f_c = \frac{c^2}{2\pi h} \sqrt{\frac{12\rho_s(1-\nu^2)}{E}} \quad (18.43)$$

Pour bien comprendre le phénomène de coïncidence on peut le présenter conceptuellement comme ceci :

1. Le champ acoustique est à l'origine des vibrations de la plaque.
2. C'est la longueur d'onde *apparente* du champ acoustique, c'est-à-dire la distance de la trace de deux fronts d'ondes successifs sur la plaque, qui détermine la longueur des ondes de flexion :

$$\lambda_{\text{acoustique apparente}} = \frac{c}{f \sin \theta} = \lambda_{\text{flexion}} = \frac{c_{\text{flexion}}}{f} \quad (18.44)$$

3. C'est donc aussi le champ acoustique qui fixe la vitesse de propagation des ondes de flexion dans la plaque :

$$c_{\text{flexion}} = \frac{c}{\sin \theta} \quad (18.45)$$

4. Or les ondes de flexion ont, dans une plaque infinie, une vitesse de propagation privilégiée : leur vitesse de propagation libre. Imaginons par exemple qu'on produise un impact à un instant donné, en un point donné de la plaque. Des ondes de flexion vont se mettre en branle, partant du

point d'impact. Elles se propageront à cette vitesse de propagation libre :

$$c_{flexion\ libre} = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{D}{M}}} \quad (18.46)$$

À cette vitesse, la propagation se fait sans dépense d'énergie et ne nécessite pas d'excitation entretenue.

5. Si, sous une incidence et une fréquence données, dans une plaque non amortie, le champ acoustique force les ondes de flexion à se propager exactement à leur vitesse de propagation libre, **la plaque n'exercera aucune résistance**, le champ acoustique ne dépensera aucune énergie pour faire vibrer la plaque et il n'y aura aucune atténuation : la transmission sera totale, il y a coïncidence.

18.2.3 Atténuation sous champ diffus

Une paroi est rarement excitée par une onde plane d'incidence fixée ; le champ incident est au contraire constitué d'une multitude d'ondes d'incidences variables. Le cas limite théorique pertinent est un champ acoustique diffus où toutes les directions d'incidence sont équiprobables. Dans ce contexte, le coefficient de transmission τ_d est obtenu en rapportant l'énergie transmise à l'énergie incidente globale :

$$\tau_d = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(\theta) I \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(\theta) \sin 2\theta d\theta \quad (18.47)$$

Le facteur $\cos \theta$ intervient pour prendre en compte l'intensité normale à la paroi, seule pertinente dans le calcul, et le facteur $\sin \theta$ résulte de l'expression de l'élément de surface en coordonnées sphériques. La variation de τ_d avec θ est montré à la figure 18.6. On peut faire les constatations suivantes :

1. l'atténuation sous champ diffus est toujours inférieure à celle sous incidence fixée (sauf autour de la fréquence de coïncidence) ;
2. l'atténuation est notamment **près de 10 dB** inférieure à celle de l'atténuation sous incidence normale ;

3. toutes les fréquences de coïncidence ont disparu à l'exception de la fréquence de coïncidence la plus basse correspondant à une incidence rasant ($\theta = 90^\circ$) qu'on appelle la fréquence critique ;
4. la pente après la fréquence critique n'est que de 9 dB par octave contre 18 dB par octave sous incidence unique.

Deux formes analytiques approchées peuvent être obtenues dans des cas limites. À basse fréquence on trouve :

$$R_d = R_0 - 10 \log [0.23 R_0] \quad (18.48)$$

où R_d désigne l'atténuation sous champ diffus et R_0 l'atténuation sous incidence normale. Au-delà de la fréquence critique, on peut trouver :

$$R_d = R_0 + 10 \log \frac{\omega}{\omega_c} + 10 \log \frac{2\eta}{\pi} \quad (18.49)$$

où η est le facteur de perte associé à D . Cette expression confirme notamment la croissance de 9 dB/octave ($20 \log 2 + 10 \log 2$) au-delà de la fréquence critique.

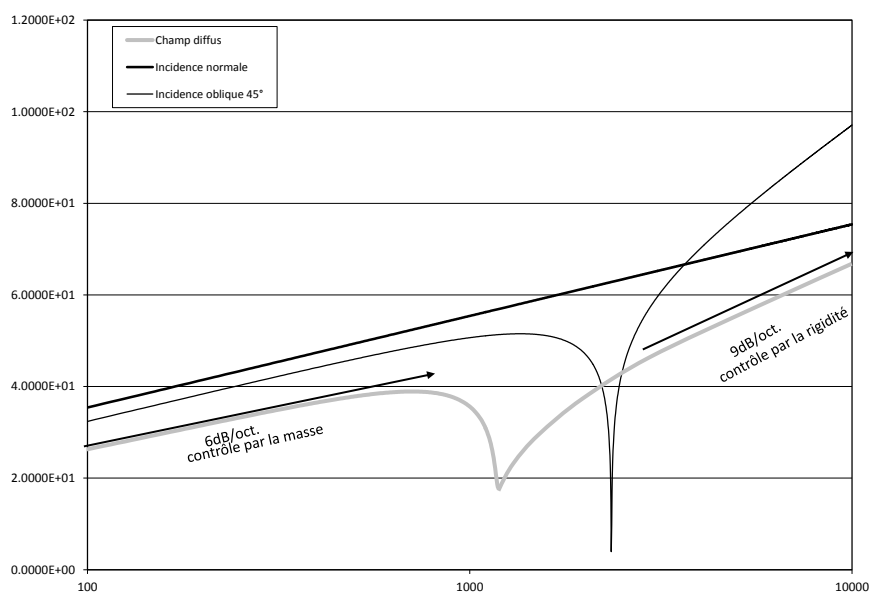


Figure 18.6: Variation de l'indice d'affaiblissement avec la fréquence pour une excitation diffuse. Les courbes pour une incidence normale et de 45° sont données à titre de référence.

18.3 Parois doubles

18.3.1 Résonance masse-air-masse

On peut assimiler une double paroi à un système de deux masses (les parois) connectées par un ressort (l'air) de rigidité k :

$$k = \frac{\rho_a c^2}{h} \quad (18.50)$$

où ρ_a est la masse volumique de l'air, c la vitesse du son et h l'épaisseur de la lame d'air. En l'absence de toute excitation le déplacement des deux masses est décrit par le système :

$$\begin{aligned} -\omega^2 m_1 u_1 + k(u_1 - u_2) &= 0 \\ -\omega^2 m_2 u_2 + k(u_2 - u_1) &= 0 \end{aligned} \quad (18.51)$$

Le déterminant de ce système vaut :

$$\Delta = \omega^4 - \omega^2 k (m_1 + m_2) \quad (18.52)$$

Le système admettra une solution non triviale pour $\Delta = 0$ soit pour :

$$\omega = \omega_r = \sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} = c \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_v h} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)} \quad (18.53)$$

Dans la dernière expression on a introduit la masse volumique du verre ρ_v et les épaisseurs h_1 et h_2 des deux lames de verres.

18.3.2 TL d'une paroi double

Soient deux parois planes, flexibles et d'extension infinie situées respectivement en $y = 0$ et $y = -\delta$ Figure 18.7. Les deux plaques ont respectivement

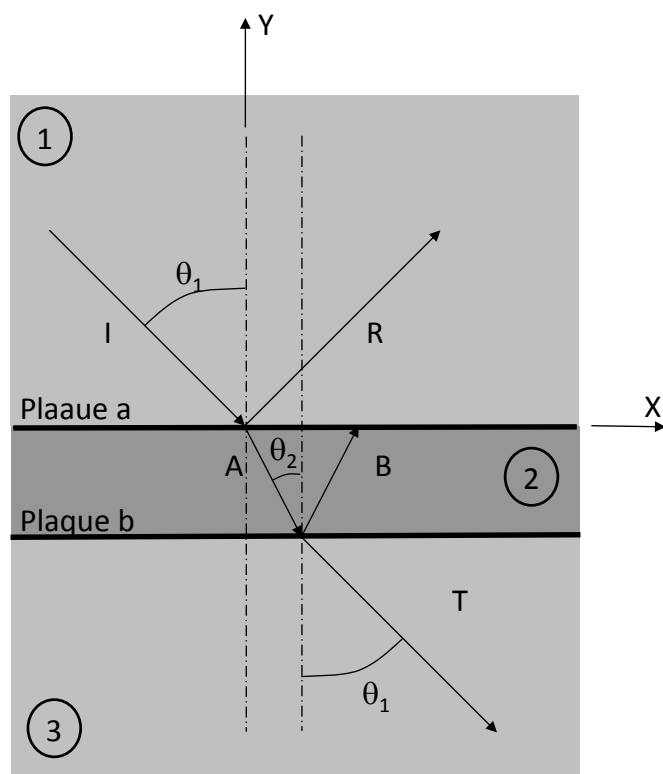


Figure 18.7: Transmission au travers d'une double paroi.

les rigidités flexionnelles et les masses par unité de surface D_a , M_a , D_b et M_b . Le même fluide ($Z_1 = \rho_1 c_1$) occupe les domaines 1 ($y > 0$) et 3 ($y < -\delta$) mais le milieu 2 ($0 > y > -\delta$) contient un fluide différent ($Z_2 = \rho_2 c_2$). Les champs acoustiques dans les trois milieux et le déplacement vertical des deux plaques sont donnés par :

$$p_1 = Ie^{-i\kappa x + ik_{y1}y} + Re^{-i\kappa x - ik_{y1}y} \quad (18.54)$$

$$v_1 = -\frac{I}{\tilde{Z}_1}e^{-i\kappa x + ik_{y1}y} + \frac{R}{\tilde{Z}_1}e^{-i\kappa x - ik_{y1}y} \quad (18.55)$$

$$p_2 = Ae^{-i\kappa x + ik_{y1}y} + Be^{-i\kappa x - ik_{y1}y} \quad (18.56)$$

$$v_2 = -\frac{A}{\tilde{Z}_2}e^{-i\kappa x + ik_{y2}y} + \frac{B}{\tilde{Z}_2}e^{-i\kappa x - ik_{y2}y} \quad (18.57)$$

$$p_3 = Te^{-i\kappa x + ik_{y1}y} \quad (18.58)$$

$$v_3 = -\frac{T}{\tilde{Z}_1}e^{-i\kappa x + ik_{y1}y} \quad (18.59)$$

$$u_a = U_a e^{-i\kappa x} \quad (18.60)$$

$$u_b = U_b e^{-i\kappa x} \quad (18.61)$$

avec :

$$\kappa = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (18.62)$$

$$k_{y1} = k_1 \cos \theta_1 \quad (18.63)$$

$$k_{y2} = k_2 \cos \theta_2 \quad (18.64)$$

$$\tilde{Z}_1 = \frac{Z_1}{\cos \theta_1} \quad (18.65)$$

$$\tilde{Z}_2 = \frac{Z_2}{\cos \theta_2} \quad (18.66)$$

Dans ces expressions, on a utilisé le fait que la projection suivant x de tous les vecteurs d'ondes (acoustique et dynamique) doit être égale à une même valeur κ . Exprimons maintenant :

– la continuité des vitesses en $y = 0$:

$$\frac{(R - I) \cos \theta_1}{Z_1} = \frac{(B - A) \cos \theta_2}{Z_2} = i\omega U_a \quad (18.67)$$

ce qui nous donne deux conditions :

$$R - i\omega\tilde{Z}_1 U_a = I \quad (18.68)$$

$$-A + B - i\omega\tilde{Z}_2 U_a = 0 \quad (18.69)$$

– la continuité des vitesses en $y = -\delta$ donne :

$$\frac{-Ae^{-ik_y2\delta} + Be^{ik_y2\delta}}{\tilde{Z}_2} = -\frac{Te^{-ik_y1\delta}}{\tilde{Z}_1} = i\omega U_b \quad (18.70)$$

ce qui donne deux conditions supplémentaires :

$$-e^{-ik_y2\delta} A + e^{ik_y2\delta} B - i\omega\tilde{Z}_2 U_b = 0 \quad (18.71)$$

$$e^{-ik_y1\delta} T - i\omega\tilde{Z}_1 U_b = 0 \quad (18.72)$$

– l'équation dynamique de la plaque a :

$$\left(D_a \kappa^4 - \omega^2 M_a\right) U_a = (I + R - A - B) \quad (18.73)$$

soit :

$$-R + A + B + \left(D_a \kappa^4 - \omega^2 M_a\right) U_a = I \quad (18.74)$$

– l'équation dynamique de la plaque b :

$$\left(D_b \kappa^4 - \omega^2 M_b\right) U_b = Ae^{-ik_y2\delta} + Be^{ik_y2\delta} - Te^{-ik_y1\delta} \quad (18.75)$$

soit

$$-Ae^{-ik_y2\delta} - Be^{ik_y2\delta} + Te^{-ik_y1\delta} + \left(D_b \kappa^4 - \omega^2 M_b\right) U_b = 0 \quad (18.76)$$

Ce qui forme un système de six équations dont la résolution donne la valeur des six inconnues R , A , B , T , U_a , U_b desquelles on peut tirer le facteur de transmission Figure 18.8 :

$$\tau = \frac{|T(\omega)|^2}{|I(\omega)|^2} \quad (18.77)$$

et l'indice d'affaiblissement :

$$R = 10 \log \frac{1}{\tau} \quad (18.78)$$

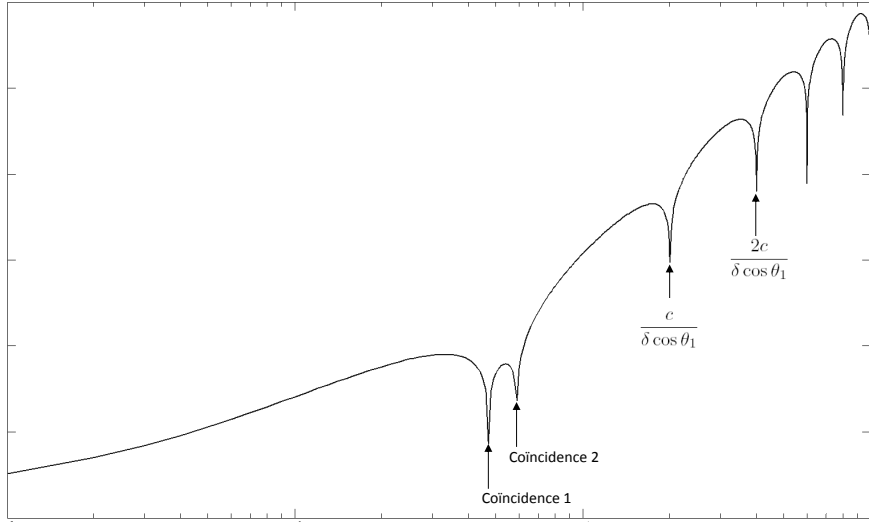


Figure 18.8: Variation typique de l'indice d'affaiblissement au travers d'une paroi double.

18.4 Transmission au travers de plaques finies

Considérons Figure 18.9 une plaque plane insérée dans un plan rigide infini (baffle). Le système baffle-plaque sépare deux milieux fluides 1 et 2 de propriétés éventuellement différentes. La plaque est excitée par un champ acoustique incident. On retient pour la dynamique de la plaque le modèle de Kirchhoff qui néglige les inerties de rotation et l'effet du cisaillement ce qui est acceptable à basse fréquence. L'équation dynamique de la plaque s'écrit alors :

$$\left(-\rho_s t \omega^2 + D \omega^4\right) w(x, y) = p_2(x, y, 0) - p_1(x, y, 0) \quad (18.79)$$

où D est la rigidité flexionnelle de la plaque :

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (18.80)$$

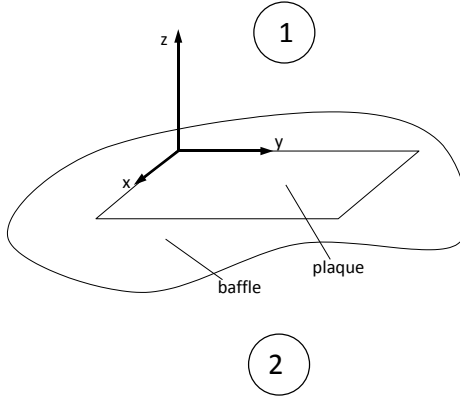


Figure 18.9: Transparence acoustique de plaques finies.

où E est le module d'Young de la plaque, ν son coefficient de Poisson, h son épaisseur, ρ_s sa masse volumique.

Le membre de droite représente l'excitation agissant sur la plaque soit la différence de pression acoustique entre les deux faces de la plaque. Dans le milieu 1 cette pression est la somme de trois termes : la pression incidente, la pression réfléchiée et la pression rayonnée par les vibrations de la plaque. Ces dernières s'obtiennent par l'intégrale de Rayleigh vue plus haut Section 11.3.4 :

$$p_1(x, y, z) = -p_i - p_r - 2\rho_{f1}\omega^2 \int_0^a \int_0^b w(x', y') G(x, y, z; x', y', 0) dx' dy' \quad (18.81)$$

Dans le milieu 2 on ne trouve que le champ rayonné par la plaque soit :

$$p_2(x, y, z) = 2\rho_{f2}\omega^2 \int_0^a \int_0^b w(x', y') G(x, y, z; x', y', 0) dx' dy' \quad (18.82)$$

L'équation dynamique du système couplé est donc :

$$\begin{aligned} & \left(-\rho_s t \omega^2 + D \omega^4 \right) w(x, y) \\ & + 2(\rho_{f1} - \rho_{f2}) \omega^2 \int_0^a \int_0^b w(x', y') G(x, y, z; x', y', 0) dx' dy' \\ & = p_i(x, y, 0) + p_r(x, y, 0) \end{aligned} \quad (18.83)$$

La mise en œuvre de ce modèle permet de calculer de manière précise l'atté-

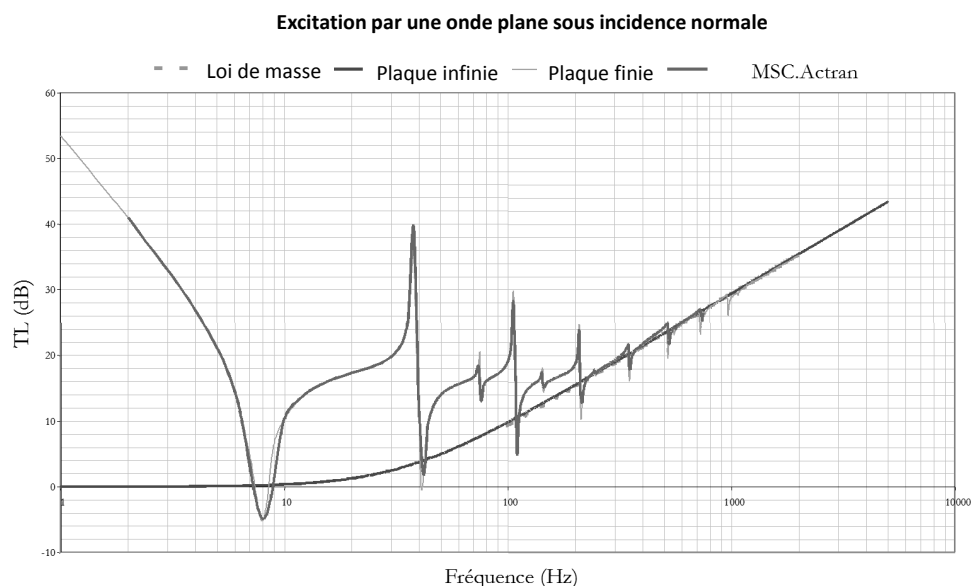


Figure 18.10: Comparaison entre l'atténuation calculée par les modèles de plaques finie et infinie. Dans le cas étudié on constate que le modèle de plaque infinie (loi de masse) devient valable vers 200 Hz.

uation offerte par une paroi finie. La figure 18.10 compare la loi de masse avec l'atténuation calculée par ce modèle.

18.5 Mesure du TL en chambres associées

18.5.1 Principe de la mesure

La mesure du TL se fait rarement en mesurant effectivement les puissances incidentes et transmises Figure 18.11 mais plutôt en comparant les niveaux sonores moyens mesurés dans deux chambres acoustiques associées, le plus souvent réverbérantes (figures 18.12 et 18.13). Une source émet un bruit rose Section 7.3.2 dans une des chambres et les niveaux moyens sont mesurés dans



Figure 18.11: Mesure de l'intensité transmise au travers d'un vitrage.

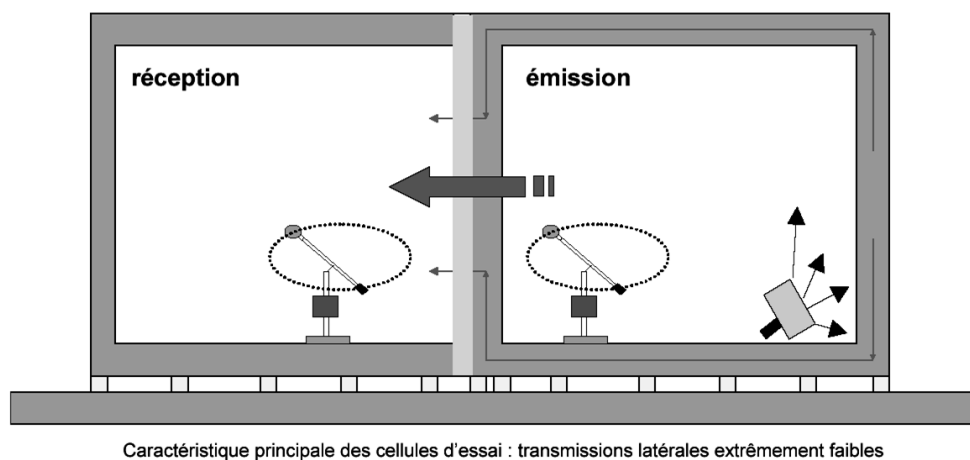
les deux chambres. L'indice d'affaiblissement R est alors donné par la différence des niveaux auquel on ajoute un terme correcteur dépendant de la surface S de l'élément testé ainsi que du volume V et du temps de réverbération T_R de la chambre de réception :

$$R = L_{\text{émission}} - L_{\text{réception}} + 10 \log \frac{S \cdot T_R}{0.16 \cdot V} \quad (18.84)$$

Dans de nombreux cas, pour étudier de petits échantillons, on utilise des *petites cabines* Figure 18.14.

18.5.2 TL en tiers d'octave de panneaux réels

La figure 18.15 montre la courbe de transmission pour une paroi double réelle utilisée dans un bâtiment. On y retrouve bien la résonance masse-air-masse, la



© CSTC - Centre Scientifique et Technique de la Construction de Belgique. Used by permission.

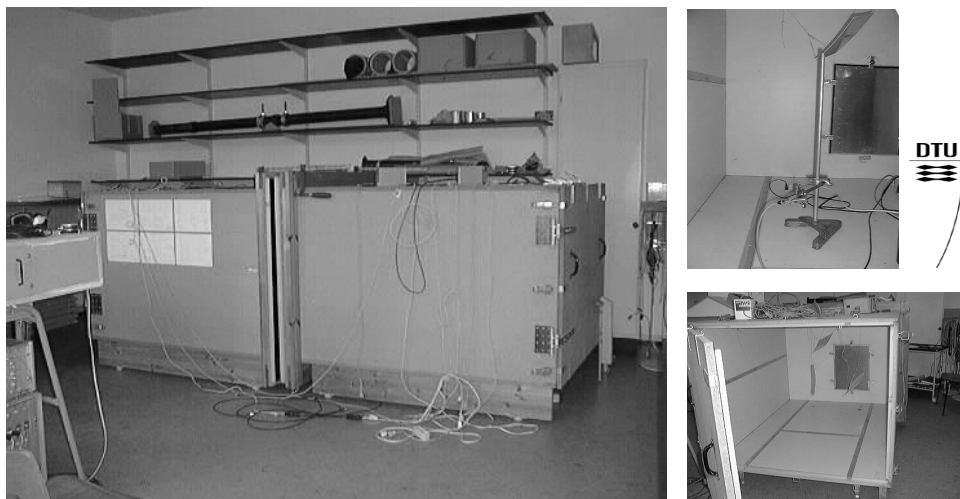
Figure 18.12: Schéma de principe de la mesure de l'indice d'affaiblissement en laboratoire.

loi de masse, la coïncidence et la croissance post-coïncidence. Les résonances individuelles à basse fréquence sont masquées par la présentation des résultats en bandes d'octaves.



© CSTC - Centre Scientifique et Technique de la Construction de Belgique. Used by permission.

Figure 18.13: Paroi vitrée insérée entre deux chambres réverbérantes associées en vue de la mesure de son indice d'affaiblissement.



Photos de Thomas Leclercq (1999) reproduites avec la permission de l'auteur.

Figure 18.14: Mesure du TL en petites cabines : installations du Danish Technical University à Lyngby au Danemark.

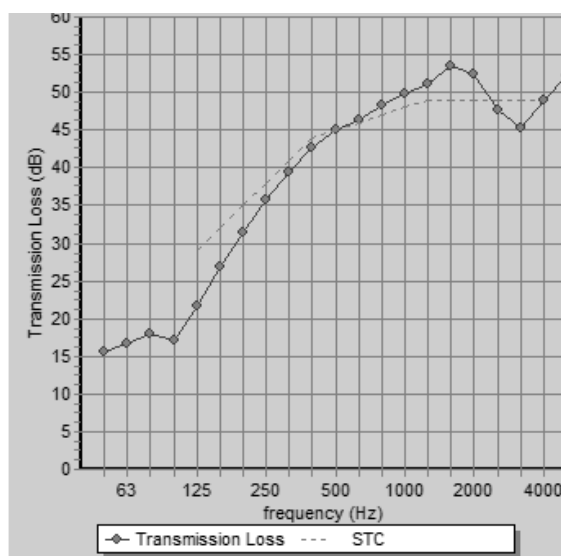


Image produite avec le logiciel Insul ©Marshall Day ACoustics.

Figure 18.15: Courbes d'isolation d'une paroi double réelle.

TABLE DES FIGURES

1	Introduction	1
2	Définition et cadre de l'acoustique	3
2.1	Émission, propagation, effets sur le milieu et perception.	5
2.2	Domaines de l'acoustique.	7
2.3	La fameuse <i>crevette pistolet</i> (snapping shrimp).	9
2.4	Étendue spectrale des sons.	12
2.5	Étendue spectrale d'un piano.	13
2.6	Un coup de klaxon qui peut coûter cher !	16
3	Équations de la mécanique des milieux continus	19
3.1	Équation de continuité.	21
3.2	Forces agissant sur le volume (fluide visqueux).	27
3.3	Forces agissant sur le volume (fluide non visqueux).	28
3.4	Flux net de quantité de mouvement.	30
4	Équation d'onde	33
4.1	Linéarisation de la relation pression-masse volumique.	36
4.2	Les deux termes de la solution de d'Alembert (1).	42
4.3	Les deux termes de la solution de d'Alembert (2).	43
4.4	Position des particules d'air dans un tube.	44
4.5	Mise en évidence du déphasage.	46
4.6	Mise en évidence de la période et de la longueur d'onde.	47
4.7	Vitesse du son et vitesse de la lumière.	52
4.8	Variation de la vitesse du son avec la température.	54
4.9	Expérience de Colladon et Sturm.	55
5	Analyse de Fourier	59
5.1	Portrait de Joseph Fourier.	60
5.2	Combinaison de deux signaux de mêmes fréquences.	63
5.3	Interférences constructive et destructive.	64
5.4	Casque audio à contrôle actif.	65
5.5	Contrôle actif du bruit dans une voiture.	66
5.6	Le contrôle actif selon Dilbert.	67

5.7	Combinaison de signaux : rationnel vs. irrationnel.	69
5.8	Combinaison de signaux : cas harmonique (1).	70
5.9	Combinaison de signaux : cas harmonique (2).	71
5.10	Combinaison de signaux : cas harmonique (3).	72
5.11	Onde carrée.	76
5.12	Phénomène de Gibbs.	77
5.13	Amplitude des composantes spectrales d'un signal.	78
5.14	Signal périodique et ses composantes spectrales.	79
5.15	Spectre (A, B) du signal de la figure 5.14.	80
5.16	Spectre (C, ϕ) du signal de la figure 5.14.	81
5.17	Spectre $(\Re(E), \Im(E))$ du signal de la figure 5.14.	82
5.18	Effet d'écho dans la réponse dynamique d'une structure.	88
5.19	Passage d'une suspension sur un cahot (10 km/h).	90
5.20	Passage d'une suspension sur un cahot (60 km/h).	91
5.21	Signal rectangulaire et sa transformée de Fourier.	93
5.22	Relation entre largeur du signal et du spectre.	94
5.23	Signal impulsionnel et sa transformée de Fourier.	95
6	Équation de Helmholtz	97
6.1	Intensité sonore : cas général.	102
6.2	Intensité sonore : pression et vitesse en phase.	102
6.3	Intensité sonore : pression et vitesse en quadrature de phase.	103
6.4	Vecteur d'onde pour une onde plane quelconque.	109
6.5	Pression engendrée par un monopôle.	111
6.6	Impédance radiale dans un champ monopolaire.	113
7	Niveaux sonores	115
7.1	Valeurs de références pour le calcul en dB.	118
7.2	Relation pression-niveau sonore.	118
7.3	<i>Thermomètre sonore</i> Brüel et Kjaer.	119
7.4	Ernst Heinrich Weber et Gustav Fechner.	121
7.5	Loi de Weber-Fechner.	121
7.6	Abaque pour la composition de niveaux sonores.	123
7.7	Règle des 3 dB.	123
7.8	Définition normalisée des bandes d'octave.	126
7.9	Filtre passe-bande.	127
7.10	Définition normalisée des bandes de tiers d'octave.	128

7.11 Bruit blanc et bruit rose : schéma.	129
7.12 Bruit blanc : spectre synthétique.	130
7.13 Bruit rose : spectre synthétique.	130
7.14 Bruits <i>brun</i> : spectre synthétique.	131
7.15 Courbes d'égale perception (<i>loudness</i>).	133
7.16 Correction dBA, dBB, dBC et dBD.	135
7.17 Facteurs correctifs associés aux filtres A, C et U.	136
7.18 Niveaux statistiques.	138
7.19 Courbes NR.	139

8 Réflexion et absorption 143

8.1 Réflexion d'une onde plane sur une paroi rigide.	146
8.2 Réflexion sur une surface rigide (incidence normale).	147
8.3 Réflexion sur une paroi à pression nulle.	150
8.4 Réflexion sur une surface rigide (incidence oblique).	153
8.5 Variation de α avec l'incidence.	156
8.6 Réflexion et source image (incidence normale).	159
8.7 Réflexion et source image (incidence oblique).	159
8.8 Réflexion d'un monopôle sur une surface rigide.	160
8.9 Réflexion d'un monopôle : fronts d'ondes.	162
8.10 Réflectogramme : cas de la paroi unique.	162
8.11 Sources images : cas de deux surfaces perpendiculaires.	163
8.12 Contribution des quatre sources.	164
8.13 Réflectogramme : cas de deux parois perpendiculaires.	164
8.14 Fronts d'ondes aux instants t_0 , t_1 , t_2 et t_{12}	165
8.15 Sources images : cas d'une cavité rectangulaire.	167
8.16 La normale aux fronts d'ondes obéit à la loi de Descartes.	169
8.17 Méthode des sources images et rayons sonores.	170
8.18 Tracé du parcours d'un rayon dans une cavité en L.	170
8.19 Tracé du parcours d'un rayon dans une salle de concert.	171
8.20 Distribution du niveau sonore (SPL) dans une salle réelle.	172
8.21 Réflectogramme d'une salle réelle.	173
8.22 Méthode des tirs de cônes.	174
8.23 Convention du sens de la normale pour l'impédance.	175
8.24 Impédance localement ou non localement réactive.	179
8.25 Exemple de traitement acoustique localement réactif.	180
8.26 Mesure d'impédance au tube de Kundt.	180

8.27	Notations pour la démonstration de la formule de Sabine.	184
8.28	Établissement et extinction du son dans une salle.	187
8.29	Wallace Sabine (1868-1919).	188
8.30	Extinction du son.	189
8.31	Absorption : une question de surface.	190
8.32	Chambre anéchoïque.	191
8.33	Chambre réverbérante.	192
8.34	Chambre semi-anéchoïque.	192
8.35	Comparaison des formules d'Eyring et de Sabine.	194

9 Résonances 197

9.1	Tubes fermés avec source de vitesse ou de pression.	199
9.2	Réponse en fréquence de la pression dans un tube fermé.	201
9.3	Modes acoustiques dans un tube.	205
9.4	Approximation modale de la pression dans un tube.	207
9.5	Approximation modale de la vitesse dans un tube.	208
9.6	Trois modes d'une cavité parallélipédique.	210
9.7	Mode acoustique d'un module de conditionnement d'air.	212

10 Propagation guidée 213

10.1	Fréquences de coupure, modes évanescents et propagatifs.	215
10.2	Assemblage de trois tubes.	218
10.3	Application du théorème de Thévenin.	221
10.4	Différentes connexions en T.	222
10.6	Résonateur de Helmholtz.	224
10.5	Principe de fonctionnement du résonateur quart d'onde.	224
10.7	Méthode des quatre microphones : principe.	228
10.8	Méthode des quatre microphones : dispositif expérimental.	228
10.9	<i>Transmission Loss</i> d'une chambre d'expansion.	231
10.10	Effet des modes non plans sur le TL.	232
10.11	Comparaison du TL pour trois résonateurs différents.	233
10.12	Comparaison entre IL et TL.	237
10.13	Graphes des fonctions de Bessel de première espèce.	241
10.14	Premiers zéros des dérivées des fonctions de Bessel.	242
10.15	Changement de section.	242
10.16	Rôle des modes évanescents : pression.	248
10.17	Rôle des modes évanescents : vitesse.	249

11	Rayonnement	251
11.1	Schéma d'un dipôle.	253
11.2	Conventions pour les diagrammes de directivité.	255
11.3	Directivité des monopôle et dipôles.	256
11.4	Schéma d'un quadripôle.	258
11.5	Diagrammes de directivités de deux types de quadripôles. . . .	260
11.6	Notations utilisées dans l'analyse multipolaire.	262
11.7	Directivités élémentaires ($\sin^p \theta \cos^q \theta$).	266
11.8	Directivités élémentaires ($\sin p\theta \cos q\theta$).	267
11.9	Directivité d'un tube débouchant dans un demi-espace.	268
11.10	Analogie structure vibrante - nuage de sources ponctuelles. . .	270
11.11	Équation intégrale de Helmholtz, forme directe (1).	272
11.12	Équation intégrale de Helmholtz, forme directe (2).	274
11.13	Équation intégrale de Helmholtz, forme directe (3).	275
11.14	Équation intégrale de Helmholtz, forme directe (4).	277
11.15	Équation intégrale de Helmholtz : forme indirecte.	278
11.16	Plaque bafflée.	279
11.17	Piston bafflé.	280
11.18	Directivité d'un piston bafflé.	282
11.19	Impédance de rayonnement.	285
12	Diffraction	287
13	Réfraction	289
13.1	Réfraction à l'interface entre deux fluides.	290
13.2	Analogie du maître-nageur.	294
14	Propagation avec dissipation	295
14.1	Maurice Anthony Biot (1905-1985).	301
14.2	Dispositif de mesure de la porosité.	303
14.3	Montage expérimental pour la mesure de la résistivité.	304
14.4	Dispositif de mesure de la résistivité.	304
14.5	John William Strutt, troisième Lord Rayleigh.	306
14.6	Schéma du mode de mesure électrique de la tortuosité.	307
14.7	Dispositif de mesure de la tortuosité : méthode ultrasonore. . .	308
14.8	Dispositif de mesure de la tortuosité : méthode électrique. . . .	309
14.9	Propriétés matérielles du poreux.	319
14.10	Différents types d'ondes planes dans un poreux.	320

14.11	Vitesse de propagation des ondes dans un poreux.	321
14.12	Efficacité d'un poreux ouvert couvrant une paroi rigide.	323
14.13	Sandwich poro-élastique.	324
14.14	Effet d'isolation vibratoire des sandwichs poro-élastiques.	325
14.15	Écoulement alterné horizontal dans le poreux.	326
14.16	Rayonnement comparé couche lourde - couche de base.	326
15	Propagation convectée	329
15.1	Monopôle en écoulement constant.	338
15.2	Deux représentations équivalentes de l'effet Doppler.	339
15.3	Asymétrie de l'effet Doppler.	341
15.4	Schéma d'un réacteur d'avion double flux.	354
15.5	Rayonnement acoustique d'une soufflante côté nacelle.	355
15.6	Rayonnement acoustique d'une soufflante côté <i>bypass</i>	356
16	Propagation atmosphérique	357
16.1	Restriction des angles d'élévation.	359
16.2	Réfraction pour deux profils de vitesse du son.	363
16.3	Rayonnement d'une source en demi-espace.	365
16.4	Grille de différences finies pour le problème de Helmholtz.	368
16.5	Source monopolaire au-dessus d'un plan rigide.	377
16.6	Décomposition en composantes incidente et diffractée.	378
16.7	Pression à 100 Hz (méthode parabolique).	379
16.8	Pressions à 250 et 1 000 Hz (méthode parabolique).	381
16.9	Solution parabolique et exacte à 500 Hz.	382
16.10	Solution parabolique et exacte à 100 et 250 Hz.	383
16.11	Solution parabolique et exacte à 500 et 1 000 Hz.	384
17	Interaction fluide-structure	385
17.1	Système masse-ressort couplé à une colonne de fluide infinie.	388
17.2	Système masse-ressort couplé à une colonne de fluide finie.	389
17.3	Résonances d'un système masse-ressort couplé à un tube.	391
17.4	Système masse-ressort couplé à un tube : couplage fort.	393
17.5	Système masse-ressort couplé à un tube : couplage faible.	394
17.6	Analyse du bruit de coquille d'un pot d'échappement.	400
18	Transmission et isolation	407
18.1	Courbe d'isolation typique.	409

18.2 TL d'une paroi rigide.	410
18.3 Effet de masse, de rigidité et d'amortissement sur le TL	413
18.4 Variation de l'indice d'affaiblissement avec l'incidence.	417
18.5 Phénomène de coïncidence.	418
18.6 Indice d'affaiblissement sous excitation diffuse.	422
18.7 Transmission au travers d'une double paroi.	424
18.8 Indice d'affaiblissement d'une paroi double.	427
18.9 Transparence acoustique de plaques finies.	428
18.10 Comparaison de l'atténuation de plaques finie et infinie.	429
18.11 Mesure de l'intensité transmise au travers d'un vitrage.	430
18.12 Mesure de TL - Principe.	431
18.13 Mesure du TL d'une paroi vitrée.	432
18.14 Mesure du TL en petites cabines.	433
18.15 Courbes d'isolation d'une paroi double réelle.	433

INDEX

Absorption

- Absorption atmosphérique, 360
- Coefficient d'absorption, 151
- Mesure en chambre réverbérante, 193

Acoustique, 4

- Acoustique linéaire, 40
- Acoustique non linéaire, 40
- Actualité de l'acoustique, 13
- Branches de l'acoustique, 6
- Définition, 4
- Etymologie, 5

Admittance, voir Impédance

Amortissement

- Amortissement ajouté, 388

Atténuation, 108

- Vitesse du son complexe, 108

Bandes de fréquences

- Bruit blanc, 127
- Bruit brun, 127
- Bruit rose, 127
- Octaves, 125
- Tiers d'octave, 125

Bessel

- Equation de Bessel, 238
- Fonctions de Bessel, 239
- Friedrich Wilhelm Bessel, 238

Biot

- Maurice Anthony Biot, 300
- Théorie de Biot, 300

Bruit

- Bruit blanc, rose ou brun, voir Bandes de fréquences
- Définition, 4

Etymologie, 5

- Colladon et Sturm (expérience de), voir Vitesse du son

Convolution, voir Produit de convolution

d'Alembert

- Equation de d'Alembert, 34
- Jean le Rond d'Alembert, 40

Décibels, voir Niveaux sonores

Delany et Bazley (modèle de), 298

Descartes (loi de), 153

Diffraction, 287

Dipôle, 253

Doppler (effet), 337

Evanescence (onde), 215, 242

Eyring, voir Temps de réverbération

Fenêtrage, 92

Filtrage, 95

Fletcher et Munson (courbes de), voir Niveaux sonores

Fourier

- Joseph Fourier, 60
- Séries de Fourier, 73
- Transformée de Fourier, 83

Fréquence de coupure, 214, 238

Gibbs (phénomène de), 76, 247

Helmholtz

- Equation de Helmholtz, 98
- Equation intégrale de Helmholtz, 271

- Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 98
 Résonateur de Helmholtz, 224
- Impédance, 99
 Adaptation d'impédance, 234
 Dépendance fréquentielle, 176
 Impédance caractéristique, 107, 152
 Impédance de rayonnement, 284
 Impédance de source, 234
 Impédance locale, 178
 Impédance non locale, 178
 Impédance réduite, 152
 Mesure au tube de Kundt, 180
 Signe, 174
- Indices, voir Notation indicielle
- Insertion Loss (IL), 214, 234
- Intensité, 100
 Intensité active, 100
 Intensité propagée par une onde plane, 107
 Intensité réactive, 100
 Niveau d'intensité, 116
- Interaction fluide-structure, 386
- Isolation, voir Transmission
- Kundt (tube de), voir Impédance
- Masse ajoutée, 389
- Matrice de transfert, 216
 d'un changement de section, 219
 d'un conduit de section constante, 216
 d'une connexion en T, 220
 Formes alternatives des matrices de transfert, 226
 Mesure par la méthode des quatre microphones, 227
- Transmission Loss (TL), 214
- Miki (modèle de), 299
- Monopôle, 110
- Multipôle (analyse multipolaire), 261
- Niveaux sonores
 Niveau d'intensité, 116
 Niveau de pression, 116
 Niveau de puissance, 116
 Addition de niveaux, 122
 Courbes de Fletcher et Munson, 132
 Décibels, 116
 dBA, dBB, dBC et dBD, 132
 Niveau EPNdB, 138
 Niveaux équivalents, 135
 Niveaux statistiques, 135
 Niveau L_{den} , 137
 Noise Rating (NR), 139
- Notation Indicielle, 23
 Sommation implicite, 24
 Symbole de Kronecker, 25
 Symbole de Levi-Civita, 25
- Octave, voir Bandes de fréquences
- Porosité, 302
- Prandtl-Glauert (transformation de), 334
- Produit de convolution, 91
- Propagation
 atmosphérique, 358
 avec atténuation, 108
 convectée, 330
 dispersive et non dispersive, 47
 en milieu dissipatif, 296
 guidée, 213
 Mécanique de la propagation, 44

- Puissance, 116
 Efficacité de rayonnement, 283
 Puissance rayonnée, 283
- Quadrupôle, 257, 258
- Réfectogramme, voir Réflexion
- Réflexion
 Coefficient de réflexion, 151
 Réfectogramme, 161
 Source sphérique, 158
 sur une surface absorbante, 149, 154, 161
 sur une surface libre, 148
 sur une surface rigide, 144, 153, 158
- Réfraction, 289
 atmosphérique, 361
- Résistivité, 303
- Résonance, 198
 d'un tube fermé, 198, 204
 d'un tube ouvert, 204
 d'une cavité parallélipédique, 209
 d'une cavité quelconque, 211
- Résonateur
 de Helmholtz, 224
 Quart d'onde, 223
- Rayleigh
 Intégrale de Rayleigh, 279
 John William Strutt, troisième Lord Rayleigh, 305
 Rayls (unité), 305
- Rayonnement, 252
 Efficacité de rayonnement, 283
 Puissance rayonnée, 283
- Sabine, voir Temps de réverbération
- Son
 Définition, 4
 Etendue spectrale, 12
 Etymologie, 5
- Source
 Débit volumique d'une source, 114
 Ondes planes, 106
 Ondes sphériques, 110
 Source de masse q , 22
 Source image, 158
- Temps de réverbération, 183
 Loi d'Eyring, 191
 Loi de Sabine, 186
- Thévenin (théorème de), 220
- Tiers d'octave, voir Bandes de fréquences
- Tirs de rayons (méthode des), 166
- Tortuosité, 305
- Transmission, 408
 Cas d'une paroi flexible infinie, 414
 Cas d'une paroi rigide sur supports élastiques, 409
 Cas de parois doubles, 423
 Cas général, 427
 Mesure du TL en chambres associées, 429
 Transmission Loss (TL), 229
- Transmission Loss (TL)
 TL de conduits, voir Matrice de transfert
 TL de parois, voir Transmission
- Tube de Kundt, voir Impédance
- Vitesse du son, 51
 Expérience de Colladon et Sturm, 55
 Vitesse de groupe, 51
 Vitesse du son complexe, 108, 298, 299

Vitesse locale dans le cas de la
propagation convectée, 345

Weber et Fechner (loi de), 120

NOMENCLATURE

Roman letters

A	Admittance : l'admittance est l'inverse de l'impédance.
A	Aire d'absorption d'un local : $A = \sum \alpha_i S_i$.
a, a_i, \vec{a}	Accélération.
$[C]$	Matrice d'amortissement.
c	Vitesse du son.
c ou d	Constante d'amortissement d'un ressort.
c_p	Capacité calorifique à pression constante.
c_v	Capacité calorifique à volume constante.
D	Moment dipolaire.
D	Rigidité de flexion.
d ou c	Constante d'amortissement d'un ressort.
E	Energie.
E	Module d'Young.
f	Fréquence (Hz).
F, F_i, \vec{F}	Vecteur force.
f_0	Fréquence fondamentale d'un signal périodique.
f_{mn}	Fréquence de coupure du mode d'ordre (m, n) .
G	Fonction de Green associée à l'équation de Helmholtz. Suivant les cas : $G = \frac{e^{-ikr}}{r}$ ou $G = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$.
G	Module de cisaillement.
h	Hauteur ou épaisseur.
I	Amplitude d'une onde incidente.

I	Intensité.
i	Nombre imaginaire : $i = \sqrt{-1}$.
$i(t)$	Intensité instantanée.
IL	<i>Insertion Loss</i> .
$[K]$	Matrice de rigidité.
K	Module d'élasticité isostatique.
k	Rigidité.
k, \vec{k}	Nombre d'onde $k = \frac{\omega}{c}$. Vecteur d'onde \vec{k} .
l, ℓ	Longueur.
L_I	Niveau d'intensité ([dB]).
L_p	Niveau de pression ([dB]).
L_w	Niveau de puissance ([dB]).
L_{Amax}	Niveau maximum sur la période de référence ([dB]).
L_{den}	Niveau pondéré <i>day-evening-night</i> ([dB]).
L_{eq}, L_{Aeq}	Niveau équivalent ([dB]).
$[M]$	Matrice de masse.
M	Masse par unité de surface.
m	Masse.
N_i	Fonction de forme associée au nœud i d'un élément fini.
p, P	Pression. En général p désigne la pression acoustique mais au cas où il pourrait y avoir ambiguïté, on précisera p_a pour la pression acoustique, p_0 ou p_{atm} pour la pression de référence (atmosphérique ou hydrostatique) et p_{tot} pour la pression totale. Dans les premiers chapitres on réserve le p minuscule au signal de pression $p(t)$ et le P majuscule au spectre $P(\omega)$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible on utilisera le p minuscule, même pour le spectre $p(\omega)$.
p^+	Amplitude (réelle ou complexe) d'une onde plane se propageant le long de l'axe des x dans le sens des x positifs.

p^-	Amplitude (réelle ou complexe) d'une onde plane se propageant le long de l'axe des x dans le sens des x négatifs.
p_i	Champ incident.
p_s	Champ diffracté.
Q	Module de compressibilité.
Q	Moment quadrupolaire.
q	Source de masse distribuée en volume.
R	Constante des gaz parfaits : $R = c_p - c_v$.
R	Indice d'affaiblissement (isolation).
R	Résistivité d'un matériau poreux.
R	Selon les cas : amplitude d'une onde réfléchie ou rapport entre l'amplitude de l'onde réfléchie et de l'onde incidente correspondante.
r	Coefficient de réflexion d'une surface.
r, θ, ϕ	Coordonnées sphériques.
r, θ, z	Coordonnées cylindriques.
RPM	Rotations par minute.
S	Aire, surface, superficie.
T	Amplitude d'une onde transmise.
T	Période.
T	Température absolue [K].
t	Temps.
t	Température [°C].
T_0	Période du fondamental d'un signal périodique.
T_R	Temps de réverbération.
TL	<i>Transmission Loss</i> .
\ddot{u}	Accélération.

\dot{u}	Vitesse.
u, U	Déplacement.
V	Volume.
v, v_i, \vec{v}	Vitesse.
v_g	Vitesse de groupe.
W	Puissance.
\bar{x}	Souvent, une barre au-dessus d'une grandeur x désigne la valeur de cette grandeur imposée par les conditions aux limites.
x, y, z	Coordonnées cartésiennes.
x^*	Conjugué du nombre complexe x .
x_{eff}	Valeur efficace de la grandeur x .
Z	Impédance : l'impédance est le rapport entre spectres de pression et de vitesse acoustique.
$z(\omega)$	Impédance réduite : l'impédance réduite est le rapport entre l'impédance réelle et l'impédance caractéristique du milieu : $z = \frac{Z}{\rho c}$.
$z(\tau)$	Réponse impulsionnelle associée à l'impédance $Z(\omega)$.
Z_n	Impédance normale.

Sets

\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes.
\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers naturels.
\mathbb{Q}	Ensemble des nombres rationnels.
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{Z}	Ensemble des nombres entiers.

Greek letters

α	Coefficient d'absorption.
----------	---------------------------

α	Facteur de Biot.
α_∞	Tortuosité d'un matériau poreux.
$\delta()$	Distribution de Dirac.
δ_{ijk}	Symbole de Levi-Civita.
δ_{ij}	Symbole de Kronecker.
ϵ_{ij}	Tenseur des déformations.
γ	Rapport entre les capacités calorifiques à pression et volume constants : $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.
κ	Compressibilité.
λ	Longueur d'onde.
λ	Premier paramètre de Lamé.
λ	Viscosité cinématique.
Λ_t	Longueur caractéristique thermique.
Λ_v	Longueur caractéristique visqueuse.
μ	Potentiel de double couche.
μ	Second paramètre de Lamé ou module de cisaillement.
μ	Viscosité dynamique.
ν	Coefficient de Poisson.
Ω	Porosité.
ω	Pulsation $\omega = 2\pi f$.
ϕ	Angle de phase.
ϕ	Vecteur propre.
ρ	Masse volumique [kg/m^3]. ρ_0 désigne la partie constante de la masse volumique du fluide et ρ_a la fluctuation d'origine acoustique de cette masse volumique.
σ	Efficacité de rayonnement.
σ	Potentiel de simple couche.

σ	Résistivité d'un milieu poreux.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales.
τ	Facteur de transmission.
τ_{ij}	Tenseur des contraintes.
θ	Angle d'incidence.

Operators and special characters

$\langle \dots \rangle$	Valeur moyenne de la grandeur ...
\cap	Intersection.
\cup	Union.
\oplus	Addition de niveaux sonores.
\otimes	Produit de convolution.
Δ	Laplacien.
\doteq	Egal par définition
\exists	Quantificateur existentiel (il existe).
\forall	Quantificateur universel (pour tout).
\gg	Est beaucoup plus grand que.
\Im	Partie imaginaire d'un nombre complexe.
\in	Appartient à.
∞	Infini.
\Leftrightarrow	Est équivalent à.
\Leftrightarrow	Le terme situé à droite de ce symbole est la transformée de Fourier du terme situé à gauche. Exemple : $p(t) \Leftrightarrow P(\omega)$: $P(\omega)$ est la transformée de Fourier du signal $p(t)$.
\ll	Est beaucoup plus petit que.
∂_i	Dérivée partielle par rapport à la coordonnée spatiale x_i .
∂_t	Dérivée partielle par rapport au temps.

Π	Produit.
\propto	Est proportionnel à.
\Re	Partie réelle d'un nombre complexe.
\rightarrow	Implique.
\sim	Est de l'ordre de grandeur de.
\simeq	Est approximativement égal à.
\subset	Est un sous-ensemble de.
Σ	Somme.
$\vec{\nabla}$	Vecteur de composantes $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

