

# 1

## DÉFINITION MATHÉMATIQUE DE LA GAMME MUSICALE

---

### Contents

---

1.1	Son . . . . .	1
1.2	Note . . . . .	2
1.3	Octaves . . . . .	3
1.4	Distance perceptive entre deux hauteurs tonales . .	3
1.5	Intervalles et distances entre deux fréquences . . . .	4
1.6	Intervalles naturels . . . . .	5
1.7	Fréquences réduites . . . . .	5
1.8	Fléquences . . . . .	6
1.9	Fléquences modularisées . . . . .	6
1.10	Gamme et tempérament . . . . .	6
1.11	Gammes de Pythagore généralisées . . . . .	7

---

### 1.1 Son

---

La pression  $p(t)$  en un point d'un espace physique est fonction du temps ; elle peut s'exprimer comme la somme d'un terme constant  $p_0$ , qu'on appelle pression de référence ou pression atmosphérique, et d'un terme fluctuant  $p_a(t)$ , de moyenne nulle, qu'on appelle pression acoustique. Le signal  $p_a(t)$  est le descripteur physique du son correspondant.

## 1.2 Note

Le signal acoustique  $p_a(t)$  associé à une note de musique unique jouée sur un instrument harmonique<sup>1</sup> peut-être représenté sous la forme d'un produit de deux fonctions :

$$p_a(t) = e(t) \cdot h(t) \quad (1.1)$$

où  $h(t)$  est une fonction périodique, de période  $T$ , qui peut donc être développée en série de Fourier :

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t + \phi_n\right) \quad (1.2)$$

et où  $e(t)$  est une fonction à support compact, appelée enveloppe sonore, qui module l'amplitude du son entre son émission et sa disparition. L'intervalle de temps durant lequel la fonction  $e(t)$  a une valeur non nulle est traditionnellement partitionné en quatre sous-intervalles qu'on appelle respectivement attaque, décroissance, stabilité et relâchement (ADSR, en anglais : *attack*, *decay*, *sustain*, *release*). Le spectre de la fonction  $h(t)$  est discret et ne fait apparaître que la fréquence fondamentale  $f = \frac{1}{T}$  et ses multiples entiers. Le spectre de  $p_a(t)$  est continu et apparaît comme la convolution du spectre discret associé à  $h(t)$  par celui associé à l'enveloppe  $e(t)$ .

La hauteur tonale de la note est entièrement déterminée par sa fréquence fondamentale  $f$  alors que son timbre est défini par l'amplitude  $A_n$  des différents harmoniques, par leurs phases respectives  $\phi_n$  et par la forme de l'enveloppe  $e(t)$ . Le timbre est sans importance pour notre propos et nous retiendrons simplement qu'une note musicale est caractérisée par sa fréquence fondamentale  $f$  et par l'existence d'harmoniques.

---

1. Pratiquement, on peut considérer que tous les instruments sont harmoniques, à l'exception notable des instruments à percussion de type tambour, timbales, cymbales ou cloches.

---

## 1.3 Octaves

---

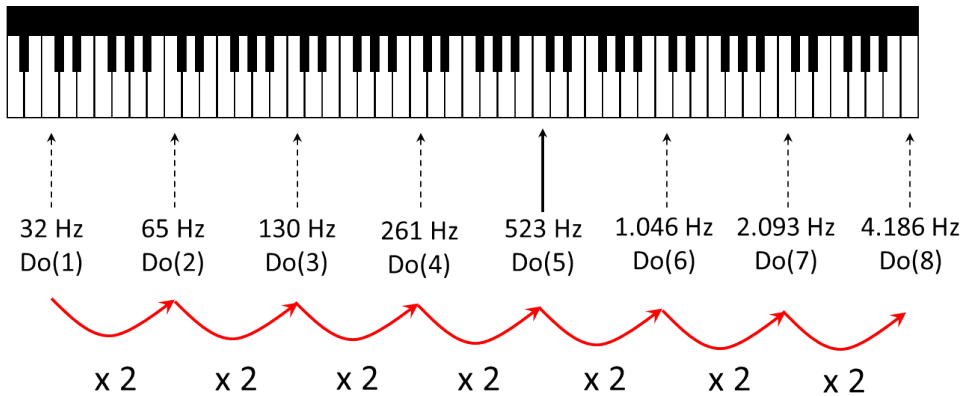
Une note de fréquence fondamentale  $f$  comporte des harmoniques aux fréquences  $2f, 3f, 4f \dots$ . Une note dont la fréquence fondamentale est  $2f$  comporte des harmoniques aux fréquences  $4f, 6f, 8f \dots$ . On constate que le fondamental et les harmoniques de la deuxième note sont des harmoniques de la première ce qui confère aux deux notes une profonde similarité musicale. Ceci justifie le choix de donner le même nom à deux notes dont le rapport des fréquences fondamentales est égale à 2 ; c'est ainsi, par exemple, que les notes dont les fréquences fondamentales sont de 110, 220, 440 et 880 Hz sont toutes dénommées *La*. On dit que de telles notes sont à *l'octave* l'une de l'autre et qu'elles sont *équisonnantes*. **Nous considèrerons, dans le contexte choisi, qu'elles sont indiscernables.**

---

## 1.4 Distance perceptive entre deux hauteurs tonales

---

Si la note de fréquence fondamentale  $2f$  est à l'octave de celle dont la fréquence fondamentale est  $f$ , alors la note de fréquence fondamentale  $4f$  est à l'octave de celle dont la fréquence fondamentale est  $2f$ . Or, d'un point de vue musical, nous avons le sentiment que  $2f$  est à égale distance de  $f$  et de  $4f$  ou, pour dire les choses autrement, que l'intervalle qui sépare  $f$  de  $2f$  est le même que celui qui sépare  $2f$  de  $4f$ . On en déduit que la *distance perceptive* entre deux notes est fixée par le rapport de leurs fréquences fondamentales et non par leur différence (voir Figure 1.1).



**Figure 1.1:** Les différents Do qu'on peut jouer sur un piano sont, sur le clavier, à égale distance l'un de l'autre. Leur nom commun souligne leur profonde identité harmonique. Les fréquences fondamentales de deux Do successifs sont dans un rapport 2.

## 1.5

### Intervalles et distances entre deux fréquences

Soient deux notes de fréquences fondamentales  $f_1$  et  $f_2$  ; l'intervalle<sup>2</sup> qui les sépare est, par définition, le rapport de ces deux fréquences :

$$I(f_1, f_2) = \frac{f_2}{f_1} \quad (1.3)$$

La distance qui les sépare est, par définition, le logarithme en base 2 de l'intervalle :

$$d(f_1, f_2) = \log_2(I(f_1, f_2)) = \log_2 f_2 - \log_2 f_1 \quad (1.4)$$

2. Le mot intervalle est, dans ce document, utilisé dans deux sens différents : intervalle musical comme rapport de deux fréquences, celui-ci pouvant être désigné soit par ce rapport ou par le nom traditionnel qui lui est affecté dans la théorie musicale (exemple : rapport  $\frac{3}{2}$  ou quinte juste) et intervalle mathématique comme ensemble de nombres délimité par deux nombres réels constituant ses bornes inférieure et supérieure. Le contexte devrait éviter toute confusion entre ces deux acceptions du mot *intervalle*.

## 1.6 Intervalles naturels

Les intervalles qui séparent les fréquences de deux harmoniques d'une même note ont reçu une dénomination particulière en théorie musicale :

- octave :  $I(f, 2f) = 2$  ;
- quinte :  $I(2f, 3f) = \frac{3}{2}$  ;
- quarte naturelle :  $I(4f, 3f) = \frac{4}{3}$  ;
- tierce majeure naturelle :  $I(5f, 4f) = \frac{5}{4}$  ;
- tierce mineure naturelle :  $I(6f, 5f) = \frac{6}{5}$ .

L'adjectif *naturel* indique que ces intervalles sont définis indépendamment de toute théorie musicale particulière. Leur caractère acquis ou inné reste discuté ; je penche personnellement, pour les intervalles de bas niveau, octave et quinte par exemple, pour leur caractère inné qui semble confirmé par leur profonde transculturalité.

Par contre, les *noms* donnés aux intervalles n'ont de sens que dans le cadre particulier du solfège lié à la musique traditionnelle occidentale ; ils seront expliqués plus loin.

## 1.7 Fréquences réduites

Lorsqu'on s'intéresse à un ensemble de notes, c'est-à-dire à l'ensemble de leurs fréquences fondamentales classées par ordre croissant :

$$F : \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \tag{1.5}$$

il est pratique de choisir la première comme référence<sup>3</sup> et d'introduire les fréquences réduites :

$$\phi_i = \frac{f_i}{f_1} \tag{1.6}$$

---

3. La note dont la fréquence fondamentale est  $f_1$  est appelée la *tonique* ; nous ne nous en préoccupons pas car nous visons une théorie du solfège qui soit indépendante de la tonique choisie.

Notons que l'intervalle et la distance qui séparent deux notes est identique qu'on raisonne sur les fréquences ou sur les fréquences réduites :

$$I(f_1, f_2) = I(\phi_1, \phi_2) \quad (1.7)$$

$$d(f_1, f_2) = d(\phi_1, \phi_2) \quad (1.8)$$

## 1.8 Fléquences

---

Convenons d'appeler fléquences (fréquences logarithmiques), et de dénoter par le symbole  $\mu$ , le logarithme en base deux des fréquences réduites :

$$\mu_i = \log_2 \phi_i \quad (1.9)$$

## 1.9 Fléquences modularisées

---

Dans la définition des gammes, nous considérons deux notes séparées par une octave comme indiscernables. Nous définissons la fléquence modularisée comme la partie décimale de la fléquence ( $0 \leq \{\mu_i\} < 1$ ). Toutes les notes séparées par une octave portent le même nom et ont la même fléquence modularisée.

## 1.10 Gamme et tempérament

---

Une gamme est, d'un point de vue musical, une suite de notes de fréquences croissantes commençant sur une tonique choisie arbitrairement et se terminant sur l'octave de cette tonique. D'un point de vue mathématique, et prenant

en compte les définitions du paragraphe précédent, nous appellerons gamme d'ordre  $n$  un ensemble de  $n - 1$  fléquences :

$$G_n : \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}\} \quad (1.10)$$

Une gamme d'ordre  $n$  comprend  $n+1$  notes si l'on considère la tonique ( $\mu = 0$ ) et l'octave ( $\mu = 1$ ),  $n-1$  notes si on ne considère que les degrés<sup>4</sup> intermédiaires et elle partitionne l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n$  sous-intervalles. L'ordre de la gamme est donc le nombre de sous-intervalles qu'elle définit. Le terme  $\mu_n$  n'appartient pas à la gamme  $G_n$  et apparaît pour la première fois dans la gamme  $G_{n+1}$ .

Les fléquences ( $\mu_1$  à  $\mu_{n-1}$ ) peuvent être choisies de différentes manières et on appelle *tempérament* un choix particulier de ces fléquences.

## 1.11 Gammes de Pythagore généralisées

Nous appellerons gammes de Pythagore généralisées d'ordre  $n$  et de générateur  $\theta$ , et désignerons par  $G_n(\theta)$ , l'ensemble des  $(n - 1)$  fléquences :

$$\mu_i = \{i\theta\} \quad (i = 1, n - 1) \quad (1.11)$$

Les fréquences correspondantes sont :

$$f_i^k = f_0 \cdot 2^{k+\{i\theta\}} \quad (i = 1, n - 1; k \in \mathbb{Z}) \quad (1.12)$$

où  $f_0$  est la fréquence (arbitraire) de la tonique et  $k$  désigne l'octave (arbitraire) à laquelle on souhaite faire appartenir la note. La gamme classique de Pythagore est construite avec un générateur **irrationnel** :

$$\theta = \log_2 \left( \frac{3}{2} \right) \simeq 0.58496 \quad (1.13)$$

alors que le tempérament égal fait appel à un générateur **rationnel** :

$$\theta = \frac{7}{12} \simeq 0.58333 \quad (1.14)$$

---

4. On appelle degrés les notes successives d'une gamme.

Nous ne traiterons pas ici des tempéraments (Zarlino, mésotoniques, ...) qui ne rentrent pas dans la vaste famille des gammes de Pythagore généralisées.



# 2

## DEUX THÉORÈMES DE THÉORIE DES NOMBRES

---

### Contents

---

2.1	Théorème de Kronecker . . . . .	9
2.2	Théorème des trois longueurs . . . . .	11

---

### 2.1 Théorème de Kronecker

---

#### 2.1.1 Gammes cycliques

---

Considérons un générateur rationnel exprimé sous forme d'une fraction irréductible :

$$\theta = \frac{M}{N} \tag{2.1}$$

Dans ce cas, il est évident que :

$$\mu_i = \mu_{i+N} \tag{2.2}$$

La suite devient donc cyclique dès que l'ordre  $n$  devient supérieur à  $N$ . Dans le tempérament égal, par exemple, la gamme d'ordre douze inclut les onze

termes :

$$G_{12} \left( \frac{7}{12} \right) : \left\{ \frac{7}{12}, \frac{2}{12}, \frac{9}{12}, \frac{4}{12}, \frac{11}{12}, \frac{6}{12}, \frac{1}{12}, \frac{8}{12}, \frac{3}{12}, \frac{10}{12}, \frac{5}{12} \right\} \quad (2.3)$$

Le terme suivant redonne le point de départ :

$$\mu_{12} = \left\{ \frac{12}{12} \right\} = 0 \quad (2.4)$$

et puis on repasse par les mêmes valeurs :

$$\mu_{13} = \mu_1 = \frac{7}{12}, \quad \mu_{14} = \mu_2 = \frac{2}{12} \dots \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Gammes non-cycliques

---

A l'inverse, si le générateur est irrationnel, le processus n'est jamais cyclique. Un théorème, dû à Léopold Kronecker, nous indique en effet que si  $\theta$  est irrationnel, l'ensemble des nombres  $\{i\theta\}$  ( $i = 1, \infty$ ) est dense (et homogène) dans  $[0, 1]$ . En d'autres termes, pour un  $\theta$  donné, il est toujours possible de trouver un  $i$  tel que  $\{i\theta\}$  est aussi proche qu'on souhaite de n'importe quel nombre de l'intervalle  $[0, 1]$ .

### 2.1.3 Démonstration du théorème de Kronecker

---

À insérer.

## 2.2 Théorème des trois longueurs

### 2.2.1 Enoncé du théorème

Le théorème des trois longueurs, conjecturé par Hugo Steinhaus et démontré pour la première fois par Vera Sós en 1958, s'énonce comme suit :

1. les  $n - 1$  premiers termes de la suite définissent une partition de l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n$  sous-intervalles ;
2. les longueurs de ces sous-intervalles, pour une valeur de  $n$  donnée, ne prennent jamais plus de trois valeurs distinctes :
  - pour un générateur irrationnel, ce nombre n'est jamais inférieur à deux ;
  - pour un générateur rationnel, ce nombre devient puis reste égale à un dès que la suite devient cyclique ;
3. lorsqu'il y a trois longueurs différentes, la plus grande est la somme des deux autres.

### 2.2.2 Quatre exemples

#### Premier exemple

La gamme :

$$G_5 \left( \frac{7}{12} \right) : \left\{ \frac{7}{12}, \frac{2}{12}, \frac{9}{12}, \frac{4}{12} \right\} \quad (2.6)$$

divise  $[0, 1]$  en cinq intervalles de deux longueurs différentes :

- trois intervalles de longueur  $\frac{2}{12}$  :  $\left[0, \frac{2}{12}\right]$ ,  $\left[\frac{2}{12}, \frac{4}{12}\right]$  et  $\left[\frac{7}{12}, \frac{9}{12}\right]$  ;
- deux intervalles de longueur  $\frac{3}{12}$  :  $\left[\frac{4}{12}, \frac{7}{12}\right]$  et  $\left[\frac{9}{12}, 1\right]$ .

### Deuxième exemple

La gamme :

$$G_6\left(\frac{7}{12}\right) : \left\{ \frac{7}{12}, \frac{2}{12}, \frac{9}{12}, \frac{4}{12}, \frac{11}{12} \right\} \quad (2.7)$$

divise  $[0, 1]$  en six intervalles de trois longueurs différentes :

- un intervalle de longueur  $\frac{1}{12} : \left[ \frac{11}{12}, 1 \right]$  ;
- quatre intervalles de longueur  $\frac{2}{12} : \left[ 0, \frac{2}{12} \right], \left[ \frac{2}{12}, \frac{4}{12} \right], \left[ \frac{7}{12}, \frac{9}{12} \right]$  et  $\left[ \frac{9}{12}, \frac{11}{12} \right]$  ;
- un intervalle de longueur  $\frac{3}{12} : \left[ \frac{4}{12}, \frac{7}{12} \right]$ .

### Troisième exemple

La gamme :

$$G_5\left(\log_2 \frac{3}{2}\right) : \{0.585, 0.170, 0.755, 0.340\} \quad (2.8)$$

divise  $[0, 1]$  en cinq intervalles de deux longueurs différentes :

- trois intervalles de longueur 0.170 :  $[0, 0.170]$ ,  $[0.170, 0.340]$  et  $[0.585, 0.755]$  ;
- deux intervalles de longueur 0.245 :  $[0.340, 0.585]$  et  $[0.755, 1]$ .

### Quatrième exemple

La gamme :

$$G_4\left(\log_2 \frac{3}{2}\right) : \{0.585, 0.170, 0.755\} \quad (2.9)$$

divise  $[0, 1]$  en quatre intervalles de trois longueurs différentes :

- deux intervalles de longueur 0.170 :  $[0, 0.170]$  et  $[0.585, 0.755]$  ;
- un intervalle de longueur 0.245 :  $[0.755, 1]$  ;
- un intervalle de longueur 0.415 :  $[0.170, 0.585]$ .

#### 2.2.3 Autre formulation et heuristique

---

Nous allons démontrer que le théorème des trois longueurs découle de la mécanique par laquelle un intervalle de la gamme  $G_n$  est coupé en deux par le

point de coordonnée  $\{\mu_n\}$  qui apparaît dans la gamme  $G_{n+1}$ . Nous énonçons (forme alternative du théorème des trois longueurs) que :

*Si la plus grande et la plus petite longueur des sous-intervalles de la gamme  $G_n$  sont respectivement  $L_n$  et  $\ell_n$ , alors le point de coordonnée  $\{\mu_n\}$  vient se placer dans un des intervalles de longueur  $L_n$  et le scinde en deux sous-intervalles de longueurs  $\ell_n$  et  $L_n - \ell_n$ .*

Montrons que le théorème des trois longueurs découle de cette propriété et qu'elle est donc bien un énoncé équivalent du théorème. Considérons une gamme  $G_n$  ne présentant que deux types d'intervalles. De telles gammes existent ;  $G_2$  en est une et nous démontrerons ci-dessous qu'il suffit qu'il en existe une pour qu'il en existe une infinité d'autres. Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} n_1 \cdot L_n + n_2 \cdot \ell_n = 1 \\ n_1 + n_2 = n \end{cases} \quad (2.10)$$

Pour les gammes  $G_{n+i}$  ( $i = 1, n_1 - 1$ ) on a alors, par application du théorème :

$$\begin{cases} (n_1 - i) \cdot L_n + (n_2 + i) \cdot \ell_n + i \cdot (L_n - \ell_n) = 1 \\ (n_1 - i) + (n_2 + i) + i = n + i \end{cases} \quad (2.11)$$

À l'ordre  $n + n_1$ , le dernier intervalle de longueur  $L_n$  se scinde en deux :

$$\begin{cases} (n_2 + n_1) \cdot \ell_n + n_1 \cdot (L_n - \ell_n) = 1 \\ (n_2 + n_1) + n_1 = n + n_1 \end{cases} \quad (2.12)$$

qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} n'_1 \cdot L_{n'} + n'_2 \cdot \ell_{n'} = 1 \\ n'_1 + n'_2 = n' \end{cases} \quad (2.13)$$

Avec  $n' = n + n_1$  et :

- si  $\ell_n < L_n - \ell_n$  :  $L_{n'} = L_n - \ell_n$ ,  $\ell_{n'} = \ell_n$ ,  $n'_1 = n_1$ ,  $n'_2 = n_1 + n_2$  ;
- si  $\ell_n > L_n - \ell_n$  :  $L_{n'} = \ell_n$ ,  $\ell_{n'} = L_n - \ell_n$ ,  $n'_1 = n_1 + n_2$ ,  $n'_2 = n_1$ .

On voit donc que les deux formulations du théorème sont bien équivalentes et que, si celui-ci est vrai, partant d'une gamme  $G_n$  à deux intervalles, dont  $n_1$  grands intervalles, les gammes  $G_{n+1}$  à  $G_{n+n_1-1}$  présentent trois intervalles et la gamme  $G_{n+n_1}$  ne présente à nouveau plus que deux intervalles. Les gammes à trois intervalles apparaissent donc comme des étapes intermédiaires entre deux gammes à deux intervalles. Identifier ces gammes à deux intervalles est

un problème musicalement signifiant. On peut trouver ces gammes par une heuristique simple :

1. soit une gamme  $G_n$  à deux intervalles ( $G_2$  par exemple) comportant  $n_1$  grands intervalles et  $n_2$  petits intervalles ;
2. la prochaine gamme à deux intervalles apparaît à l'ordre  $n + n_1$  et présente  $n_2 + n_1$  intervalles d'un type et  $n_1$  intervalles d'un autre ;
3. on se retrouve à l'étape 1 et on recommence.

### **2.2.4** Démonstration du théorème des trois longueurs

---

À insérer.

### **2.2.5** Gammes à deux intervalles et fractions continues

---

Il existe un lien profond entre les ordres  $n$  des gammes à deux intervalles et les développements de  $\theta$  en fractions continues. Nous donnons au chapitre suivant une introduction à la théorie des fractions continues.

# 3

## INTRODUCTION À LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES

---

### Contents

---

3.1	Définitions . . . . .	15
3.2	Calcul des coefficients . . . . .	16
3.3	Calcul des convergents . . . . .	17
3.4	Semi-convergents . . . . .	19
3.5	Relation entre deux convergents successifs . . . . .	19
3.6	Caractère optimal des convergents . . . . .	22

---

Note liminaire : on se limite ici au cas où  $\theta$  est un réel positif.

### **3.1** Définitions

---

Tout nombre réel  $\theta$  possède un développement *unique* sous forme de fraction continue :

$$c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \frac{1}{c_4 + \frac{1}{c_5 + \frac{1}{c_6 + \dots}}}}}} \quad (3.1)$$

Cette fraction est dite simple si, et c'est le cas qu'on considère, les  $c_n$  sont des entiers positifs. On peut également noter la fraction continue de la manière suivante :

$$c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \frac{1}{c_4 + \frac{1}{c_5 + \frac{1}{c_6 + \dots}}}}} \dots \quad (3.2)$$

ou encore :

$$[c_0; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, \dots] \quad (3.3)$$

Un nombre rationnel possède un développement fini, un nombre irrationnel possède un développement infini. Le développement limité au coefficient  $c_n$  est appelé  $n$ -ième convergent de  $\theta$  et sera noté  $\theta_n$ .

## 3.2 Calcul des coefficients

Les coefficients se calculent aisément par le processus itératif suivant :

$$\begin{aligned} c_0 &= [\theta] & ; & \quad \rho_0 = \{\theta\} \\ c_1 &= \left[ \frac{1}{\rho_0} \right] & ; & \quad \rho_1 = \left\{ \frac{1}{\rho_0} \right\} \\ c_2 &= \left[ \frac{1}{\rho_1} \right] & ; & \quad \rho_2 = \left\{ \frac{1}{\rho_1} \right\} \\ c_n &= \left[ \frac{1}{\rho_{n-1}} \right] & ; & \quad \rho_n = \left\{ \frac{1}{\rho_{n-1}} \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Définissons encore le résidu :

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{\rho_n} = c_{n+1} + \rho_{n+1} = [c_{n+1}; c_{n+2}, \dots] \quad (3.5)$$

Nous voyons alors que, pour tout  $n$  :

$$\begin{aligned} \theta &= [c_0; c_1, \dots, c_n + \rho_n] \\ &= [c_0; c_1, \dots, c_n, \mu_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Notons que, par définition de  $\mu_{n+1}$  et de  $\rho_{n+1}$ , on a :

$$c_{n+1} < \mu_{n+1} < c_{n+1} + 1 \quad (3.7)$$



### 3.3 Calcul des convergents

#### 3.3.1 Relations de récurrences

Chaque convergent peut s'écrire sous forme d'une fraction simple dont le numérateur et le dénominateur s'obtiennent aisément par récurrence (valeurs initiales :  $p_{-1} = 1$ ,  $q_{-1} = 0$ ,  $p_0 = c_0$ ,  $q_0 = 1$ ) :

$$\theta_n = [c_0 c_1, \dots, c_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{c_n p_{n-1} + p_{n-2}}{c_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad (3.8)$$

#### 3.3.2 Démonstration

Montrons d'abord que la relation est vraie à l'ordre un :

$$\theta_1 = [c_0; c_1] = c_0 + \frac{1}{c_1} = \frac{c_1 c_0 + 1}{c_1} = \frac{p_1}{q_1} \quad (3.9)$$

On a donc bien :

$$\begin{cases} p_1 = c_1 p_0 + p_{-1} \\ q_1 = c_1 q_0 + q_{-1} \end{cases} \quad (3.10)$$

A l'ordre 2, on a :

$$\theta_2 = [c_0; c_1, c_2] = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2}} = \frac{c_0 c_1 c_2 + c_2 + c_0}{c_1 c_2 + 1} = \frac{p_2}{q_2} \quad (3.11)$$

et :

$$\begin{cases} p_2 = c_2 p_1 + p_0 \\ q_2 = c_2 q_1 + q_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Montrons ensuite que si la relation est vraie à l'ordre  $n$ , elle l'est nécessairement à l'ordre  $n + 1$ . Si on désigne par l'expression  $p_n (c_0 c_1, \dots, c_{n-1}, c_n)$

le numérateur du convergent  $n$  obtenu avec les coefficients désignés dans la parenthèse, on peut écrire :

$$\theta_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n \left( c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n + \frac{1}{c_{n+1}} \right)}{q_n \left( c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n + \frac{1}{c_{n+1}} \right)} \quad (3.13)$$

Puisqu'on fait l'hypothèse que la relation est vraie à l'ordre  $n$ , on peut écrire successivement :

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= \frac{\left( c_n + \frac{1}{c_{n+1}} \right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left( c_n + \frac{1}{c_{n+1}} \right) q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{c_n p_{n-1} + p_{n-2} + \frac{1}{c_{n+1}} p_{n-1}}{c_n q_{n-1} + q_{n-2} + \frac{1}{c_{n+1}} q_{n-1}} \\ &= \frac{p_n + \frac{1}{c_{n+1}} p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{c_{n+1}} q_{n-1}} \\ &= \frac{c_{n+1} p_n + p_{n-1}}{c_{n+1} q_n + q_{n-1}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

cette dernière expression montrant que la propriété est vraie à l'ordre  $n+1$ .

### 3.3.3 Généralisation

Notons que la relation de récurrence est purement algébrique et qu'on peut l'étendre à tout entier ou réel  $x$  :

$$[c_0; c_1, \dots, c_n, x] = \frac{x p_n + p_{n-1}}{x q_n + q_{n-1}} \quad (3.15)$$

## 3.4 Semi-convergents

On appelle *semi-convergents* associés au convergent  $n$  les approximations rationnelles suivantes ( $m = 0, c_n$ ) :

$$\theta_{n,m} = [c_0; c_1, \dots, c_{n-1}, m] = \frac{mp_{n-1} + p_{n-2}}{mq_{n-1} + q_{n-2}} \quad (3.16)$$

Notons que le semi-convergent correspondant à  $m = 0$  est le convergent  $n - 2$  et que celui correspondant à  $m = c_n$  est le convergent  $n$ . Le convergent  $n$  n'a donc de semi-convergents *non redondants* que si  $c_n > 1$ . Nous désignerons dans la suite par (*semi*-)convergents l'ensemble des convergents et des semi-convergents.

## 3.5 Relation entre deux convergents successifs

### 3.5.1 Différence entre deux convergents successifs

Nous nous intéressons à la différence entre deux convergents successifs :

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n}{q_nq_{n+1}} \quad (3.17)$$

Puisque le dénominateur est irréductible et positif, considérons seulement le numérateur et appliquons les formules de récurrences :

$$\begin{aligned} p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n &= (c_n p_n + p_{n-1})q_n - (c_n q_n + q_{n-1})p_n \\ &= -(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}) \\ &= (-1)^{n+1} (p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1}) \\ &= (-1)^{n+1} (c_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) \\ &= (-1)^n \end{aligned} \quad (3.18)$$

On a donc :

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \quad (3.19)$$

On peut analyser ce résultat de différentes manières :

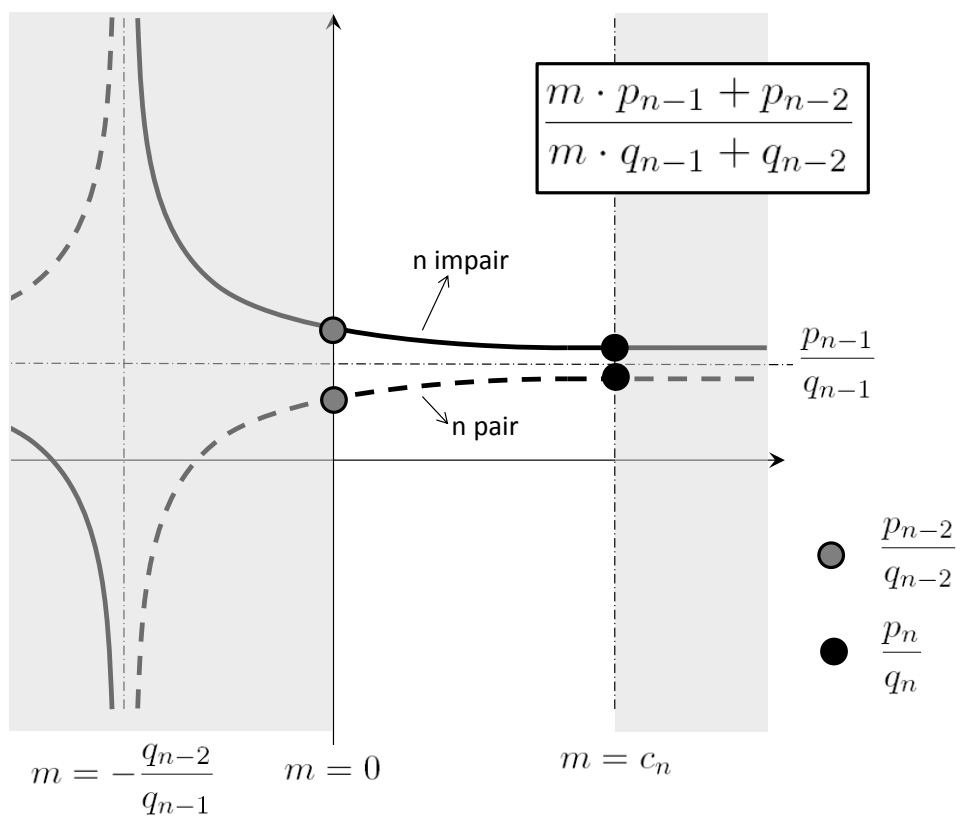
1. la différence  $\Delta_n$  est positive si  $n$  est pair et négative si  $n$  est impair ;
2. si un convergent approche  $\theta$  par excès, le convergent suivant l'approche par défaut et réciproquement ;
3. les convergents pairs approchent  $\theta$  par défaut et les convergents impairs par excès ;
4. les convergents impairs forment une suite uniformément décroissante ;
5. les convergents pairs forment une suite uniformément croissante ;
6.  $\theta$  appartient à tout intervalle  $[\frac{p_{2n}}{q_{2n}}; \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}]$  ;
7. la suite des convergents converge vers  $\theta$  si  $\theta_{n+1} - \theta_n \rightarrow 0$  soit quand  $q_n q_{n+1} \rightarrow \infty$  ;
8. la suite des convergents ne converge donc que si les suites  $p_n$  et  $q_n$  sont divergentes ;
9.  $p_n$  et  $q_n$  sont premiers entre eux : en effet, tout diviseur commun à  $p_n$  et  $q_n$  devrait aussi être un diviseur de  $(-1)^n$  ce qui est impossible.

### 3.5.2 Généralisation aux semi-convergents

On montre aisément que :

$$\frac{mp_n + p_{n-1}}{mq_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(mq_n + q_{n-1})q_n} \quad (3.20)$$

Dont on déduit qu'un convergent  $n$  et tous ses semi-convergents associés approchent  $\theta$  de la même manière soit par défaut ( $n$  pair), soit par excès ( $n$  impair).



**Figure 3.1:** Variation des semi-convergents avec le paramètre  $m$ . Tous les semi-convergents se trouvent sur une branche d'hyperbole qui est soit croissante ( $n$  pair), soit décroissante ( $n$  impair).

### 3.6 Caractère optimal des convergents

#### 3.6.1 Bornes pour $|\theta - \theta_n|$

Considérons la différence  $\theta - \theta_n$  et utilisons l'expression 3.6 pour  $\theta$  :

$$\begin{aligned}
 \theta - \theta_n &= [c_0; c_1, \dots, c_n, \mu_{n+1}] - [c_0; c_1, \dots, c_n] \\
 &= \frac{\mu_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\mu_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\
 &= \frac{(-1)^n}{q_n(\mu_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\
 &= \frac{(-1)^n}{q_n^2 \left( \mu_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)} \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Comme :

$$\mu_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} > 1 \tag{3.22}$$

on en déduit que :

$$|\theta - \theta_n| < \frac{1}{q_n^2} \tag{3.23}$$

Il est en outre aisé de démontrer que :

$$|\theta - \theta_n| > \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} \tag{3.24}$$

En effet, pour que cette propriété soit vérifiée il suffit que :

$$\begin{aligned}
 \mu_{n+1}q_n + q_{n-1} &< q_n + q_{n+1} \\
 &< q_n + c_{n+1}q_n + q_{n-1} \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

soit que :

$$\mu_{n+1} < c_{n+1} + 1 \tag{3.26}$$

ce qui est bien vérifié (Equation 3.7). **Nous disposons donc d'un encadrement pour l'erreur à l'ordre  $n$  :**

$$\frac{1}{q_n^2 \left(1 + \frac{q_{n+1}}{q_n}\right)} < |\theta - \theta_n| < \frac{1}{q_n^2} \quad (3.27)$$

### 3.6.2 Approximation optimale de première espèce

Un rationnel  $\frac{p}{q}$  est une **approximation optimale de première espèce** de  $\theta$  si, pour tout rationnel  $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$ , avec  $1 \leq b \leq q$ , on a :

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \left| \theta - \frac{a}{b} \right| \quad (3.28)$$

On peut démontrer que :

1. Toute approximation optimale de première espèce est soit un convergent soit un semi-convergent.
2. Tous les convergents sont des approximations optimales de première espèce.
3. Seuls certains semi-convergents sont des approximations optimales de première espèce.

La démonstration de ces résultats devrait être insérée ici.

### 3.6.3 Approximation optimale de seconde espèce

Un rationnel  $\frac{p}{q}$  est une **approximation optimale de seconde espèce** de  $\theta$  si, pour tout rationnel  $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$  où  $1 \leq b \leq q$ , on a :

$$|q \cdot \theta - p| < |b \cdot \theta - a| \quad (3.29)$$

On peut démontrer que :

1. Tous les convergents sont des approximations optimales de seconde espèce.

2. Les semi-convergents ne sont pas des approximations optimales de seconde espèce.

La démonstration de ces résultats devrait être insérée ici.

### 3.6.4 Approximations optimales par défaut et par excès

Si on distingue les approximations rationnelles de  $\theta$  par excès ( $n$  impair) et par défaut ( $n$  pair), alors tous les (semi-)convergents sont des approximations optimales de première et de seconde espèce au sens où :

- si  $\frac{p}{q}$  est un (semi-)convergent d'ordre  $n$  pair, alors pour tout rationnel  $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$  où  $1 \leq b \leq q$  et  $\frac{a}{b} < \theta$  les trois propositions ci-dessous sont vérifiées :

$$\theta - \frac{p}{q} < \theta - \frac{a}{b} \quad (3.30)$$

$$q\theta - p < b\theta - a \quad (3.31)$$

$$\{q\theta\} < \{b\theta\} \quad (3.32)$$

- si  $\frac{p}{q}$  est un (semi-)convergent d'ordre  $n$  impair, alors pour tout rationnel  $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$  où  $1 \leq b \leq q$  et  $\frac{a}{b} > \theta$  on a :

$$\frac{p}{q} - \theta < \frac{a}{b} - \theta \quad (3.33)$$

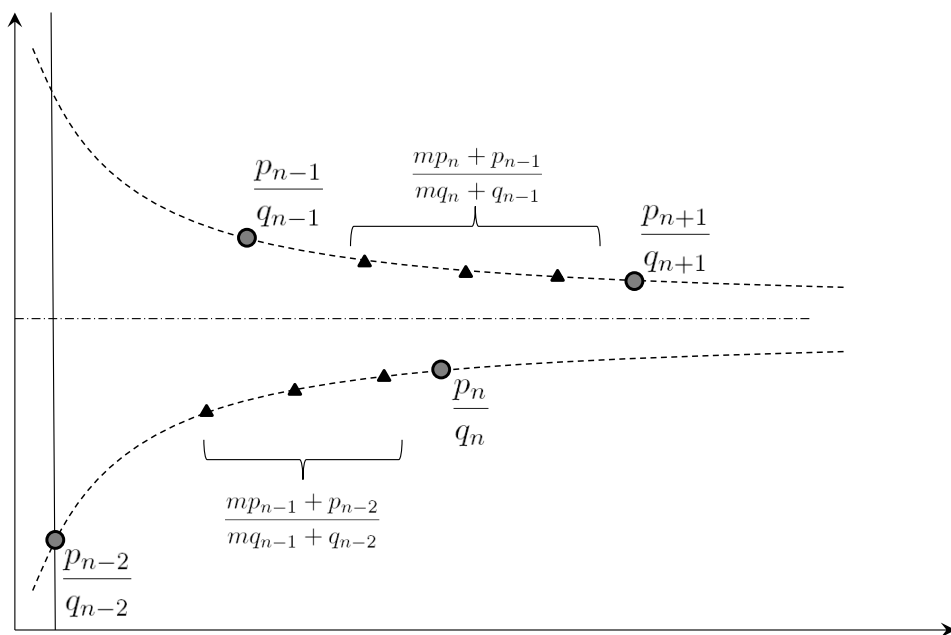
$$p\theta - q < b\theta - a \quad (3.34)$$

et

$$1 - \{q\theta\} < 1 - \{b\theta\} \quad (3.35)$$

La démonstration de ces résultats devrait être insérée ici. Notons qu'ils n'apparaissent pas dans les références consultées ; ils ne sont certainement pas originaux mais semblent peu connus et pourtant, à mon sens, très pertinents. On pourrait presque dire que les (semi-)convergents sont tous des approximations optimales de troisième espèce au sens ci-dessus.





**Figure 3.2:** Représentation schématique de la convergence des (semi-)convergents successifs vers  $\theta$ .



# 4

## FRACTIONS CONTINUES ET GAMME MUSICALE

---

### Contents

---

4.1	Théorème des trois longueurs et fractions continues	27
4.2	Application au tempérament classique de Pythagore	28

---

### 4.1 Théorème des trois longueurs et fractions continues

---

Les ordres des gammes à deux intervalles et les dénominateurs des approximations rationnelles de  $\theta$  sous forme de fractions continues sont profondément liés :

1. une gamme de Pythagore généralisée d'ordre  $n$  et de générateur  $\theta$  est définie par les  $n - 1$  premiers termes de la suite  $\{i\theta\}$  ;
2. cette suite est périodique si  $\theta$  est rationnel et non-périodique si  $\theta$  est irrationnel ;
3. si  $\frac{p}{q}$  est un (semi-)convergent de  $\theta$  alors  $\{q\theta\}$  est plus proche de 0 ou de 1 que n'importe quel point des gammes  $G_{n \leq q}$ .
4. ce point  $\mu_q$  crée nécessairement, dans la gamme  $G_{q+1}$ , un nouveau type d'intervalle de longueur  $\{q\theta\}$  ou  $1 - \{q\theta\}$  ;

5. un nouveau type d'intervalle n'apparaît dans une gamme  $G_n$  que si la gamme  $G_{n-1}$  ne comporte que deux types d'intervalle (forme alternative du théorème des trois longueurs) ;
6. il est donc établi que  $G_q$  n'a que deux types d'intervalle si  $q$  est le dénominateur d'un convergent de  $\theta$ .

## 4.2 Application au tempérament classique de Pythagore

### 4.2.1 Suite des quintes

Observons le théorème des trois longueurs dans le solfège classique. La gamme de Pythagore se construit par un empilement de quintes ; observons les *gammes* successives. Nous mettons en caractères gras celles n'impliquant que deux types d'intervalles et nous soulignons un nouvel intervalle la première fois où il apparaît. Les intervalles sont désignés par leur nom traditionnel en musique.

2. **Fa-Do-Fa** : une quinte et une quarte (la prochaine gamme à deux types d'intervalles apparaîtra à l'ordre  $2 + 1 = 3$ ) ;
3. **Fa-Sol-Do-Fa** : deux quartes, un ton ( $\rightarrow 3 + 2 = 5$ ) ;
4. Fa-Sol-Do-Ré-Fa : une quarte, une tierce mineure, deux tons ;
5. **Fa-Sol-La-Do-Ré-Fa** : deux tierces mineures, trois tons, c'est la gamme pentatonique de Fa naturel ( $\rightarrow 5 + 2 = 7$ ) ;
6. Fa-Sol-La-Do-Ré-Mi-Fa : une tierce mineure, quatre tons, un (demi-ton) diatonique ;
7. **Fa-Sol-La-Si-Do-Ré-Mi-Fa** : cinq tons, deux diatoniques, c'est la gamme diatonique de Fa naturel ( $\rightarrow 7 + 5 = 12$ ) ;
8. Fa-Fa $\sharp$ -Sol-La-Si-Do-Ré-Mi-Fa : quatre tons, un (demi-ton) chromatique, trois diatoniques ;
9. Fa-Fa $\sharp$ -Sol-La-Si-Do-Do $\sharp$ -Ré-Mi-Fa : trois tons, deux chromatiques, quatre diatoniques ;

10. Fa-Fa<sup>#</sup>-Sol-Sol<sup>#</sup>-La-Si-Do-Do<sup>#</sup>-Ré-Mi-Fa : deux tons, trois chromatiques, cinq diatoniques ;
11. Fa-Fa<sup>#</sup>-Sol-Sol<sup>#</sup>-La-Si-Do-Do<sup>#</sup>-Ré-Ré<sup>#</sup>-Mi-Fa : un ton, quatre chromatiques, six diatoniques ;
12. **Fa-Fa<sup>#</sup>-Sol-Sol<sup>#</sup>-La-La<sup>#</sup>-Si-Do-Do<sup>#</sup>-Ré-Ré<sup>#</sup>-Mi-Fa** : cinq chromatiques, sept diatoniques, c'est la gamme chromatique de Fa naturel ( $\rightarrow 12+5 = 17$ ).

On s'arrête traditionnellement ici mais on peut évidemment pousser le processus plus loin :

13. Fa-Fa<sup>#</sup>-Sol-Fa<sup>##</sup>-Sol<sup>#</sup>-La-La<sup>#</sup>-Si-Do-Do<sup>#</sup>-Ré-Ré<sup>#</sup>-Mi-Fa : quatre chromatiques, huit diatoniques, un comma ;

Les quatre grands intervalles (demi-tons chromatiques) auront disparu à l'ordre dix-sept :

17. **Fa-Fa<sup>#</sup>-Sol-Fa<sup>##</sup>-Sol<sup>#</sup>-La-Sol<sup>##</sup>-La<sup>#</sup>-Si-La<sup>##</sup>-Do-Do<sup>#</sup>-Ré-Do<sup>##</sup>-Ré<sup>#</sup>-Mi-Ré<sup>##</sup>-Fa** : douze diatoniques, cinq comma ( $\rightarrow 17 + 12 = 29$ ) ;

Les gammes suivantes n'impliquant que deux intervalles sont :

29. douze diatoniques réduits d'un comma, dix-sept commas ( $\rightarrow 29 + 12 = 41$ ) ;
41. douze diatoniques réduits de deux commas, vingt-neuf commas ( $\rightarrow 41 + 12 = 53$ ) ;
53. quarante-et-un commas (chromatique moins diatonique) et douze petits commas (diatonique moins trois commas) : c'est la gamme de Mercator ( $\rightarrow 53 + 41 = 94$ ).

### 4.2.2 Incommensurabilité des quintes et des octaves

---

Un problème musical classique est le suivant : *combien de quintes ( $q$ ) entrent dans un nombre donné d'octaves ( $p$ )* ? Il revient à chercher les couples  $(p, q)$  pour lesquels :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^q = 2^p \Leftrightarrow 3^q = 2^{p+q} \tag{4.1}$$

Il est évident que  $p$  et  $q$  ne peuvent être entiers car une puissance entière de 3 (impaire) ne peut être égale à une puissance entière de 2 (paire). La solution, nécessairement irrationnelle est donnée par :

$$\frac{p}{q} = \log_2 \frac{3}{2} = \theta \quad (4.2)$$

Les premiers couples  $(p, q)$  répondant *au mieux* à la question sont logiquement les numérateurs et dénominateurs des (sous)-convergents de  $\theta$  soit :

- $(1, 1)$  : une quinte rentre dans une octave, le défaut est d'une quarte ;
- $(2, 1)$  : deux quintes rentrent dans une octave, l'excès est d'un ton ;
- $(5, 3)$  : cinq quintes rentrent dans trois octaves, le défaut est d'un demi-ton diatonique ;
- $(12, 7)$  : douze quintes rentrent dans sept octaves, l'excès est d'un comma pythagoricien.

### 4.2.3 Pythagore et fractions continues

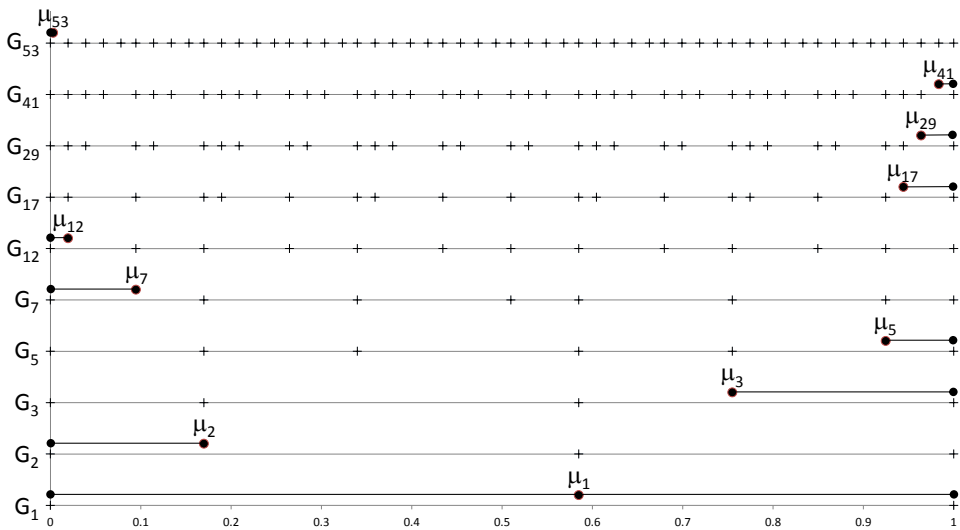
Les tempéraments de Pythagore sont les gammes  $G_n(\theta)$  avec :

$$\theta = \log_2 \left( \frac{3}{2} \right) \quad (4.3)$$

Le développement de  $\theta$  en fractions continues est :

$$\theta = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, \dots] \quad (4.4)$$

$n$	$m$ ou	$[c_0; c_1, \dots, c_n]$ $c_n$	$\frac{p_n}{q_n}$	Convergent ou Semi-convergent
1	1	$[0; 1]$	$\frac{1}{1} = 1.000000$	Convergent
2	1	$[0; 1, 1]$	$\frac{1}{2} = 0.500000$	Convergent
3	1	$[0; 1, 1, 1]$	$\frac{2}{3} = 0.666667$	Semi-convergent
3	2	$[0; 1, 1, 2]$	$\frac{3}{5} = 0.600000$	Convergent
4	1	$[0; 1, 1, 2, 1]$	$\frac{4}{7} = 0.571429$	Semi-convergent
4	2	$[0; 1, 1, 2, 2]$	$\frac{7}{12} = 0.583333$	Convergent
5	1	$[0; 1, 1, 2, 2, 1]$	$\frac{10}{17} = 0.588235$	Semi-convergent
5	2	$[0; 1, 1, 2, 2, 2]$	$\frac{17}{29} = 0.586207$	Semi-convergent
5	3	$[0; 1, 1, 2, 2, 3]$	$\frac{24}{41} = 0.585366$	Convergent
6	1	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1]$	$\frac{31}{53} = 0.584906$	Convergent
7	1	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 1]$	$\frac{55}{94} = 0.585106$	Semi-convergent
7	2	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2]$	$\frac{86}{147} = 0.585034$	Semi-convergent
7	3	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 3]$	$\frac{117}{200} = 0.585000$	Semi-convergent
7	4	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 4]$	$\frac{148}{253} = 0.584980$	Semi-convergent
7	5	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5]$	$\frac{179}{306} = 0.584967$	Convergent
8	1	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 1]$	$\frac{210}{359} = 0.584958$	Semi-convergent
8	2	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2]$	$\frac{389}{665} = 0.584962$	Convergent
9	1	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 1]$	$\frac{568}{971} = 0.584964$	Semi-convergent
...	...	...	...	...
9	22	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 22]$	$\frac{8.737}{14.936} = 0.584963$	Semi-convergent
9	23	$[0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23]$	$\frac{9.126}{15.601} = 0.584963$	Convergent
...	...	...	...	...



**Figure 4.1:** Les gammes  $G_n$  à deux intervalles sont montrées ci-dessus. Chaque fois, on indique la position du terme suivant  $\mu_n$  et on met en évidence le nouveau type d'intervalle qu'il crée.